Probeklausur

Hinweise zur Klausur:

- Klausurtermin: 21. 02. 2014 um 9 Uhr (Einlass) in RUD26 0'110 und 0'115.
- Anmeldung nur mit Übungsschein.
- Die Bearbeitungszeit wird 120 Minuten betragen.
- Bitte bringen Sie Ihren Studenten- und einen Lichtbildausweis (Personalausweis, Reisepass oder Führerschein) mit.
- Am 18.2.2014 um 15:15 Uhr und am 20.2.2014 um 13:15 Uhr findet jeweils in RUD26 1'305 eine Fragestunde statt.

Hinweis zur Probeklausur:

- Für die Probeklausur sollten Sie von einer Bearbeitungszeit von 180 Minuten ausgehen (d. h. 1 Punkt entspricht 1 Minute).

Aufgabe 1 Sei R eine Relation auf einer Menge A. ***25 Punkte***

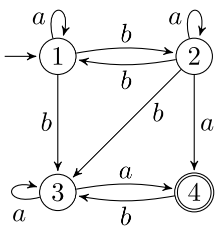
Wir definieren zu R folgende Relation R' auf der Menge $A \times A$:

$$(a_1, a_2)R'(b_1, b_2) :\Leftrightarrow a_1 R b_1 \wedge a_2 R b_2.$$

Zeigen Sie:

(a) R' ist genau dann eine Ordnung, wenn R eine Ordnung ist.
(b) R' ist genau dann eine lineare Ordnung, wenn $R = id_A$ und $\|A\| = 1$ ist.
(c) R ist genau dann eine Äquivalenzrelation, wenn $id_A \subseteq R^2 \subseteq R^T$ gilt.

Aufgabe 2 Betrachten Sie den folgenden NFA N. ***35 Punkte***



(a) Welche der Wörter ε, bb, aba und bab gehören zu $L = L(N)$?
(b) Wandeln Sie N mit der Potenzmengenkonstruktion in einen äquivalenten DFA M um.
(c) Minimieren Sie M mit dem Verfahren aus der Vorlesung.
(d) Geben Sie für jedes Wortpaar $x, y \in \{\varepsilon, aa, abb, bbb\}$ an, ob $xR_L y$ gilt oder nicht. Begründen Sie.
(e) Geben Sie ein Repräsentantensystem für R_L an.
(f) Geben Sie einen möglichst kurzen regulären Ausdruck für $\overline{L(N)}$ an.

Aufgabe 3 Betrachten Sie die Sprachen $A = \{a^i b^j c^k \mid \min(i,j) \le k\}$, $B = \{a^i b^j c^k \mid 0 < i < j < k\}$ und $C = \{a^{2^n} \mid n \ge 0\}$. ***40 Punkte***

(a) Geben Sie einen PDA für A an.
(b) Zeigen Sie ohne Benutzung des Pumping-Lemmas, dass A nicht regulär ist.
(c) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik für $\overline{B}$ an.
(d) Geben Sie eine kontextsensitive Grammatik für B an.
(e) Zeigen Sie, dass B nicht kontextfrei ist.
(f) Beschreiben Sie informell einen DLBA für die Sprache C.

Aufgabe 4 ***15 Punkte***

Betrachten Sie die kontextfreie Grammatik $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, P, S)$ mit den Produktionen $P: S \to AB, AC; A \to AA, a; C \to SB; B \to a, b$.

(a) Geben Sie eine explizite Beschreibung von $L(G)$ an.
(b) Testen Sie mit dem CYK-Algorithmus, ob $x = aabbb$ in $L(G)$ ist.

Aufgabe 5 ***30 Punkte***

Bestimmen Sie, welche der folgenden Sprachen entscheidbar, semi-entscheidbar, oder nicht semi-entscheidbar sind. Begründen Sie.

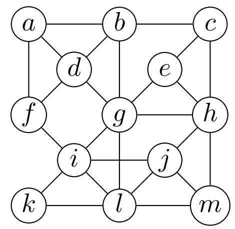
(a) $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \in L(M_w)\}$
(b) $L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \notin L(M_w)\}$
(c) $L_3 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \|L(M_w)\| > 5\}$
(d) $L_4 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \|L(M_w)\| < 5\}$
(e) $L_5 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \exists x \in \{0,1\}^* : M_w(x) = x\}$
(f) $L_6 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \exists x \in \{0,1\}^* : M_w(x) \ne x\}$

Aufgabe 6 ***10 Punkte***

Sei Exact-3-Sat die Einschränkung von 3-Sat auf KNF-Formeln mit genau 3 verschiedenen Literalen pro Klausel. Zeigen Sie, dass Exact-3-Sat NP-vollständig ist.
Hinweis: Finden Sie eine Exact-3-Sat-Formel G mit $G(x, y, z) = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 0$.

Aufgabe 7 ***25 Punkte***

Bestimmen Sie für nebenstehenden Graphen G folgende Parameter. Begründen Sie.



(a) $\alpha(G) = \max\{\|S\| \mid S \text{ ist stabil in } G\}$,
(b) $\chi(G) = \min\{k \ge 1 \mid G \text{ ist } k\text{-färbbar}\}$,
(c) $\mu(G) = \max\{\|M\| \mid M \text{ ist ein Matching in } G\}$,
(d) $\omega(G) = \max\{\|C\| \mid C \text{ ist eine Clique in } G\}$,
(e) $\beta(G) = \min\{\|U\| \mid U \text{ ist eine Kantenüberdeckung in } G\}$.

Wie viele Kanten müssen zu G mindestens hinzugefügt werden, um eine Eulerlinie, Eulertour, einen Hamiltonpfad oder Hamiltonkreis zu erhalten? Begründen Sie.