

Übungsblatt 9

Aufgabe 45

mündlich

- Bestimmen Sie in $\mathbb{Z}_5[x]/3x^2 + 1$ den Repräsentanten für die Restklasse, in der das Polynom $2x^5 + x^4 + 4x + 3$ enthalten ist.
- Bestimmen Sie alle irreduziblen Polynome $m(x)$ vom Grad 2 in $\mathbb{Z}_2[x]$. Stellen Sie jeweils die Additions- und Multiplikationstafeln für den Polynomrestklassenring $\mathbb{Z}_2[x]/m(x)$ auf.
- Sei $m(x) = x^2 + 2$. Stellen Sie die Additions- und Multiplikationstafeln für den Polynomrestklassenring $\mathbb{Z}_3[x]/m(x)$ auf. Ist $\mathbb{Z}_3[x]/m(x)$ ein Körper?
- Berechnen Sie das multiplikative Inverse von $a(x) = x^4 + x^2 + 2x$ in $\mathbb{Z}_3[x]/m(x)$, wobei $m(x) = 2x^6 + x^3 + x^2 + 2$ ist. Ist $m(x)$ irreduzibel über \mathbb{Z}_3 ?

Aufgabe 46

mündlich

- Zeigen Sie, dass \mathbb{F}_{p^n} zusammen mit der Addition auf \mathbb{F}_{p^n} und der Einschränkung der Multiplikation auf Skalarprodukte der Form $a(x)b(x)$ mit $a(x) = a_0 \in \mathbb{F}_p$ und $b(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1x + b_0 \in \mathbb{F}_{p^n}$ einen n -dimensionalen Vektorraum $(\mathbb{F}_p)^n$ über \mathbb{F}_p bildet (falls wir $b(x) \in \mathbb{F}_{p^n}$ als Vektor (b_{n-1}, \dots, b_0) darstellen).
- Zeigen Sie, dass die Multiplikation mit einem festen Körperelement $a = (a_{n-1}, \dots, a_0)$ in \mathbb{F}_{p^n} , also die Abbildung $f_a: (b_{n-1}, \dots, b_0) \mapsto (a_{n-1}, \dots, a_0) \cdot (b_{n-1}, \dots, b_0)$ eine lineare Abbildung $f_a: (\mathbb{F}_p)^n \rightarrow (\mathbb{F}_p)^n$ ist.
- Folgern Sie, dass jede lineare Abbildung $f: (\mathbb{F}_{p^n})^l \rightarrow (\mathbb{F}_{p^n})^k$ über dem Körper \mathbb{F}_{p^n} auch eine lineare Abbildung $f: (\mathbb{F}_p)^{nl} \rightarrow (\mathbb{F}_p)^{nk}$ über \mathbb{F}_p ist. Gilt hiervon auch die Umkehrung?

Aufgabe 47

10 Punkte

- Bestimmen Sie in $\mathbb{Z}_7[x]/3x^2 + 1$ den Repräsentanten für die Restklasse, in der das Polynom $p(x) = 2x^5 + x^4 + 4x + 3$ enthalten ist.
- Bestimmen Sie alle irreduziblen Polynome $m(x)$ vom Grad 2 in $\mathbb{Z}_3[x]$.
- Stellen Sie die Additions- und Multiplikationstafeln für den Polynomrestklassenring $\mathbb{Z}_3[x]/m(x)$ auf, wobei $m(x)$ das lexikographisch kleinste irreduzible Polynom vom Grad 2 in $\mathbb{Z}_3[x]$ ist.

Aufgabe 48

- Zeigen Sie, dass der Polynomrestklassenring $\mathbb{Z}_p[x]/m(x)$ genau dann ein Körper ist, wenn $m(x)$ irreduzibel über \mathbb{Z}_p ist.
- Zeigen Sie, dass zu jedem Polynom $f(x)$ in $\mathbb{Z}_p[x]$ ein endlicher Körper K existiert, der \mathbb{Z}_p als Unterkörper enthält und in dem $f(x)$ in Linearfaktoren zerfällt (der kleinste solche Körper $K_p(f(x))$ ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt und heißt der Zerfällungskörper für $f(x)$ über \mathbb{Z}_p).
- Zeigen Sie, dass der Zerfällungskörper $K = K_p(x^{p^n} - x)$ genau p^n Elemente enthält. Schließen Sie hieraus auf die Existenz eines irreduziblen Polynoms $m(x)$ vom Grad n über \mathbb{Z}_p , indem Sie zu einem beliebigen Erzeuger g der multiplikativen Gruppe K^* von K ein Polynom $m(x)$ kleinsten Grades mit $m(g) = 0$ bestimmen.