Übungsblatt 10

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 7.–11. 1. 2013
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 15:00 am 16. 1. 2013

Aufgabe 73 ***mündlich***

Die Goldbachsche Vermutung lautet: Jede gerade Zahl größer 2 ist die Summe zweier Primzahlen. Es ist nicht bekannt, ob diese Vermutung richtig ist.

(a) Zeigen Sie, dass folgende Funktion $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}$ berechenbar ist:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls die Goldbachvermutung falsch ist,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) Beschreiben Sie informell eine DTM M, die folgende partielle Funktion berechnet:

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls die Goldbachvermutung falsch ist,} \\ \uparrow, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 74 ***mündlich, optional***

Seien Σ, Γ Alphabete mit $\# \notin \Sigma \cup \Gamma$. Für eine partielle Funktion $f : \Sigma^* \to \Gamma^* \cup \{\uparrow\}$ sei $\mathit{graph}(f) = \{x\#f(x) \mid x \in \mathit{dom}(f)\}$ der *Graph* von f.

(a) Zeigen Sie, dass eine partielle Funktion genau dann berechenbar ist, wenn ihr Graph semi-entscheidbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass der Graph einer totalen Funktion genau dann entscheidbar ist, wenn er semi-entscheidbar ist.

Aufgabe 75 Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen: ***mündlich***

(a) A ist semi-entscheidbar,

(b) $\hat{\chi}_A$ ist berechenbar,

(c) A ist Definitionsbereich einer berechenbaren partiellen Funktion f.

Aufgabe 76 ***mündlich***

Gelten folgende Aussagen für beliebige semi-entscheidbare Sprachen A und beliebige entscheidbare Sprachen B? Begründen Sie.

(a) $A \setminus B$ ist entscheidbar,

(b) $A \setminus B$ ist unentscheidbar,

(c) $A \setminus B$ ist semi-entscheidbar,

(d) $B \setminus A$ ist entscheidbar,

(e) $B \setminus A$ ist semi-entscheidbar.

Aufgabe 77 ***mündlich***

Sei Σ ein durch $<$ geordnetes Alphabet. Dann ist die *lexikographische Ordnung* $<$ auf Σ^* wie folgt definiert. Es ist $x < y$, falls gilt:

- $|x| < |y|$ oder
- $|x| = |y|$ und $\exists i \le |x| : x_1 \cdots x_{i-1} = y_1 \cdots y_{i-1}$ und $x_i < y_i$.

Eine Funktion $f : \Gamma^* \to \Sigma^*$ heißt *monoton*, falls $f(x) \le f(y)$ für alle Wörter $x \le y$ gilt. Eine Sprache A heißt *monoton aufzählbar*, falls A leer oder Bild einer monotonen berechenbaren Funktion ist. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(a) A ist entscheidbar,

(b) χ_A ist berechenbar,

(c) A ist monoton aufzählbar,

(d) A wird von einer DTM akzeptiert, die bei allen Eingaben hält.

(e) A wird von einer NTM akzeptiert, die bei allen Eingaben hält.

Aufgabe 78 ***mündlich***

Zeigen Sie, dass jede unendliche semi-entscheidbare Sprache A eine unendliche entscheidbare Teilmenge A' besitzt. (*Hinweis:* Konstruieren Sie eine monoton aufzählbare Teilmenge A'.)

Aufgabe 79 ***10 Punkte***

Für eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ bezeichne T_m^n die Menge der Satzformen bis zur Länge n, die sich in höchstens m Schritten aus dem Startsymbol S ableiten lassen.

(a) Geben Sie die Mengen T_m^6, $m \ge 0$, für die Typ-1 Grammatik

$$G = (\{A, B, C, D\}, \{a, b\}, P, A)$$

mit folgenden Regeln an:

$$\begin{array}{llllllll} P: & A \to BabC & (1) & Ba \to Cba, aBa & (2,3) & bCB \to aCb & (4) \\ & C \to b & (5) & bC \to BbCa, bCb & (6,7) & & \end{array}$$

(5 Punkte)

(b) Beschreiben Sie informell einen Algorithmus, der das Wortproblem für kontextsensitive Grammatiken löst. *(5 Punkte)*

Aufgabe 80 Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen: ***10 Punkte***

(a) A ist vom Typ 0,

(b) A wird von einer 1-NTM akzeptiert.

Aufgabe 81 ***10 Punkte***

Zeigen Sie, dass CSL eine echte Teilklasse von REC ist. (*Hinweis:* Betrachten Sie das Komplement D der Sprache $\{w \in \{0,1\}^+ \mid M_w \text{ ist eine 1-NTM, die die Eingabe } \hat{w} \text{ akzeptiert ohne dabei den Bereich der Eingabe zu verlassen}\}$.)