Übungsblatt 5

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 6. Juni 2013

Aufgabe 28 ***mündlich***

Zeigen Sie, dass sich der Abstand $d_{i+1}(s,t)$ zwischen s und t im Restnetzwerk N_{f_i} gegenüber $d_i(s,t)$ nicht unbedingt vergrößert, wenn auf den aktuellen Fluss f_{i-1} ein blockierender Fluss g_i des gesamten Restnetzwerks $N_{f_{i-1}}$ addiert wird.

Aufgabe 29 Sei $N = (V, E, s, t, c)$ ein Netzwerk. ***mündlich***

Aus dem Min-Cut-Max-Flow-Theorem folgt, dass ein Fluss f in N genau dann maximal ist, wenn es einen s-t-Schnitt S gibt, so dass f für jeden s-t-Pfad P in N mindestens eine Kante in $P \cap E^+(S)$ sättigt: $\exists$ s-t-Schnitt S $\forall$ s-t-Pfade P $\exists e \in P \cap E^+(S) : f(e) = c(e)$. Geben Sie eine entsprechende Charakterisierung für blockierende Flüsse g in N an. (*Hinweis:* Verändern Sie die Reihenfolge der Quantifizierungen.)

Aufgabe 30 Zeigen Sie. ***mündlich***

(a) Es gibt einen Algorithmus A, der ein maximales Matching in bipartiten Graphen in Zeit $O(\sqrt{n}m)$ berechnet. (*Hinweis:* Reduzieren Sie auf ein geeignetes Flussproblem.)

(b) Lässt sich die Laufzeit von A sogar durch $O(\sqrt{\mu(G)}m)$ abschätzen?

Aufgabe 31 ***mündlich***

(a) Beweisen Sie die Knotenversion des Satzes von Menger für Digraphen $G = (V, E)$: Im Fall $(s, t) \notin E$ ist die maximale Anzahl von *knotendisjunkten* s-t-Pfaden (d.h. je 2 solche Pfade haben außer s und t keinen gemeinsamen Knoten) gleich der minimalen Größe einer Knotenmenge V', die t *von* s *trennt* (d.h. $V' \subseteq V \setminus \{s, t\}$ und es gibt keinen Weg von s nach t in $G - V'$).

Hinweis: Beweisen Sie ein Min-Cut-Max-Flow-Theorem für Netzwerke mit Kapazitätsschranken auf allen Knoten.

(b) Beweisen Sie einen entsprechenden Satz für Graphen.

(c) Finden Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, der für einen Digraphen $G = (V, E)$ und zwei Knoten $s, t \in V$ mit $(s, t) \notin E$ eine Menge A von knotendisjunkten s-t-Pfaden und eine t von s trennende Knotenmenge V' mit $\|A\| = \|V'\|$ berechnet.

(d) Finden Sie entsprechende Algorithmen für die anderen 3 Versionen des Satzes von Menger (siehe Teilaufgabe (b) und Aufgabe 18).

Aufgabe 32 ***mündlich***

Die *Zusammenhangszahl* $\kappa(G)$ eines Graphen G ist die größte Zahl $k < n$, so dass $G - V'$ für jede Menge V' von $k - 1$ Knoten zusammenhängend ist. G heißt k-*fach zusammenhängend*, falls $\kappa(G) \geq k$ ist.

(a) Beweisen Sie den Satz von Whitney: G ist genau dann k-*fach zusammenhängend*, wenn je zwei Knoten in G durch mindestens k knotendisjunkte Pfade verbunden sind.

(b) Zeigen Sie, dass $\kappa(G) \leq 2m/n$ ist.

(c) Finden Sie einen Algorithmus, der $\kappa(G)$ in Zeit $O(\sqrt{n^5}m)$ berechnet.

(d) Verbessern Sie die Laufzeit auf $O(\sqrt{n}m^2)$. *Hinweis:* Teilaufgabe (b).

Aufgabe 33 ***10 Punkte***

Gegeben sind k Arbeiter $A_1, \dots, A_k$ und ℓ Maschinen $M_1, \dots, M_\ell$ sowie eine Menge $E \subseteq \{1, \dots, k\} \times \{1, \dots, \ell\}$ von Jobs.

(a) Zeigen Sie, dass jeder bipartite Graph $G = (V_1, V_2, E)$ ein Matching M besitzt, in dem kein Knoten u vom Grad $\deg(u) = \Delta(G)$ frei bleibt. (*Hinweis:* Konstruieren Sie M aus 2 Matchings M_i $(i = 1, 2)$, die keinen Knoten $u \in V_i$ vom Grad $\deg(u) = \Delta(G)$ frei lassen. Bei der Konstruktion von M_i können Sie sich an Aufgabe 10 orientieren.)

(b) Bestimmen Sie die Zeit, die zur Erledigung aller Jobs in E benötigt wird, falls jeder Job $(i, j) \in E$ in einer Zeiteinheit und zwar nur von Arbeiter A_i an Maschine M_j erledigt werden kann und jeder Arbeiter und jede Maschine in jeder Zeiteinheit maximal einen Job übernehmen kann. *Hinweis:* Teilaufgabe (a).

(c) Finden Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, der einen Zeitplan zur Erledigung aller Jobs in minimaler Zeit erstellt.