Übungsblatt 3

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 9. Mai 2013

Aufgabe 15 ***mündlich***

Entwerfen Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, der für ein gegebenes Netzwerk N und einen maximalen Fluss f eine möglichst kleine Kantenmenge M findet, so dass sich f vergrößern lässt, falls man die Kapazitäten dieser Kanten erhöht.

Aufgabe 16 Sei $G = (V, E)$ ein azyklischer Digraph. ***mündlich***

(a) Entwerfen Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, der für G eine möglichst kleine Menge von disjunkten Pfaden bestimmt, die alle Knoten abdeckt.

Hinweis: Betrachten Sie den bipartiten Graphen G' mit $n+n$ Knoten, dessen $(n \times n)$-Adjazenzmatrix A' mit der Adjazenzmatrix A von G übereinstimmt, und ergänzen Sie G' zu einem geeigneten Netzwerk N mit $2n + 2$ Knoten, so dass der maximale Fluss in N die Größe $n - p$ hat. Dabei ist p die minimale Anzahl von disjunkten Pfaden, die alle Knoten überdecken.

(b) Lösen Sie Teilaufgabe (a) für den Fall, dass die berechneten Pfade nicht disjunkt sein müssen.

Hinweis: Modifizieren Sie das Netzwerk N in Teilaufgabe (a) so, dass der minimale Fluss die Größe p' hat, wobei p' die minimale Anzahl von Pfaden ist, die alle Knoten überdecken.

(c) Zwei Knoten $u, v \in V$ heißen nebenläufig (engl. *concurrent*), falls kein Pfad von u nach v und kein Pfad von v nach u existiert. Zeigen Sie, dass die maximale Größe einer Menge von nebenläufigen Knoten in G gleich p' ist (Satz von Dilworth).

(d) Was ändert sich in den Teilaufgaben (a) bis (c), wenn G nicht azyklisch ist?

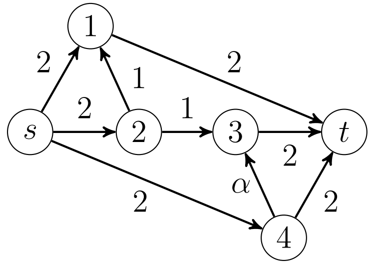
Aufgabe 17 ***mündlich***

(a) Passen Sie den Algorithmus von Ford-Fulkerson für den Fall an, dass das Netzwerk nicht nur eine Quelle und eine Senke enthält.

(b) Zeigen Sie, dass der Algorithmus von Ford-Fulkerson auch auf Netzwerken mit Kapazitäten in $\mathbb{Q}^+$ korrekt arbeitet. Welche Laufzeitschranke ergibt sich in diesem Fall?

(c) Arbeitet der Algorithmus von Ford-Fulkerson auch auf Netzwerken mit Kapazitäten in $\mathbb{R}^+$ korrekt?

Hinweis: Betrachten Sie die Folge der Zunahmepfade $P_1 = (s, 2, 3, t)$, $P_2 = (s, 4, 3, 2, 1, t)$, $P_3 = (s, 2, 3, 4, t)$, $P_4 = P_2$, $P_5 = (s, 1, 2, 3, t)$ in nebenstehendem Netzwerk, wobei die Kapazität α die Gleichung $\alpha^2 + \alpha = 1$ löst.



Aufgabe 18 ***mündlich***

(a) Beweisen Sie den Satz von Menger: In jedem Graphen $G = (V, E)$ ist die maximale Anzahl kantendisjunkter Wege zwischen 2 Knoten s und t gleich der Größe einer minimalen Kantenmenge $E' \subseteq E$, die s und t trennt (d.h. es gibt keinen Weg zwischen s und t in $(V, E - E')$).

(b) Beweisen Sie einen entsprechenden Satz für Digraphen.

Aufgabe 19 ***10 Punkte***

(a) Seien $A = \{A_1, \dots, A_k\}$ und $B = \{B_1, \dots, B_k\}$ Partitionen einer n-elementigen Menge V. Entwerfen Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, der eine k-elementige Teilmenge $R \subseteq V$ berechnet, die sowohl ein Repräsentantensystem für A als auch für B ist. Falls eine solche Menge nicht existiert, soll Ihr Algorithmus ein leicht zu verifizierendes Zertifikat für ihre Nichtexistenz ausgeben.

(b) Lässt sich Ihr Algorithmus auf den Fall von mehr als zwei Partitionen bzw. auf den Fall, dass die „Partitionsmengen“ die Menge V nur überdecken (aber nicht paarweise disjunkt sind), verallgemeinern?