Gewöhnliche Differentialgleichungen und Anfangsgründe der Variationsrechnung

Sommersemester 1997

Michael Wolff

§ 1 Grundbegriffe und Beispiele

§ 2 Einige elementare Lösungsmethoden für gewöhnliche Differentialgleichungen

§ 3 Existenz- und Einzigkeitssätze

(Die Sätze von Picard / Lindelöf, Peano, Cauchy)

§ 4 Fortsetzbarkeit von Lösungen zu Anfangswertaufgaben

§ 5 Abhängigkeit der Lösungen von Parametern

§ 6 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

§ 7 Differentialgleichungen höherer Ordnung

§ 8 Randwertaufgaben für gewöhnliche Differentialgleichungen

§ 9 Anfangsgründe der klassischen Variationsrechnung

Vielen Dank den StudentInnen Karina Bartusch und Paul Berthold für ihre aufmerksame Durchsicht und das Auffinden von Fehlern.

§ 1 Grundbegriffe und Beispiele

In der Natur und Gesellschaft laufen die unterschiedlichsten Prozesse ab, meist in Zeit und Raum, auf der Grundlage von physikalischen oder anderen Gesetzen. Die wesentlichen Größen dieser Prozesse werden mathematisch durch Funktionen dargestellt und sind durch Gleichungen miteinander verknüpft. In der Mehrzahl der Fälle enthalten diese Gleichungen auch die Ableitungen der gesuchten Funktionen.

Definition 1: Seien $E \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ $(n\in\mathbb{N})$ ein Gebiet (:= eine offene zusammenhängende Menge) und $f : E \to \mathbb{R}^n$. Dann heißt

(1.1) $\qquad x' = f(t, x)$

eine **gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung in Normalform**.

Eine differenzierbare Funktion $u : J \to \mathbb{R}^n$ heißt **Lösung** (oder auch Integral) der Differentialgleichung (1.1), falls

$J\subset\mathbb{R}$ ist ein Intervall positiver Länge,

$\forall t\in J$: $\quad (t, u(t)) \in E,\ u'(t) = f(t, u(t))$.

Sei außerdem $(t_0, x_0)\in E$ gegeben, so bezeichnen wir mit

(1.2) $\qquad x' = f(t, x),\quad x(t_0) = x_0$.

die **Anfangswertaufgabe** (auch Cauchy-Problem) zur Differentialgleichung (1.1).

Eine Lösung der Differentialgleichung (1.1) heißt Lösung der Anfagswertaufgabe (1.2), falls sie zusätzlich der Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$ genügt.

Bemerkungen 2:

(i) Im Falle von $n > 1$ wird auch von einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen gesprochen, im Gegensatz zur skalaren Gleichung mit $n = 1$. Bei den grundlegenden theoretischen Untersuchungen (Existenz, Einzigkeit) sind die Unterschiede zwischen Systemen und skalaren Gleichungen meist nicht groß. Beim praktischen Auffinden von Lösungen gibt es beträchtliche Unterschiede.

Manchmal ist auch die vektorielle Schreibweise $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $f = (f_1, f_2, ..., f_n)$ angebracht. Die Anfangsbedingung in (1.2) lautet dann $x_j(t_0) = x_{j0}$, $j = 1, ..., n$.

(ii) Die Differentialgleichung (1.1) heißt **gewöhnlich**, da nur Ableitungen nach einer Variablen vorkommen. Sonst wird von **partiellen** Differentialgleichungen gesprochen, deren Theorie wesentlich komplexer ist.

Die Differentialgleichung (1.1) heißt **erster Ordnung**, da nur erste Ableitungen der gesuchten Funktion auftreten. (Später werden wir auch Gleichungen höherer Ordnung betrachten - diese lassen sich auf Systeme 1. Ordnung zurückführen)

(iii) Wir haben in der Definition 1 die sogenannte Normalform definiert, bei der die Gleichung bereits nach der (den) höchsten Ableitung(en) aufgelöst ist.

Es kann aber auch vorkommen, daß die Differentialgleichung **implizit** gegeben ist durch

(1.3) $\qquad F(t, x, x', x'', ..., x^{(s)}) = 0$.

Das ist eine GDG oder auch ein System von GDG der Ordnung s in allgemeiner Darstellung (oder impliziter Form).

(iv) Die Funktion f in (1.1) wird meist als stetig vorausgesetzt; ebenso werden wir uns meist auf relle Größen beschränken. Natürlich wäre es auch möglich, Differentialgleichungen für komplexe Funktionen, die von einer rellen Variablen abhängen, zu studieren. Hierbei könnten wir die komplexen Größen in Real- und Imaginärteil aufspalten und würden ein äquivalentes System von GDG für reellwertige Funktionen erhalten.

Eine andere Qualität stellen Differentialgleichungen für Funktionen mit Werten in (unendlich-dimensionalen) Banach-Räumen sowie GDG von komplexen Funktionen, die von komplexen Argumenten abhängen, dar.
(v) Anstelle der Anfangsbedingung (1.2) wird bei manchen Aufgaben auch die Erfüllung anderer Bedingungen, z.B. Randbedingungen, gefordert. Damit befassen wir uns im hinteren Teil dieser Vorlesung.

Beispiele
1) Sei $f \in C(\mathbb{R})$. Betrachten die uns aus Analysis I bekannte Situation
(1.4) $\quad x' = f(t).$
Jede Lösung x von (1.4) ist also Stammfunktion von f. Nach dem Hauptsatz der Differential-Integralrechnung folgt dann, daß mit

$$u(t) := \int_0^t f(s)\,ds + c \qquad \text{und} \quad c \in \mathbb{R}$$

die Menge der Lösungen für (1.4) ausgeschöpft ist.
Stellen wir zusätzlich die Anfangsbedingung
(1.5) $\quad x(t_0) = x_0 \qquad$ mit $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$, so ist

$$u(t) := \int_{t_0}^t f(s)\,ds + x_0$$

die einzige Lösung der Cauchy-Aufgabe (1.4), (1.5).
Geometrisch bedeutet dies, daß durch jeden Punkt (t_0, x_0) der Ebene genau eine Lösungskurve der Differentialgleichung (1.4) geht.

2) (**Radioaktiver Zerfall**) Die Masse der radioaktiven Substanz, die in einer gewissen Zeitspanne zerfällt, ist proportional der vorhandenen Masse.
Sei $x(t)$ die Masse zum Zeitpunkt t, betrachten den Zerfall im Zeitintervall $(t, t + h)$.
Nach dem Gesetz des radioaktiven Zerfalls schreiben wir die Bilanz:
(1.6) $\quad x(t + h) - x(t) = - k\,(x(t) + \alpha)\,h$
Hierbei ist $k > 0$ der Proportionalitätsfaktor, da sich die Masse verringert, wird das negative Vorzeichen genommen. Die physikalische Annahme geht nun davon aus, daß mit h die Größe α "schneller" als h gegen null geht (d.h., $\alpha = o(h)$).
Somit erhalten wir aus (1.6)

$$\frac{x(t + h) - x(t)}{h} = - k\,(x(t) + \alpha)$$

und im Grenzübergang für $h \to 0$ die den Kernzerfall determinierende Differentialgleichung
(1.7) $\quad x' = - k\,x.$ "(skalare) lineare (homogene) GDG 1. Ordnung"
Dann gilt: Die Lösungen von (1.7) sind genau die Funktionen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$u(t) := c\,e^{-kt}$, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine willkürliche Konstante ist.
Das Einsetzen der Funktion in (1.7) zeigt sofort, daß es sich um Lösungen handelt.
Sei nun eine Funktion $g \in C^1(\mathbb{R})$ eine Lösung von (1.7). Dann folgt mit Hilfe von (1.7) für die Funktion $h(t) := g(t)\,e^{kt}$

$$h'(t) = g'(t)\,e^{kt} + g(t)\,k\,e^{kt} = - k\,g(t)\,e^{kt} + g(t)\,k\,e^{kt} = 0.$$

Also ist $h(t) = \text{const} = c$ und $g(t) = c\,e^{-kt}$.
Wird noch die Anfangsbedingung
(1.8) $\quad x(0) = m_0\ (> 0)$ $\qquad$ (Anfangsmasse zum Zeitpunkt $t = 0$)
vorgegeben, so ist $u(t) := m_0 e^{-kt}$ für $t \in [0, +\infty)$ die einzige Lösung der Cauchy-Aufgabe (1.7), (1.8).
Die Zerfallskonstante k läßt sich bestimmen, wenn z.B. experimentell die Zeit festgestellt wird, in der ein bestimmter Teil der Ausgangsmasse zerfällt.

Es sei z.B. bekannt, daß nach 30 Tagen die Hälfte der Ausgangsmasse zerfällt. Die "Halbwertzeit" ist also gleich 30 Tage. Somit gilt

$$\frac{1}{2} m_0 = m_0 e^{-k\,30}, \qquad \text{folglich ist} \qquad k = \frac{1}{30} \ln(2) \approx 0{,}0231 \quad [\text{ Einheiten beachten!}]$$

Das Gesetz für dieses Material lautet also

$$x(t) = m_0 e^{-0{,}0231\, t}.$$

Nach wieviel Tagen bleibt nur noch ein Prozent der Ausgangsmasse übrig?
(**Ü**) Nach rund 100 Tagen.

3) (**Wachstumsprozesse**) Wird angenommen, daß z.B. eine Bakterienkultur ideale Wachstumsbedingungen vorfindet, daß der Zuwachs proportional der vorhandenen Population ist, dann erhalten wir in ähnlicher Argumentation ebenfalls eine lineare GDG

(1.9) $$x' = \gamma x,$$

diesmal allerdings mit $\gamma > 0$ ("Vermehrungsrate"). Deren Lösung ist $c\, e^{\gamma t}$.
Vielfach ist dieses Modell nicht hinreichend realistisch, da z.B. Nahrungsmangel die Entwicklung bremst. Die Annahme, daß die Anzahl der Todesfälle dem Quadrat der Anzahl der vorhandenen Bakterien proportional ist, führt auf die

logistische Gleichung

(1.10) $$x' = \gamma x - \tau x^2, \qquad \tau > 0.$$

Stellen wir als Anfangsbedingung

(1.11) $$x(0) = x_0 \ (> 0), \qquad \text{(Anzahl zu Beginn)},$$

so ist die einzige Lösung (Beweis später) der Cauchy-Aufgabe (1.10), (1.11) die logistische Funktion

(1.12) $$x(t) = \frac{\gamma}{\tau + \left(\frac{\gamma}{x_0} - \tau\right) e^{-\gamma t}}.$$

Für $t \to \infty$ strebt die Population dem Grenzwert $\frac{\gamma}{\tau}$ zu. Die Art, in der sich x diesem Wert annähert, wird von der Konstellation zwischen γ, τ und x_0 bestimmt.
($\rightarrow$ Heuser, Analysis I, GDG)

4) (**Mathematisches Pendel**) Ein nichtdehnbarer Faden der Länge r sei an einem Ende an einem fixierten Punkt A befestigt, am anderen sei eine Punktmasse m angehängt. Diese bewege sich auf dem Kreisbogen mit dem Radius r unter dem Einfluß der Schwerkraft und bleibe in einer Ebene.
Der Auslenkwinkel des Pendels sei mit φ bezeichnet, der vom Pendel zurückgelegte Weg s, gemessen von der "Ruhelage" $\varphi = 0$, ergibt sich dann zu $s = r\varphi$.
Von der senkrecht wirkenden Schwerkraft mg trägt nur der tangentiale Anteil, nämlich $mg \sin(\varphi)$, zur Bewegung bei. Der Luftwiderstand und die Masse des Fadens werden vernachlässigt. Nach dem Newtonschen Grundgesetz gilt dann

$$m s'' = - mg \sin(\varphi)$$

("-", da die Kraft der Beschleunigung entgegengesetzt ist), also umgestellt

(1.13) $$\varphi'' = - \frac{g}{r} \sin(\varphi).$$

Es liegt also eine GDG 2. Ordnung vor, diese ist in der gesuchten Funktion nichtlinear. Führen wir die neue Funktion $\omega := \varphi'$ ein (Winkelgeschwindigkeit), so erhalten wir ein zu (1.13) äquivalentes System GDG 1. Ordnung

(1.14) $$\varphi' = \omega$$

$$\omega' = - \frac{g}{r} \sin(\varphi).$$

Die zugehörigen Anfangsbedingungen sind

(1.15) $\varphi(0) = \varphi_0$, "Anfangsauslenkung"

$\omega(0) = \omega_0$, "Anfangswinkelgeschwindigkeit".

Aufgrund der Nichtlinearität können wir für dieses System die Lösung (Existenz wird später geklärt) nicht in geschlossener Form hinschreiben.

Oft interessieren nur Schwingungen mit kleiner Auslenkung.

Die Näherung $\varphi \approx \sin(\varphi)$ führt zu den linearisierten Schwingungsgleichungen:

(1.16) $\varphi' = \omega$

$\omega' = -\frac{g}{r}\varphi$,

zuzüglich der selben Anfangsbedingungen (1.15).

Wie wir später sehen werden, ist die einzige Lösung der Aufgabe (1.16), (1.15):

(1.17) $\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\sqrt{\lambda}\, t) + \frac{\omega_0}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda}\, t)$

$\omega(t) = -\varphi_0 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}\, t) + \omega_0 \cos(\sqrt{\lambda}\, t)$,

wobei wir $\lambda := \frac{g}{r}$ gesetzt haben. Der (idealisierte) Schwingungsvorgang des mathematischen Pendels (was auch eine Idealisierung ist), stellt also eine harmonische Schwingung dar, mit der Periode $T = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g}}$, die nicht von der schwingenden Masse m abhängt.

Wird T gemessen, so läßt sich die Schwerebeschleunigung g bestimmen, wobei wegen der Linearisierung ein (bei kleinen Amplituden kleiner) Fehler begangen wird.

(Für weitere Details $\rightarrow$ Heuser, GDG; Walter)

Für weitere Beispiele mit physikalischem, technischem usw. Hintergrund verweisen wir auf das Buch von Collatz "Differentialgleichungen" sowie auf die Bücher von Heuser, Walter, Braun.

Wir betrachten noch Beispiele, die die **mathematischen Probleme** bei der Lösung GDG deutlich machen.

Für Anfangswertaufgaben der Form (1.2) mit stetigem f können wir - wie sich später herausstellt, wenigstens lokale Existenz erwarten, d.h., die Lösung existiert in einer Umgebung von t_0. Bei GDG in allgemeinerer Form brauchen keine Lösungen zu existieren, wie das Beispiel

$\exp(x') = 0$

zeigt. Für die GDG

$x'^2 + x^2 = 0$

existiert nur die (reelle) Lösung $x = 0$, ohne daß eine Anfangsbedingung gegeben ist. Die Anfangswertaufgabe wäre für $x(t_0) \neq 0$ nicht lösbar.

Betrachten die AWA

(1.18) $x' = x^2$, $x(0) = x_0$.

Für $x_0 = 0$ existiert die einzige Lösung $x(t) := 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$.

Sei $x_0 > 0$, dann existiert die einzige Lösung

$x(t) := (x_0^{-1} - t)^{-1}$

nur für $t < x_0^{-1}$, es liegt ein sogenanntes "blow up" vor. Selbst eine "gute" Funktion $f(t, x) = x^2$ in (1.1) garantiert nicht die Existenz einer Lösung für alle Zeiten.

Betrachten nun die AWA

(1.19) $x' = \sqrt{|x|}$, $x(0) = 0$.

Neben der trivialen Lösung $x = 0$ für alle t existiert noch eine zweiparametrige Schar von Lösungen, die durch

(1.20) $$x(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(t-c)^2, & \text{falls } t \le c \\ 0, & \text{falls } c \le t \le d \\ \frac{1}{4}(t-d)^2, & \text{falls } t \ge d \end{cases}$$

beschrieben werden, wobei $c \le 0 \le d$ beliebige Konstanten sind.
Die Stetigkeit von f in (1.1) reicht somit zur Garantie der Einzigkeit nicht aus.
Noch einige Bemerkungen zur **geometrischen Interpretation** einer GDG.
Für den Fall $n = 1$ ($n > 1$ analog) sagt die Gleichung (1.1), daß in jedem Punkt aus $E \subset \mathbb{R}^2$ der Anstieg $x' = f(t, x)$ vorgegeben ist.
Eine Kurve in E mit $f(t, x) = c := \text{const.}$, d.h., eine Kurve von Punkten, auf denen der gleiche Anstieg vorgeschrieben ist, heißt **Isokline**.
Eine GDG zu lösen bedeutet also, die Kurven (in E) zu finden, die in allen ihren Punkten den vorgeschriebenen Anstieg der Tangente besitzen. Betrachten z.B.
(1.21) $x' = t^2 + x^2$.
Die zugehörigen Isoklinen sind somit konzentrische Kreise um $(0, 0)$, auf denen der Anstieg gleich dem Quadrat des Radius ist. Wird noch die Anfangsbedingung
(1.22) $x(0) = 0$
gegeben, so können wir die (wie später gezeigt wird) einzige Lösungskurve durch $(0, 0)$ näherungsweise zeichnen, in dem wir wie folgt vorgehen:
Wir zeichnen möglichst viele (bessere Näherung!) Isoklinen, also hier konzentrische Kreise. Wir starten im Punkt $(0, 0)$, dort ist der Anstieg gleich null. Also gehen wir horizontal nach rechts (nach links ist auch möglich), bis der nächste Kreis geschnitten wird. Vom Schnittpunkt aus gehen wir mit dem neuen Anstieg weiter bis zum nächsten Kreis, usw.
Dieses Verfahren stammt von Euler und wird Euler-Cauchysches Polygonzugverfahren genannt.
Es besitzt auch theoretische Bedeutung für den Beweis des Existenzsatzes von Peano ($\rightarrow$ § 3).
Zu weitergehenden geometrischen Aspekten in der Theorie der GDG siehe etwa Walter, Bröcker "Analysis III", Jänich "Analysis für Physiker und Ingenieure", Arnold.

§ 2 Einige elementare Lösungsmethoden von GDG

In diesem Paragraphen wollen wir einige technische Fertigkeiten beim Lösen von GDG erwerben, bevor im nächsten Paragraphen die Fragen von Existenz und Einzigkeit für Anfangswertaufgaben zu GDG ausführlich diskutiert werden.
Meist werden wir es jetzt mit skalaren DG zu tun haben; lineare Systeme und Gleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten werden in den §§ 6 und 7 behandelt.

Trennung der Veränderlichen

Seien $E := D \times \Omega$, $D, \Omega \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle und sei $f(t, x) := g(t)\, h(x)$ mit $g \in C(D)$, $h \in C(\Omega)$. Dann heißt die GDG 1. Ordnung
(2.1) $x' = f(t, x) = g(t)\, h(x)$
eine **GDG mit trennbaren Variablen**.

Satz 1: (i) Sei $h(x) \neq 0$ auf Ω und seien H eine Stammfunktion zu $\frac{1}{h}$ auf Ω und G eine Stammfunktion zu g auf D. Sei weiter $(t_0, x_0) \in E$. Dann wird durch

(2.2) $\quad H(u(t)) = G(t) + H(x_0) - G(t_0)$

eine Lösung $u \in C^1(J)$ der Anfangswertaufgabe

(2.3) $\quad x' = g(t)\, h(x), \qquad x(t_0) = x_0$

implizit definiert. Das Intervall J mit $t_0 \in J$ hängt i.a. von (t_0, x_0) ab.
Auf J ist die Lösung u einzig.
(ii) Sei $x_1 \in \Omega$ mit $h(x_1) = 0$. Dann ist $x(t) := x_1$ für $t \in D$ eine Lösung von (2.1).
Zusatz: Es existiere ein $\alpha > 0$ so, daß gilt $h(x) \neq 0$ auf $x_1 < x \leq x_1 + \alpha$
(bzw. auf $x_1 - \alpha \leq x < x_1$). Falls dann das uneigentliche Integral

(2.4) $\quad \int_{x_1}^{x_1+\alpha} \frac{dx}{h(x)}$ $\qquad$ (bzw. $\int_{x_1-\alpha}^{x_1} \frac{dx}{h(x)}$)

divergiert, so gibt es keine Lösung der AWA (2.3), die von oben (bzw. von unten) in die Gerade $x = x_1$ einmündet.

Beweis: (i) Die Funktion $u \in C^1(J)$ erfülle (2.2) und genüge der Anfangsbedingung in (2.3). Durch Differenzieren von (2.2) folgt, daß u auch der DG (2.1) genügt.
Zeigen, daß durch (2.2) wirklich eine Lösung implizit definiert wird.
Betrachten die Gleichung

(2.5) $\quad F(t, u) := H(u) - G(t) - H(x_0) + G(t_0) = 0 \quad$ für $(t, u) \in E$.

Offenbar gilt $F(t_0, x_0) = 0$. Weiter gilt: $\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{1}{h(u)} \neq 0 \quad$ für $u \in \Omega$.

Somit ist der Satz über implizite Funktionen anwendbar und es existieren ein $J \ni t_0$ und (genau) eine Funktion $u \in C^1(J)$ (da G stetig differenzierbar), die (2.5) erfüllt.

Sei $v \in C^1(J)$ eine weitere Lösung von (2.3). Dann folgt sofort $\quad \frac{v'(t)}{h(v(t))} = g(t)$

und durch Integration von t_0 bis t erhalten wir

$$H(v(t)) - H(x_0) = G(t) - G(t_0),$$

also die Beziehung (2.2) für die Funktion v. Der Satz über implizite Funktionen sagt dann, daß $v = u$.
(ii) Die Probe zeigt, daß $x(t) := x_1$ für $t \in D$ eine Lösung von (2.1) ist.
Wir nehmen nun an, es gäbe eine weitere Lösung v zu (2.3), die nicht identisch x_1 ist. Betrachten den Fall, daß "v von oben rechts" in $x(t) := x_1$ einmündet.

M.a.W., es gibt ein $\bar{t} \geq t_0$ mit $x_1 < v(\bar{t}) := \bar{x} \leq x_1 + \alpha$. Dann gilt

(*) $\quad \int_{\bar{x}}^{v(t)} \frac{ds}{h(s)} = \int_{\bar{t}}^{t} g(r)\, dr \qquad$ solange $\qquad x_1 < v(t) \leq x_1 + \alpha.$

Sei $t_1 := \sup \{ t \in [t_0, \bar{t}] : v(t) = x_1 \}$. Lassen in (*) t gegen t_1 gehen. Während das rechte Integral konvergiert, divergiert das linke nach Voraussetzung. Also war die Annahme falsch und es gibt keine solche Funktion v.

Satz 1 gibt uns eine **praktische Lösungsstrategie** in die Hand.
Zuerst bestimmen wir alle Nullstellen der Funktion h und erhalten somit konstante Lösungen der DG (2.1), die für alle $t \in D$ existieren.

Danach schreiben wir die Ableitung x' als Differentialquotient $\frac{dx}{dt}$ und trennen die Variablen gemäß

$$\frac{dx}{h(x)} = g(t)\,dt$$

und integrieren unbestimmt

$$\int \frac{dx}{h(x)} = \int g(t)\,dt + c \tag{2.6}$$

oder auch bestimmt, wenn uns eine AB $x(t_0) = x_0$ gegeben ist

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{h(x)} = \int_{t_0}^{t} g(t)\,dt \tag{2.7}$$

Wir versuchen dann, (2.6) oder (2.7) nach $x = x(t)$ aufzulösen. Manchmal ist das nicht elementar möglich, und es gelingt noch die Auflösung nach $t = t(x)$. Oder man muß sich mit numerischen Verfahren begnügen.

Beispiele 2: (i) Wir betrachten die DG mit trennbaren Variablen

$$x' = -\,t\,x^2 \qquad \text{mit } D, \Omega := \mathbb{R}. \tag{2.8}$$

Offenbar ist $x(t) := 0$ für $t\in\mathbb{R}$ eine Lösung, nach Satz 1 (ii) ist sie einzig.
Sei also $x \neq 0$, wir erhalten aus (2.8)

$$\frac{dx}{x^2} = -t\,dt \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{x} = -\frac{t^2}{2} + c' \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{c + t^2} \qquad c\in\mathbb{R}.$$

Wir erhalten also die sogenannte **allgemeine Lösung** der DG (2.8)

$$u(t) := \frac{2}{c + t^2} \quad \text{mit } c\in\mathbb{R} \text{ als frei wählbarer Konstanten.} \tag{2.9}$$

Für jedes $c\in\mathbb{R}$ gibt es Lösungen (auch Integralkurven genannt), allerdings existieren für $c \le 0$ die Lösungen nicht für alle $t\in\mathbb{R}$.
Die Lösung $x(t) := 0$ für $t\in\mathbb{R}$ ist *nicht* in der Darstellung (2.9) enthalten.
Betrachten nun die zugehörige AWA mit $x(t_0) = x_0$, wobei $(t_0, x_0)\in\mathbb{R}^2$.
Falls $x_0 = 0$, so ist offenbar $x(t) := 0$ für $t\in\mathbb{R}$ die Lösung, die durch (t_0, x_0) läuft.
Falls $x_0 \neq 0$, so können wir aus (2.9) das zugehörige c eliminieren und erhalten als Lösung der AWA

$$u(t) := \frac{2}{c_0 + t^2} \quad \text{mit } c_0 := \frac{2 - x_0 t_0^2}{x_0}.$$

In Abhängigkeit von t_0 und x_0 existiert die Lösung auf unterschiedlichen "maximalen" Intervallen.

Falls $0 < x_0 < \frac{2}{t_0^2}$ so existiert die Lösung durch (t_0, x_0) für $t\in\mathbb{R}$.

Falls $x_0 t_0^2 = 2$, so existiert die Lösung durch (t_0, x_0) für $t > 0$ für $t_0 > 0$ und für $t < 0$ für $t_0 < 0$.

Falls $x_0 t_0^2 > 2$, so existiert die Lösung durch (t_0, x_0) für $|t| > \sqrt{\frac{x_0 t_0^2 - 2}{x_0}}$.

Falls $x_0 < 0$, so existiert die Lösung durch (t_0, x_0) für $|t| < \sqrt{\frac{x_0 t_0^2 - 2}{x_0}}$.

Dieses einfache Beispiel zeigt schon, wie kompliziert die Verhältnisse sein können: Durch jeden Punkt der Ebene verläuft genau eine Lösungskurve der DG, die größtmöglichen Existenzintervalle hängen aber von den Anfangswerten ab.

(ii) Wir betrachten die DG

(2.10) $x' = \cos(t)\,(1 + x^2)$ mit $D, \Omega := \mathbb{R}$.

Wir erhalten ohne Einschränkungen

$$\frac{dx}{1 + x^2} = \cos(t)\,dt \quad \Rightarrow \quad \arctan(x) = \sin(t) + c$$

Somit lautet die allgemeine Lösung der DG (2.7)

(2.11) $u(t) := \tan(\sin(t) + c)$ mit $c \in \mathbb{R}$ als frei wählbarer Konstanten.

Für jedes c gibt es Lösungen, i.a. existieren die Lösungen nicht für alle $t \in \mathbb{R}$.

Betrachten für die DG (2.7) die Anfangsbedingung $x(0) = 0$,

dann folgt aus (2.10) $c = 0$ und die Lösung der AWA lautet

(2.12) $u(t) := \tan(\sin(t))$ für $t \in \mathbb{R}$.

Wählen wir als Anfangsbedingung $x(0) = 1$, so erhalten wir als Lösung der AWA

(2.13) $u(t) := \tan(\sin(t) + \frac{\pi}{4})$ für $t \in]-\pi - \arcsin(\frac{\pi}{4}); \arcsin(\frac{\pi}{4})[$.

Die Lösung (2.13) "lebt" also nur auf einem endlichen Intervall.

(iii) Logistische Gleichung

Wir hatten bereits diese DG formuliert als

(1.10) $x' = \gamma x - \tau x^2, \quad \gamma, \tau > 0.$

mit der Anfangsbedingung

(1.11) $x(0) = x_0, \quad (x_0 > 0$ aus Aufgabenstellung)

Die DG (1.10) besitzt trennbare Variablen mit $g(t) := 1$, $h(x) := \gamma x - \tau x^2$.

Die Funktion h besitzt die Nullstellen $x := 0$ und $x := \frac{\gamma}{\tau}$, diese konstanten Funktionen lösen die DG (1.10), aber nur $x := \frac{\gamma}{\tau}$ ist Lösung der AWA, falls $x_0 = \frac{\gamma}{\tau}$.

Diese konstante Lösung ist nach Satz 1 (ii) einzig (**Ü**). Dann ist der Wachstumsprozeß bereits im stationären Gleichgewicht.

Seien also $0 < x_0$ und $x_0 \neq \frac{\gamma}{\tau}$. Wir erhalten aus (1.10)

(2.14) $$\frac{dx}{\gamma x - \tau x^2} = dt.$$

Wegen

$$\frac{1}{\gamma x - \tau x^2} = \frac{1}{\gamma}\frac{1}{x} + \frac{\tau}{\gamma}\frac{1}{\gamma - \tau x} \qquad \text{(Partialbruchzerlegung!)}$$

folgt durch Integration aus (2.14)

$$\frac{1}{\gamma}\ln(|x|) - \frac{1}{\gamma}\ln(|\gamma - \tau x|) = t + c, \qquad \text{hieraus}$$

$$\ln\left(\frac{x}{|\gamma - \tau x|}\right) = \gamma(t + c), \qquad \text{also}$$

(2.15) $$\frac{x}{|\gamma - \tau x|} = \bar{c}\, e^{\gamma t} \qquad \text{mit } \bar{c} := e^{\gamma c}.$$

Sei zuerst $0 < x_0 < \frac{\gamma}{\tau}$. Dann ergibt die AB (1.11) $\bar{c} = \frac{x_0}{\gamma - \tau x_0}$.

Dann folgt aus (2.15) durch Auflösen nach x:

(1.12) $$x(t) = \frac{\gamma}{\tau + \left(\frac{\gamma}{x_0} - \tau\right) e^{-\gamma t}} \qquad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

Für $x_0 > \frac{\gamma}{\tau}$ erhalten wir diesselbe Lösung (**Ü**).

(iv) Betrachten die AWA

(2.16) $x' = \frac{x - 1}{t^2 x^2}, \qquad x(1) = 2.$

Wählen D, $\Omega := \mathbb{R}_+^*$. Die konstante Lösung der DG $x := 1$ erfüllt nicht die AB, also dürfen wir $x \neq 1$ annehmen und erhalten

$$\frac{x^2\,dx}{x - 1} = \frac{dt}{t^2} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{x^2 - 1 + 1}{x - 1}\,dx = -\frac{1}{t} + c \quad \Rightarrow \quad \int \left(x + 1 + \frac{1}{x - 1}\right) dx = -\frac{1}{t} + c \;\Rightarrow$$

(2.17) $$\frac{x^2}{2} + x + \ln(|x - 1|) = -\frac{1}{t} + c.$$

Wir können aus (2.17) noch c bestimmen durch Anpassen der AB zu $c = 5$, aber nicht elementar nach x auflösen. Wollen wir uns nicht mit numerischer Berechnung einzelner Werte der Lösung zufrieden geben, können wir die Gleichung (2.17) nach t auflösen und erhalten

(2.18) $t(x) = \left(5 - \frac{x^2}{2} - x - \ln(x - 1)\right)^{-1}$ für $1 < x < x_1$.

Dabei ist x_1 die kleinste Nullstelle von $5 - \frac{x^2}{2} - x - \ln(x - 1)$, die 2 übertrifft.

Es gibt Typen von GD, die sich durch **geeignete Substitutionen** auf DG mit trennbaren Variablen zurückführen lassen.
Betrachten die GDG

(2.19) $x' = f(ax + bt + d)$ mit $a \neq 0$.

Wir substituieren

(2.20) $z := ax + bt + d$

und suchen die neue Funktion $z = z(t)$. Wir erhalten

$z' = ax' + b$ und somit $x' = \frac{z' - b}{a} = f(z)$, was zur neuen DG

(2.21) $z' = b + af(z)$

führt.
Diese DG (2.21) ist eine DG mit den trennbaren Variablen z und t, die wir mit den obigen Schritten lösen können (sofern wir die Stammfunktion berechnen können!)

Beispiel 3: (**Ü**) Betrachten die AWA

(2.22) $x' = (x + t)^2, \qquad (t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2.$

Ein weiterer Typ GDG, der sich durch geeignete Substitution auf eine DG mit trennbaren Varablen zurückführen läßt, ist die sogenannte **Ähnlichkeitsdifferentialgleichung** (auch Euler-homogene DG genannt)

(2.23) $x' = f\left(\frac{x}{t}\right)$ mit $t \neq 0$.

Die Substitution $z := \frac{x}{t}$ führt auf die Gleichung mit trennbaren Variablen

(2.24) $z' = \frac{f(z) - z}{t}.$

Beispiel 4: (**Ü**) Betrachten die AWA

(2.25) $x' = 1 + \frac{2x}{t}, \quad t \neq 0, \qquad x(1) = 1.$

Lineare DG 1. Ordnung
Wie schon angemerkt, betrachten wir in diesem § den *skalaren* Fall

(2.26) $x' = a(t)x + b(t)$.

Wir wählen $J \subset \mathbb{R}$ als nichtleeres Intervall und $\Omega := \mathbb{R}$. Außerdem sei bis auf ausdrücklichen Widerruf $a, b \in C(J)$.

Die lineare DG (2.26) nennen wir inhomogen, die zugehörige homogene DG lautet

(2.27) $x' = a(t)x$.

Aus den späteren Ergebnissen wird folgen, daß für beliebige Anfangswerte $(t_0, x_0) \in J \times \mathbb{R}$ die AWA für (2.26) genau eine Lösung auf J besitzt. Überdies läßt sich die allgemeine Lösung angeben.

Lösungsstrategie für die DG (2.26):

Wir lösen zuerst die homogene DG (2.27) - eine DG mit trennbaren Variablen - gemäß

$$\frac{dx}{x} = a(t) \qquad \Rightarrow \qquad \ln(|x|) = \int a(t)\,dt + c \qquad \Rightarrow \qquad |x| = e^c\, e^{\int a(t)\,dt}.$$

Die triviale Lösung $x := 0$ haben wir dabei schon vorher ausgesondert. Wir fassen nun e^c als neue Konstante auf und lassen das Vorzeichen von $|x|$ miteingehen, erhalten also als *allgemeine Lösung der linearen homogenen DG* (2.27)

(2.28) $$u(t) := c\, e^{\int a(t)\,dt} \qquad t \in J, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Für $c = 0$ ist natürlich die triviale Lösung in der allgemeinen enthalten. Aus der Einzigkeit (Satz 1) folgt, daß sich Lösungskurven nicht schneiden können, d.h., für Anfangswerte $x_0 \neq 0$ bleibt die zugehörige Lösung für alle Zeiten ungleich null.

Die (einzige) Lösung der AWA zu (2.27) lautet offenbar

(2.29) $$u(t) := x_0\, e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds} \qquad t \in J,$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen DG (2.26) bestimmen wir mit dem Ansatz der **Variation der Konstanten**:

(2.30) $$u(t) := c(t)\, e^{\int a(t)\,dt} \qquad t \in J.$$

Wir versuchen also, zu (2.26) eine Lösung zu finden, indem wir die ursprünglich feste Konstante c nun als von t abhängige Funktion ansehen.

Wir gehen mit (2.30) in (2.26) und erhalten

$$u'(t) = c'(t)\, e^{\int a(t)\,dt} + c(t)\, a(t)\, e^{\int a(t)\,dt} = a(t)\, c(t)\, e^{\int a(t)\,dt} + b(t) \qquad t \in J.$$

Davon bleibt eine einfache DG zur Bestimmung von c:

(2.31) $$c'(t) = e^{-\int a(t)\,dt}\, b(t) \qquad t \in J.$$

Somit erhalten wir:

(2.32) $$c(t) = c_1 + \int e^{-\int a(t)\,dt}\, b(t)\,dt \qquad t \in J, \quad \text{mit } c_1 \in \mathbb{R}.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DG (2.26) lautet also:

(2.33) $u(t) = c_1 e^{\int a(t)\,dt} + \int e^{-\int a(t)\,dt} b(t)\,dt\; e^{\int a(t)\,dt}$.

Der erste Teil in (2.33) ist die allgemeine Lösung der homogenen DG, der zweite Teil ist eine *partikuläre* Lösung der inhomogenen DG.

Ü: Die Lösung der AWA für die inhomogene DG ist ebenfalls einzig. (Die Differenz von zwei Lösungen der inhomogenen AWA erfüllt die homogene DG und hat den Anfangswert 0 ...)

Beispiele 5: (i) Gegeben sei die AWA:

(2.34) $x' = \frac{2x}{t} + 2t^3,\ t > 0, \qquad x(1) = 2.$

Bestimmen zuerst die allgemeine Lösung zur entsprechenden homgenen DG

$x' = \frac{2x}{t} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = \frac{2}{t} \quad \Rightarrow \quad \ln(|x|) = 2\ln(t) + c^* \ \Rightarrow$

(2.35) $u(t) := ct^2 \quad$ für $t > 0$.

Führen jetzt die Variation der Konstanten durch:

$c'(t)\,t^2 + c(t)\,2t = 2\,c(t)\,t + 2t^3, \quad$ also $\quad c'(t) = 2t \quad \Rightarrow \quad c(t) = t^2 + c_1.$

Somit lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen DG (2.34)

(2.36) $u(t) := c\,t^2 + t^4, \qquad c \in \mathbb{R}$. (Konstante umbenannt)

Die Konstante c wird jetzt aus der AB zu $c = 1$ bestimmt, also ist

(2.37) $u(t) = t^2 + t^4,\ t > 0$

die (einzige) Lösung der AWA (2.34).

Natürlich wäre es auch möglich, die Formel (2.32) zu verwenden und die Konstante aus der AB zu bestimmen.

(ii) Zur Übung seien empfohlen:

(2.38) $x' = -\tan(t)\,x + \sin(t), \qquad t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \qquad x(0) = 0.$

(2.39) $x' = \sin(t)\,x, \qquad x(1) = 1.$

Verschiedene Gleichungen lassen sich durch geeignete Substitutionen auf lineare zurückführen, so z.B. die **Bernoullische** DG:

(2.40) $x' = a(t)\,x + b(t)\,x^n \qquad (n \neq 0, 1) \qquad a, b \in C(J).$

Offenbar ist $x := 0$ eine Lösung von (2.40).

Wir substituieren für $x \neq 0$ mit $\qquad z := x^{1-n}.$ Somit erhalten wir

$z' = (1 - n)x'\,x^{-n}, \quad$ und es folgt aus (2.40)

(2.41) $z' = a(t)\,(1 - n)\,z + (1 - n)\,b(t),$

was eine lineare DG in z ist.

Beispiel 6: (**Ü**)

(2.42) $x' = -2x + x^2 e^t, \qquad x(0) = \frac{1}{2}.$

Weitere Beispiele für elementare Lösungsmethoden:

Betrachten die GDG 2. Ordnung:

(2.43) $x'' = f(t, x').$

Das ist für $z := x'$ eine GDG 1. Ordnung. Falls es uns gelingt, zu

$z' = f(t, z)$

eine Lösungschar $z(t) = x'(t) = \varphi(t, c_1)$ mit $c_1 \in \mathbb{R}$ zu finden, so brauchen wir nur noch zu integrieren und erhalten als allgemeine Lösung zu (2.43) die zweiparametrige Schar

(2.44) $u(t) := \int \varphi(t, c_1)\, dt + c_2,$

und die Konstanten können bei Vorliegen von zwei skalaren AB bestimmt werden.

Beispiel 7: (**Ü**)
(2.45) $x'' = \sqrt{1 + x'^2}, \qquad x(0) = 0, \qquad x'(0) = 0.$
(Lösung: $u(t) := \cosh(t) - 1$)

Sei die GDG 2. Ordnung
(2.46) $x'' = f(x)$
gegeben. Unter der Voraussetzung $x' \neq 0$ ist (2.46) äquivalent zu
$x'' x' = f(x) x' \quad \Leftrightarrow \quad [x'^2]' = 2 F'(x),$
wobei F eine Stammfunktion zu f ist. Also ist (2.46) äquivalent zu
(2.47) $x'^2 = 2 F(x) + c_1,$
woraus zwei Gleichungen mit trennbaren Variablen erhalten werden.
Manchmal ist es beim Lösen von AWA vorteilhafter, die Konstante c_1 "frühestmöglich" zu bestimmen.

Beispiel 8: (**Ü**)
(2.48) $x'' = - x, \qquad x(0) = 0, \qquad x'(0) = 1.$
(Lösung: $u(t) := \sin(t)$)

Eine wahre Fundgrube für alle möglichen Lösungsmethoden, Tricks, Hinweise etc ist das Buch von Kamke "Differentialgleichungen - Lösungsmethoden und Lösungen".

§ 3 Existenz- und Einzigkeitssätze

Der Existenzsatz von Picard / Lindelöf

In diesem Paragraphen untersuchen wir die Existenz und Einzigkeit von Lösungen zu GDG in Normalform im Sinne von Definition 1 aus § 1.
Seien $D \subset \mathbb{R}^m$ $(m \in \mathbb{N})$ eine nichtleere Menge und $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall positiver Länge. Wir bezeichnen

$C(D; \mathbb{R}^n) := \{ f : D \to \mathbb{R}^n : f \text{ stetig auf } D \}$ und
$C^1(J; \mathbb{R}^n) := \{ f : J \to \mathbb{R}^n : f \text{ stetig differenzierbar auf } J \}.$

Eine Funktion $f \in C(D; \mathbb{R}^n)$ heißt Lipschitz-stetig auf D mit einer Lipschitz-Konstanten $L \geq 0$, falls gilt
(3.1) $\| f(x_1) - f(x_2) \| \leq L \| x_1 - x_2 \| \qquad \forall x_1, x_2 \in D.$
Die Menge der auf D Lipschitz-stetigen Funktionen wird mit $C^{0,1}(D; \mathbb{R}^n)$ bezeichnet.
Sei nun $E \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Eine Funktion $f \in C(E; \mathbb{R}^n)$ mit $f = f(t, x)$ heißt Lipschitz-stetig bezüglich x mit einer Lipschitz-Konstanten $L \geq 0$, falls gilt
(3.2) $\| f(t, x_1) - f(t, x_2) \| \leq L \| x_1 - x_2 \| \qquad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in E.$
Dabei sind mit $\|\cdot\|$ beliebige Normen in $\mathbb{R}^n$ bezeichnet, die bekanntlich alle äquivalent sind. Aus Zweckmäßigkeitsgründen werden wir gegebenenfalls eine konkrete Norm, z.B. die euklidische oder auch die Maximum-Norm wählen.
Max-Norm: $\|x\| := \max \{ |x_i| : 1 \leq i \leq n \}$

Die Normen auf den beiden Seiten in (3.1), (3.2) müssen auch nicht die gleichen sein. Sei $b > 0$, dann bezeichnen wir als offene bzw. abgeschlossen 'Kugel' in $\mathbb{R}^n$ (bezüglich der Norm $\|\cdot\|$) die Mengen

$$B_b(x_0) := \{ x \in \mathbb{R}^n : \| x - x_0 \| < b \} \text{ bzw. } \overline{B}_b(x_0) := \{ x \in \mathbb{R}^n : \| x - x_0 \| \le b \}$$

(Geometrisch gesehen sind das in der Max-Norm Würfel!)
Wir benötigen in der Folge Aussagen zur gleichmäßigen Konvergenz von Funktionenfolgen. Seien $D \subset \mathbb{R}^m$ eine nicht leere Menge.
Dann gilt ($\rightarrow$ Analysis 1)

Lemma 1: Die Funktionenfolge (f_k) mit $f_k : D \to \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, konvergiere auf D gleichmäßig gegen eine Funktion f, in Zeichen: $f_k \Rightarrow f$. Dann gelten:
(i) Falls $f_k \in C(D; \mathbb{R}^n)$ $\forall k \in \mathbb{N}$, so folgt $f \in C(D; \mathbb{R}^n)$.
(ii) Falls D Jordan-meßbar ist und alle $f_k : D \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar auf D sind, so ist es auch f, wobei gilt

$$\lim_{k \to \infty} \int_D f_k = \int_D f .$$

Lemma 2: Sei $f \in C(E; \mathbb{R}^n)$. Dann ist $u \in C^1(J; \mathbb{R}^n)$ mit $(t, u(t)) \in E$, $\forall t \in J$, $t_0 \in J$ genau dann Lösung der AWA (1.2), falls

$$(3.3) \qquad u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds \quad \forall t \in J.$$

Die prinzipielle Bedeutung dieses Lemma 2 besteht darin, daß die Anfangswertaufgabe (1.2) in eine **äquivalente Integralgleichung** (3.3) überführt werden kann. Diese Integralgleichung ist in funktional-analytischer Lesart ein Fixpunktproblem. Die nachfolgenden Sätze von Picard / Lindelöf und Peano lassen sich auch elegant mit den Fixpunktsätzen von Banach bzw. Schauder beweisen.
Wir wollen hier diesen Weg nicht beschreiten, sondern bewußt auf die Verwendung der Funktionalanalysis verzichten und an die Analysis in $\mathbb{R}^n$ anknüpfen.

Satz 3: (**Picard / Lindelöf - lokale Existenz und Einzigkeit**)

Die Funktion $f \in C([t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}_b(x_0); \mathbb{R}^n)$ $(a, b > 0, \overline{B}_b(x_0) \subset \mathbb{R}^n)$
genüge der Lipschitz-Bedingung

$$(3.2) \quad \| f(t, x_1) - f(t, x_2) \| \le L \| x_1 - x_2 \| \qquad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}_b(x_0).$$

Seien $M := \max\{ \|f(t, x)\| : (t, x) \in [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}_b(x_0) \}$ und $\alpha := \min\{ a, \frac{b}{M} \}$.
Dann besitzt die Cauchy-Aufgabe

$$(1.2) \qquad x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

auf dem Intervall $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ genau eine Lösung $u \in C^1([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]; \overline{B}_b(x_0))$.
(Die Norm in $\mathbb{R}^n$ sei dabei beliebig fixiert, günstig in technischer Hinsicht ist die Max-Norm.)

Beweis: Wir führen den Beweis mit der Methode der sukzessiven Approximationen.
Sei $u_0(t) := x_0$ auf $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. Wir nehmen nun an, daß die k-te Näherung $u_k \in C([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]; \mathbb{R}^n)$ für $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definiert sei und der Bedingung

$$\|u_k(t) - x_0\| \le b \qquad \forall t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \quad \text{genügt.}$$

Wir setzen

$$(3.4) \qquad u_{k+1}(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u_k(s))\, ds \qquad \forall t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha].$$

Dann ist sofort klar, daß $u_{k+1} \in C([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]; \mathbb{R}^n)$ und daß gilt

$$(3.5) \qquad \|u_{k+1}(t) - x_0\| \le \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, u_k(s))\|\, ds \right| \le M\,|t - t_0| \le M\alpha \le b.$$

Somit wurde induktiv eine Folge (stetiger) Funktionen (u_k) definiert, deren Glieder sämtlich zu $C([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]; \bar{B}_b(x_0))$ gehören.
Wir zeigen nun mit Hilfe der vollständigen Induktion, daß die Abschätzung

$$(3.6)_k \qquad \|u_{k+1}(t) - u_k(t)\| \le \frac{M\,L^k\,|t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!} \qquad \forall t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

gilt. Für $k = 0$ ist die Aussage $(3.6)_0$ sofort klar (vgl. (3.5)).
Sei die Aussage $(3.6)_{k-1}$ für $k > 0$ wahr. Aus (3.4) folgt dann für $k > 0$

$$u_{k+1}(t) - u_k(t) = \int_{t_0}^{t} \left(f(s, u_k(s)) - f(s, u_{k-1}(s)) \right) ds,$$

woraus aufgrund der Lipschitz-Stetigkeit und der Induktionsvoraussetzung sich

$$\|u_{k+1}(t) - u_k(t)\| \le L \left| \int_{t_0}^{t} \|u_k(t) - u_{k-1}(t)\|\, ds \right| \le \frac{M\,L^k}{k!} \left| \int_{t_0}^{t} |s - t_0|^k\, ds \right| \le \frac{M\,L^k\,|t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!}$$

ergeben. Somit ist $(3.6)_k$ bewiesen.
Aus $(3.6)_k$ folgt, daß die Funktionenreihe

$$u_0 + \sum_{k=0}^{\infty} (u_{k+1} - u_k)$$

auf $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ die konvergente (Quotientenkriterium!) Majorante

$$\|x_0\| + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M\,L^k\,\alpha^{k+1}}{(k+1)!}$$

besitzt und daher nach dem Weierstrass-Kriterium auf $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ absolut konvergent ist. Also gilt $u(t) := \lim_{k \to \infty} u_k(t)$ als gleichmäßiger Grenzwert.

Da die Funktionen u_k alle auf $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ stetig sind, so ist nach Lemma 1(i) auch die Grenzfunktion u stetig, und es gilt $\|u(t) - x_0\| \le b \qquad \forall t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

Da f auf $[t_0 - a, t_0 + a] \times \bar{B}_b(x_0)$ gleichmäßig stetig ist, so konvergiert die Folge $(f(\cdot; u_k))$ auf $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ gleichmäßig (**Ü**!) gegen $f(\cdot; u)$, und in (3.4) ist der Grenzübergang für $k \to \infty$ zulässig. Wir erhalten

$$u(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds \quad \forall t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha].$$

Dann gilt natürlich $u \in C^1([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]; \bar{B}_b(x_0))$ und nach Lemma 2 ist u Lösung von (1.2).
Es bleibt noch die Einzigkeit der Lösung auf $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ zu zeigen.

Sei $w \in C^1([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]; \bar{B}_b(x_0))$ eine beliebige Lösung von (1.2), dann gilt ebenso

$$w(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, w(s))\, ds \quad \forall t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha].$$

Unter Benutzung der vollständigen Induktion folgt ähnlich wie oben unter Benutzung von (3.4)

(3.7) $$\|u_k(t) - w(t)\| \le \frac{M L^k |t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!} \qquad \forall t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha].$$

Der Grenzübergang für $k \to \infty$ ergibt sofort $u = w$.

Bemerkungen 4: (i) Die Abschätzung (3.7) liefert wegen $u = w$ die nützliche **Fehlerabschätzung**

(3.8) $$\|u_k(t) - u(t)\| \le \frac{M L^k \alpha^{k+1}}{(k+1)!} \qquad \forall t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

(ii) Es ist möglich, im vorliegenden Beweis die Iteration mit einer beliebigen Funktion

$u_0 \in C([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]; \bar{B}_b(x_0))$ anstelle der speziell gewählten Funktion $u_0(t) := x_0$ $\forall t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ zu beginnen (Ü!). Es ergeben sich nur leichte Modifikationen.
Der Beweis liefert also gleichzeitig ein **konstruktives Verfahren** zur näherungsweisen Berechnung der Lösung.

(iii) Die Bedingung $\alpha := \min\{ a, \frac{b}{M} \}$ in der Formulierung des Satzes ist völlig natürlich. Es muß $\alpha \le a$ sein. Sei u eine Lösung der Aufgabe (1.2) auf dem Intervall $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. Aus $|u'(t)| \le M$ folgt dann $\|u(t) - x_0\| \le M |t - t_0| \le b$, was nur für $|t - t_0| \le \frac{b}{M}$ möglich ist. Klar ist auch, jede Lösung $u \in C^1(J; \mathbb{R}^n)$ der Aufgabe (1.2) mit $J \subset [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ kann den Kegel $\|u(t) - x_0\| \le M |t - t_0|$ nicht verlassen.

(iv) Seien $E \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ ein Gebiet und die Funktion $f \in C(E)$ genüge auf jeder kompakten Teilmenge von E der Lipschitz-Bedingung (3.2). (Man sagt dann, f ist bezüglich x auf E lokal Lipschitz-stetig.)
Dann ist für jeden Punkt $(t_0, x_0) \in E$ die Cauchy-Aufgabe (3.3) lokal eindeutig lösbar, d.h., es existieren ein Intervall J mit innerem Punkt t_0 und genau eine Lösung $u \in C^1(J; \mathbb{R}^n)$ der Aufgabe (1.2).

(v) Eine Funktion f ist lokal Lipschitz-stetig bezgl. x, falls alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ $(i, j = 1, ..., n)$ existieren und auf E stetig sind. (Ü - MWS der DR benutzen)

Beispiele 5: (i) Wir studieren die Anfangswertaufgabe

(1.18) $$x' = x^2, \qquad x(0) = x_0.$$

Wie schon bekannt, ist für $x_0 > 0$ die Funktion $x(t) := (x_0^{-1} - t)^{-1}$ für $t < x_0^{-1}$ eine Lösung von (1.18) (s. § 1). (**Ü**: Lösen Sie diese AWA mittels Trennung der Variablen)
Für $x_0 = 0$ ist $x(t) := 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$ eine Lösung.
Wir wollen nun den Satz 3 auf diese Aufgabe anwenden.
Zuerst bemerken wir, daß die Funktion $f(t, x) := x^2$ auf $\mathbb{R}^2$ lokal Lipschitz-stetig ist.
Somit existiert nach Satz 3 für jeden Anfangswert lokal genau eine Lösung. Es ist leicht einzusehen, daß dann die Lösung auf jedem möglichen Intervall einzig ist (**Ü**!)
- Fall $x_0 > 0$:
Betrachten also die Aufgabe (1.18) auf der "Rechteck"-Menge $[-a, a] \times [x_0 - b, x_0 + b]$, wobei $a, b > 0$ vorerst frei gewählt sind. Das Maximum von $|f|$ auf dieser Menge ist offenbar $M = (x_0 + b)^2$, somit folgt $$\alpha := \min \{a, \frac{b}{(x_0 + b)^2}\}.$$

Die Funktion $\varphi(b) := \frac{b}{(x_0 + b)^2}$, definiert für $b > 0$, nimmt ihr globales Maximum $\frac{1}{4x_0}$ für $b = x_0$ an.

Wählen wir also $a \geq \frac{1}{4x_0}$ und $b = x_0$, so erhalten wir das "optimale" $\alpha = \frac{1}{4x_0}$ und betrachten die Aufgabe also auf der Menge $[-\frac{1}{4x_0}, \frac{1}{4x_0}]\times[0, 2x_0]$. (Skizze!)
Die Aussage des Satzes 3 lautet dann, daß die Aufgabe (1.18) auf dem Intervall $[-\frac{1}{4x_0}, \frac{1}{4x_0}]$ genau eine Lösung $u\in C^1([-\frac{1}{4x_0}, \frac{1}{4x_0}])$ besitzt,
für die gilt $|u(t) - x_0| \leq x_0, \qquad \forall t\in[-\frac{1}{4x_0}, \frac{1}{4x_0}]$.

Wegen der Einzigkeit gilt natürlich $u(t) := (x_0^{-1} - t)^{-1}$. Und diese Lösung läßt sich durch sukzessive Approximation annähern.

$u_0(t) := x_0, \qquad u_1(t) := x_0 + \int_0^t x_0^2\, ds = x_0 + x_0^2\, t,$

$u_2(t) := x_0 + \int_0^t (x_0 + x_0^2\, s)^2\, ds = x_0 + x_0^2\, t + x_0^3\, t^2 + \frac{1}{3} x_0^4\, t^3,$ sowie

$u_3(t) = x_0 + x_0^2\, t + x_0^3\, t^2 + x_0^4\, t^3 + \frac{2}{3} x_0^5\, t^4 + \frac{1}{3} x_0^6\, t^5 + \frac{1}{9} x_0^7\, t^6 + \frac{1}{63} x_0^8\, t^7.$

Berechnen eine (möglichst kleine) Lipschitz-Konstante von f auf $[-\frac{1}{4x_0}, \frac{1}{4x_0}]\times[0, 2x_0]$

$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| = |x_1^2 - x_2^2| = |x_1 + x_2|\, |x_1 - x_2| \leq 4x_0\, |x_1 - x_2|, \qquad$ also $L := 4x_0$.

Dann folgt aus (3.8) die Fehlerabschätzung

$$|u_k(t) - u(t)| \leq \frac{M\, L^k\, \alpha^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{x_0}{(k+1)!} \qquad \forall t\in[-\frac{1}{4x_0}, \frac{1}{4x_0}].$$

(Wird beispielsweise konkret $x_0 := 2$ gewählt, so wird die exakte Lösung $u(t) := \frac{2}{1 - 2t}$ auf dem Intervall [-0,125, 0,125] durch u_3 angenähert, wobei der maximal mögliche Fehler nicht $\frac{2}{4!} \leq 0{,}0834$ übersteigt.)

Der Graph der Lösung $u(t) := (x_0^{-1} - t)^{-1}$ verläßt im Punkt $(\frac{1}{4x_0}, \frac{4x_0}{3})$ das Rechteck $[-\frac{1}{4x_0}, \frac{1}{4x_0}]\times[0, 2x_0]$. Dieser Punkt $(\frac{1}{4x_0}, \frac{4x_0}{3})$ kann als neuer Anfangswert für die DG in (1.18) gewählt werden, und Satz 3 liefert ein neues Existenzintervall. Damit kann die Lösung $u(t) := (x_0^{-1} - t)^{-1}$ über $\frac{1}{4x_0}$ hinaus fortgestzt werden (Ü!). Eine sorgfältige Untersuchung zeigt, daß wir diesen Prozeß unbeschränkt fortsetzen können, aber nicht mit t über den Wert x_0^{-1} kommen, was aus dem Funktionsverlauf auch zu erwarten ist. (**Ü**!)
Mit dieser sogenannten Fortsetzbarkeit von Lösungen werden wir uns später noch beschäftigen.

Im Fall $x_0 = 0$ gelten offenbar $M = b^2$ und somit $\alpha := \min\{a, \frac{1}{b}\}$.

Also können wir erreichen, daß α beliebig groß wählbar ist.
(ii) (**Ü**) Diskutieren Sie in analoger Weise zu Beispiel (i) die Anfangswertaufgabe

$$x' = 1 + x^2, \quad x(0) = 0. \qquad (\text{optimales } \alpha = \tfrac{1}{2})$$

Berechnen Sei auch die exakte Lösung.
(**iii**) (**Ü**) Betrachten Sie die Aufgabe
(1.21), (1.22) $x' = t^2 + x^2,\ x(0) = 0.$
Die Berechnung einer 'exakten' Lösung ist hier nicht möglich.

In den obigen Beispielen ist es möglich, die Integrale während der Iterationen exakt zu berechnen. Das ist natürlich nicht die Regel. In der Praxis lassen sich diese auftretenden Integrale - und damit die Iterationen u_k - nur näherungsweise berechnen, der entstehende Fehler geht also in die Rechnungen mit ein. Es bedarf somit zusätzlicher Untersuchungen, um geeignete Fehlerabschätzungen zu erhalten, worauf wir hier verzichten wollen.

Wie Beispiele zeigen, ist es keineswegs sicher, daß eine Lösung für beliebig große t existieren muß.
Der Satz 3 garantiert nur ein "minimales" Existenzintervall $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, wobei das α "klein" sein kann. Ohne große zusätzliche Mühe erhalten wir durch leichte Modifikationen aus Satz 3 einen Existenzsatz für das Intervall $[t_0 - a, t_0 + a]$, wenn nur die Funktion f auf dem "Streifen" $[t_0 - a, t_0 + a]\times\mathbb{R}^n$ (global) Lipschitz-stetig ist.

Satz 6: (Picard / Lindelöf - Existenz und Einzigkeit auf "Streifen")
Die Funktion $f\in C([t_0 - a, t_0 + a]\times\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ $(a > 0)$ genüge der Lipschitz-Bedingung
(3.2) $\| f(t, x_1) - f(t, x_2) \| \le L \| x_1 - x_2 \| \qquad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in [t_0 - a, t_0 + a]\times\mathbb{R}^n.$
Dann besitzt die Cauchy-Aufgabe
(1.2) $x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$
auf dem Intervall $[t_0 - a, t_0 + a]$ genau eine Lösung $u\in C^1([t_0 - a, t_0 + a]; \mathbb{R}^n)$.
Diese Lösung ist gleichmäßiger Grenzwert der Folge der sukzessiven Approximationen, wobei eine beliebige Funktion $u_0\in C([t_0 - a, t_0 + a]; \mathbb{R}^n)$ gewählt werden kann. Dabei lautet die Fehlerabschätzung

(3.9) $$\|u_k(t) - u(t)\| \le \frac{L^{k+1} a^{k+1}}{(k + 1)!} M e^{La} \qquad \forall t\in [t_0 - a, t_0 + a], \quad \forall k\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

mit $M := \max \{ \| x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u_0(s)) ds - u_0(t) \| : t\in[t_0 - a, t_0 + a] \}.$

Beweis: (**Ü**) Modifikation des Beweises von Satz 3. Die Folge der sukzessiven Approximationen wird analog gebildet, mit $u_0\in C([t_0 - a, t_0 + a]; \mathbb{R}^n)$. Es gelingt dann, die Abschätzung

$(3.10)_k$ $$\|u_{k+1}(t) - u_k(t)\| \le \frac{M L^k |t - t_0|^k}{k!} \qquad \forall t\in[t_0 - a, t_0 + a], \quad k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$$

zu zeigen. Damit läßt sich wiederum die gleichmäßige Konvergenz der Folge (u_k) zeigen, die Grenzfunktion ist eine Lösung der AWA (1.2). Die Einzigkeit wird analog gezeigt. Sei $w\in C^1([t_0 - a, t_0 + a]; \mathbb{R}^n)$ eine beliebige Lösung von (1.2), dann gilt ebenso

$$w(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, w(s)) ds \quad \forall t\in[t_0 - a, t_0 + a].$$

Unter Benutzung der vollständigen Induktion folgt hieraus

(3.11) $$\|u_k(t) - w(t)\| \le \frac{L^k |t - t_0|^k}{k!} c(u_0, w) \qquad \forall t\in[t_0 - a, t_0 + a].$$

Dabei ist $c(u_0, w)$ eine von u_0 und w abhängige Konstante.
Der Grenzübergang für $k \to \infty$ ergibt sofort $u = w$. Allerdings ist die Verwendung von (3.11) nun für eine Fehlerabschätzung ungünstig, da für die Lösung u von vornherein keine Schranke bekannt ist. Daher wird der Rest der Majorante unter Verwendung von $(3.10)_k$ abgeschätzt.

Ü: $x' = \cos(t) \cos^2(x), \qquad x(t_0) = x_0.$

Der Existenzsatz von Peano

Wie Beispiele zeigen, ist die Einzigkeit der Lösung einer AWA nicht garantiert, falls die Funktion f nur stetig ist. ($\rightarrow$ Beispiel (1.19)). Um den folgenden Existenzsatz von Peano zu beweisen, benötigen wir weitere Hilfsmittel aus den Analysis. Seien $E \subset \mathbb{R}^m$ $(m \in \mathbb{N})$ nichtleer und M eine Menge von Funktionen $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Definition 7: (i) Die Menge M heißt **gleichmäßig beschränkt** (auf E), falls

$$\sup\{ \|f(x)\| : f \in M, x \in E \} < \infty.$$

(ii) Die Menge M heißt **gleichgradig stetig** (auf E), falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : (x_1, x_2 \in E, \ \| x_1 - x_2 \| < \delta, \ f \in M \ \Rightarrow \ \| f(x_1) - f(x_2) \| < \varepsilon)$$

Folgen von Funktionen heißen entsprechend gleichmäßig beschränkt bzw. gleichgradig stetig, falls die Menge ihrer Folgenglieder diese Eigenschaften besitzt.

Lemma 8: (Cantorsches Auswahlprinzip) Seien $E \subset \mathbb{R}^m$ nichtleer und (f_k) $(k \in \mathbb{N})$ eine gleichmäßig beschränkte Folge von Funktionen $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$.
Sei $D \subset E$ eine abzählbare Teilmenge.
Dann existiert eine Teilfolge (f_{k_j}), die auf D punktweise konvergiert.

Beweis: Die abzählbare Menge D können wir numerieren, d.h.,
$D = \{x_1, x_2, ..., x_j, ...\}$ Aus Übersichlichkeitsgründen betrachten wir den skalaren Fall $n = 1$. Nach Voraussetzung ist die Zahlenfolge $(f_k(x_1))$ in $\mathbb{R}$ beschränkt, somit existiert nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass eine konvergente Teilfolge $(f_{1k}(x_1))$. Die Folge $(f_{1k}(x_2))$ ist eine beschränkte Folge, somit existiert wiederum nach Bolzano-Weierstrass ein konvergente Teilfolge $(f_{2k}(x_2))$. Die Folge $(f_{2k}(x_3))$ ist beschränkt, besitzt also eine konvergente Teilfolge $(f_{3k}(x_3))$.
Wird der Prozeß in dieser Weise fortgesetzt, so erhalten wir eine Folge von Teilfolgen (f_{mk}) der ursprünglichen Funktionenfolge, wobei jedes (f_{mk}) in allen Punkten $x = x_1, ..., x_m$ konvergiert. Die sogenannte Diagonalfolge $g_m := f_{mm}$ konvergiert dann in jedem $x \in D$. ("Cantorsches Diagonalverfahren")

Lemma 9: Seien $E \subset \mathbb{R}^m$ beschränkt, nichtleer und $D \subset E$ eine dichte Teilmenge.
Für jedes $\eta > 0$ existiert eine endliche Teilmenge $\{x_1, x_2, ..., x_r\} \subset D$, so daß

$$\bigcup_{j=1}^{r} B_\eta(x_j) \supset E.$$

Dabei ist $B_\eta(x_j)$ die Kugel in $\mathbb{R}^m$ bezüglich einer beliebigen fixierten Norm.

Beweis: Wir führen den Beweis der Übersichlichkeit halber für die Max-Norm. Wir überdecken $\mathbb{R}^m$ mit abgeschlossenen achsenparallelen Würfeln der Kantenlänge η, die höchstens Seitenflächen bzw. Kanten gemeinsam haben. Da E eine beschränkte Menge ist, haben nur endlich viele dieser Würfel mit E einen nichtleeren Durchschnitt. Bezeichnen diese Würfel mit W_i, $i = 1, ..., r$ für ein gewisses $r \in \mathbb{N}$. Im Innern jedes dieser W_i gibt es einen Punkt x_i aus D, da diese Menge dicht in E ist. Somit erhalten wir eine endliche Teilmenge von D, nämlich $\{x_1, x_2, ..., x_r\}$.
Offenbar gilt dann $B_\eta(x_i) \supset W_i$ und es folgt die Behauptung.

Lemma 10: Seien $E \subset \mathbb{R}^m$ eine nichtleere beschränkte Menge und (f_k) $(k \in \mathbb{N})$ eine gleichgradig stetige Folge von Funktionen $f_k : E \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sei $D \subset E$ eine dichte Teilmenge und (f_k) konvergiere auf D punktweise.
Dann konvergiert (f_k) gleichmäßig auf E.

Beweis: Wir verwenden wiederum die Max-Norm.
Sei $\varepsilon > 0$. Aus der gleichgradigen Stetigkeit der Funktionenfolge ergibt sich die Existenz eines $\delta > 0$ so, daß $\forall k \in \mathbb{N}$

$$||f_k(x) - f_k(y)|| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{falls } x, y \in E \quad \text{mit } ||x - y|| < \delta.$$

Für $\eta := \frac{\delta}{2}$ folgt nach Lemma 8 die Existenz einer endlichen Teilmenge $\{x_1, x_2, ..., x_r\}$ von D, so daß $\bigcup_{j=1}^{r} B_\eta(x_j) \supset E$.
Nach Voraussetzung konvergiert (f_k) auf D punktweise, somit existiert zu dem gegebenen ε ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß gilt: $\forall k, i \geq k_0, \quad \forall j \in \{1, ..., r\} \; ||f_k(x_j) - f_i(x_j)|| < \frac{\varepsilon}{3}$.
Sei nun $x \in E$ beliebig gewählt. Dann existiert ein $j \in \{1, ..., r\}$ mit $x \in B_\eta(x_j)$, also gilt $||x - x_j|| < \delta$.
Als Resümee unserer bisherigen Überlegungen ergibt sich:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists k_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall k, i \geq k_0, \quad \forall x \in E :$$
$$||f_k(x) - f_i(x)|| \leq ||f_k(x) - f_k(x_j)|| + ||f_k(x_j) - f_i(x_j)|| + ||f_i(x_j) - f_i(x)|| < \varepsilon.$$

Mit anderen Worten: (f_k) konvergiert gleichmäßig auf E.

Satz 11: (**Auswahlprinzip von Arzela / Ascoli**) Seien $E \subset \mathbb{R}^m$ eine nichtleere beschränkte Menge und M eine gleichmäßig beschränkte und gleichgradig stetige Menge von Funktionen $f : E \to \mathbb{R}^n$. Dann existiert eine auf E gleichmäßig konvergente Folge von Funktionen aus M.

Beweis: Der Beweis folgt durch Kombination der Lemmata 8 und 10. Zuerst bemerken wir, daß E eine dichte abzählbare Teilmenge besitzt, etwa alle Punkte aus E mit rationalen Koordinaten. Sei (f_k) eine Funktionenfolge, deren Folgenglieder in M liegen. Nach Lemma 8 existiert eine Teilfolge von (f_k), die auf der dichten abzählbaren Teilmenge von E punktweise konvergiert. Die gleichgradige Stetigkeit sichert dann nach Lemma 10, daß die Teilfolge von (f_k) auf E gleichmäßig konvergiert.

Satz 12: (**Peano - lokale Existenz**) Seien $f \in C([t_0 - a, t_0 + a] \times \bar{B}_b(x_0); \mathbb{R}^n)$ $(a, b > 0,$ $\bar{B}_b(x_0) \subset \mathbb{R}^n)$ und $M := \max\{ ||f(t, x)|| : (t, x) \in [t_0 - a, t_0 + a] \times \bar{B}_b(x_0) \}$ und $\alpha := \min\{a, \frac{b}{M}\}$.
Dann besitzt die Cauchy-Aufgabe
(1.2) $\quad x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$

auf dem Intervall $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ mindestens eine Lösung $u \in C^1([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]; \bar{B}_b(x_0))$.
(Die Norm in $\mathbb{R}^n$ sei dabei beliebig fixiert, günstig in technischer Hinsicht ist die Max-Norm.)

Beweis: 1) Es genügt, die Existenz einer Lösung zu (1.2) auf $[t_0, t_0 + \alpha]$ zu zeigen.

Danach betrachten wir die Aufgabe $x' = \tilde{f}(t, x), \; x(t_0) = x_0$ mit $\tilde{f}(t, x) := - f(2t_0 - t, x)$ für $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$.

Diese Aufgabe besitzt dann nach Annahme eine Lösung $\tilde{x} \in C^1([t_0, t_0 + \alpha]; \bar{B}_b(x_0))$.

Wir definieren $x(t) := \tilde{x}(2t_0 - t)$ für $t \in [t_0 - \alpha, t_0]$. Dann gilt

$x'(t) = -\tilde{x}'(2t_0 - t) = -\tilde{f}(2t_0 - t, \tilde{x}(2t_0 - t)) = f(t, x(t)) \quad t \in [t_0 - \alpha, t_0]$,

und wir können eine Lösung von (1.2) auf $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ aus den Lösungen auf $[t_0, t_0 + \alpha]$ und $[t_0 - \alpha, t_0]$ "zusammenkleben". (Die so erhaltene Funktion ist offenbar in t_0 stetig differenzierbar.)

2) Wir wählen für das Intervall $[t_0, t_0 + \alpha]$ eine sogenannte äquidistante Zerlegung mit der Schrittweite $\frac{\alpha}{m}$, $m \in \mathbb{N}$, also $t_0 < t_1 < ... < t_m := t_0 + \alpha$ mit $t_k - t_{k-1} = \frac{\alpha}{m}$, $k = 1, ..., m$.

Definieren auf $[t_0, t_0 + \alpha]$ einen (vektoriellen) Polygonzug p_m wie folgt in induktiver Weise:

- Auf $[t_0, t_1]$ $\quad p_m(t) := x_0 + (t - t_0) f(t_0, x_0)$.
- Sei p_m bereits auf $[t_0, t_k]$ (mit $k < m$) definiert und genüge dort der Abschätzung

$$\|p_m(t) - x_0\| \le \frac{\alpha}{m} k M.$$

Dann definieren wir p_m auf $[t_k, t_{k+1}]$ gemäß

$$p_m(t) := p_m(t_k) + (t - t_k) f(t_k, p_m(t_k)).$$

Offenbar gilt auf $[t_k, t_{k+1}]$ die Abschätzung

$$\|p_m(t) - x_0\| = \|p_m(t_k) + (t - t_k) f(t_k, p_m(t_k)) - x_0\| \le \frac{\alpha}{m} k M + \frac{\alpha}{m} M = \le \frac{\alpha}{m} (k + 1) M.$$

Hieraus folgt dann (für $k = m - 1$)

$$\|p_m(t) - x_0\| \le \frac{\alpha}{m} ((m - 1) + 1) M = \alpha M \le b, \qquad \forall\, t \in [t_0, t_0 + \alpha]. \tag{3.12}$$

Aus technischen Gründen wollen wir die Funktion p_m in eine andere Form bringen. Seien $t \in [t_k, t_{k+1}]$ mit $0 \le k \le m - 1$, dann gilt

$$p_m(t) = x_0 + \sum_{j=1}^{k} \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(t_{j-1}, p_m(t_{j-1}))\, dt + \int_{t_k}^{t} f(t_k, p_m(t_k))\, dt, \tag{3.13}$$

weil - wie z.B. durch Induktion überprüfbar -

$$p_m(t_k) = x_0 + \sum_{j=1}^{k} \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(t_{j-1}, p_m(t_{j-1}))\, dt.$$

Wir definieren die Treppenfunktion

$$\tilde{f}(t) := \begin{cases} f(t_0, x_0), & \text{für } t = t_0 \\ f(t_k, p_m(t_k)), & \text{für } t_k < t \le t_{k+1} \quad (k = 0, ..., m - 1) \end{cases}$$

Dann lautet (3.13) in kompakter Schreibweise

$$p_m(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \tilde{f}(s)\, ds, \text{ woraus sofort} \tag{3.14}$$

$$\|p_m(t) - p_m(s)\| \le M\, |t - s|$$

folgt. Unter Beachtung von (3.12) ergibt sich, daß die Menge

$$\{ p_m : m \in \mathbb{N} \} \subset C([t_0, t_0 + \alpha]; \mathbb{R}^n)$$

gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig ist.

Der Satz 11 von Arzela / Ascoli sichert dann die Existenz einer auf $[t_0, t_0 + \alpha]$ gleichmäßig konvergenten Teilfolge der Folge (p_m).

Aus Gründen der Übersichtlichkeit bezeichnen wir diese Teilfolge auch mit (p_m). Die (gleichmäßige) Grenzfunktion bezeichnen wir mit u, also $p_m \Rightarrow u$.

Offenbar gilt $u \in C([t_0, t_0 + \alpha]; \bar{B}_b(x_0))$ und u ist Kandidat für die Lösung von (1.2) auf dem Intervall $[t_0, t_0 + \alpha]$. Dafür, daß u Lösung ist, ist es hinreichend, zu zeigen, daß

$\tilde{f} \Rightarrow f(\cdot, u)$ auf $[t_0, t_0 + \alpha]$.

Sei $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$, dann gilt $t = t_0$ oder $t \in]t_k, t_{k+1}]$ für ein k mit $0 \le k \le m - 1$ und wir erhalten

$$\|u(t) - p_m(t_k)\| \le \|u(t) - p_m(t)\| + \|p_m(t) - p_m(t_k)\| \le \|u(t) - p_m(t)\| + \frac{\alpha}{m} M$$

Sei $\varepsilon > 0$, da f auf $[t_0, t_0 + \alpha] \times \bar{B}_b(x_0)$ stetig und somit gleichmäßig stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ so, daß $\forall t, \bar{t} \in [t_0, t_0 + \alpha], \quad \forall x, \bar{x} \in \bar{B}_b(x_0)$

$$\text{mit } |t - \bar{t}| < \delta, \ \|x - \bar{x}\| < \delta \ \Rightarrow \ \|f(t, x) - f(\bar{t}, \bar{x})\| < \varepsilon.$$

Zu diesem $\delta > 0$ gibt es dann ein $m_0 \in \mathbb{N}$ so, daß:

$$\forall\, m \ge m_0 \quad \frac{\alpha}{m} < \delta \quad \text{und} \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \alpha] \quad \|u(t) - p_m(t)\| + \frac{\alpha}{m} M < \delta.$$

Dann gelten $t \in]t_k, t_{k+1}]$, $|t - t_k| < \delta$ und $\|u(t) - p_m(t_k)\| < \delta$, also folgt

$$\| f(t, u(t) - \tilde{f}(t) \| = \| f(t, u(t) - f(t_k, p_m(t_k)) \| < \varepsilon.$$

Der Satz von Peano gestattet eine zum Satz 6 analoge Variante:

Satz 13: (Peano - Existenz auf "Streifen")
Es gelte $f \in BC([t_0 - a, t_0 + a] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ $(a > 0)$ (d.h., f beschränkt und stetig auf $[t_0 - a, t_0 + a] \times \mathbb{R}^n$) Dann besitzt die Cauchy-Aufgabe
(1.2) $\quad x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$
auf dem Intervall $[t_0 - a, t_0 + a]$ mindestens eine Lösung $u \in C^1([t_0 - a, t_0 + a]; \mathbb{R}^n)$.

Beweis: (**Ü**) Modifizieren Sie den Beweis von Satz 12 in geeigneter Weise.

Bemerkung 14: (i) Falls für die AWA (1.2) die Einzigkeit gesichert und f stetig ist, so konvergiert die Folge der Polygonzüge (p_m) selbst gleichmäßig gegen die Lösung.
Wir haben somit eine Möglichkeit, die Lösung näherungsweise zu bestimmen. Die klassische Varante dieses Verfahrens heißt "Methode der Euler-Cauchyschen Polygonzüge". ($\rightarrow$ § 1)
(ii) Falls f nicht bezüglich x Lipschitz-stetig ist, so führt die - formal mögliche - Methode der sukzessiven Approximation - wie im Beweis des Satzes von Picard / Lindelöf beschrieben - i.a. nicht zur Annäherung an eine Lösung, die ja nach dem Satz von Peano existiert.($\rightarrow$ Heuser, GDG).

Der Existenzsatz von Cauchy über analytische Lösungen
Wir wollen nun einen Existenz- und Einzigkeitssatz beweisen, der die Grundlage dafür bildet, AWA für GD mit sogenannten Potenzreihenansätzen zu lösen.
Dazu benötigen wir einige Vorbereitungen.

Satz 15: (**Regularität der Lösung**)
(i) Seien $E \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $f \in C^k(E; \mathbb{R}^n)$ für $k \in \mathbb{N}$ und $(t_0, x_0) \in E$. Dann gilt für die nach Satz 3 auf einem Intervall $J := [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ existierende einzige Lösung $u \in C^1(J; \mathbb{R}^n)$ der Anfangswertaufgabe (1.2) außerdem $u \in C^{k+1}(J; \mathbb{R}^n)$.
Die Ableitungen der Ordnung j mit $2 \le j \le k + 1$ der Lösung u lassen sich dabei durch partielle Ableitungen von f und durch Ableitungen von u selbst mit der höchsten Ordnung $j-1$ darstellen.
(ii) Sei zusätzlich $f \in C^\infty(E; \mathbb{R}^n)$, dann gilt $u \in C^\infty(J; \mathbb{R}^n)$.

Beweis: Zunächst bemerken wir, daß nach Bemerkung 4 (iv) die Funktion f in E lokal Lipschitz-stetig ist. Somit sind die Voraussetzungen des Satzes 3 von Picard / Lindelöf gegeben und es existieren ein Intervall $J := [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ $(\alpha > 0)$ und genau eine Lösung $u \in C^1(J; \mathbb{R}^n)$ der Anfangswertaufgabe (1.2).
(i) Es gilt also

(3.15) $$u'(t) = f(t, u(t)) \qquad \forall t \in J.$$

Sei $f \in C^1(E; \mathbb{R}^n)$, dann folgt $\frac{d}{dt} f(t, u(t)) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, u(t)) + \frac{\partial f}{\partial u}(t, u(t))\, u'(t)$

sofort nach der Kettenregel für Funktionen mehrerer Variablen. Wenn die rechte Seite in (3.15) stetig differenzierbar ist, so ist es auch u, und wir erhalten

$$u''(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, u(t)) + \frac{\partial f}{\partial u}(t, u(t))\, u'(t) \quad \forall t \in J.$$

Seien nun $j = k - 1$ und die Ableitung $u^{(j)}$ sei ein Polynom in den partiellen Ableitungen von f und den Ableitungen von u mit der höchsten Ordnung $j - 1$.
Nach den Voraussetzungen ist dann dieses Polynom bezüglich t stetig differenzierbar und somit ist es auch $u^{(j)}$, also existiert $u^{(k)} \in C(J; \mathbb{R}^n)$. Dabei läßt sich $u^{(k)}$ ausdrücken durch Ableitungen von u und f höchsten $(k-1)$ter Ordnung.
(ii) Falls $f \in C^\infty(E; \mathbb{R}^n)$, dann ist der in (i) beschriebene Prozeß unendlich fortsetzbar und u besitzt Ableitungen beliebiger Ordnung.

Definition 16: Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $x_0 \in \Omega$.
(i) Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt **analytisch** (auch reell-analytisch oder holomorph) in einer Umgebung von x_0, falls ein $\rho > 0$ mit $\rho < \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$ derart existiert, daß

(3.16) $$f(x) = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_n = 0}^{\infty} a_{k_1 k_2 \ldots k_n} (x_1 - x_{10})^{k_1} (x_2 - x_{20})^{k_2} \ldots (x_n - x_{n0})^{k_n} \qquad \forall x \in B_\rho(x_0).$$

Die Reihe in (3.16) heißt reelle Potenzreihe in n Variablen mit dem Enwicklungspunkt x_0; die reellen Zahlen $a_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ heißen Koeffizienten der P-Reihe. Es sei wieder die Maximum-Norm in $\mathbb{R}^n$ verwendet.
(ii) Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt analytisch (auch reell-analytisch oder holomorph) in Ω, falls f in allen Punkten von Ω analytisch ist.
(iii) Eine (Vektor-) Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ heißt analytisch (auch reell-analytisch oder holomorph) in einer Umgebung von $x_0 \in \Omega$ bzw. in Ω, falls jede Koordinatenfunktion von f die entsprechende Eigenschaft besitzt.

Zur Erinnerung an den Analysiskurs formulieren wir folgende Aussagen, deren Beweise zur Übung überlassen seien.

Lemma 17: (i) Falls $0 < \rho' < \rho$, so konvergiert die Potenzreihe (3.16) auf $\bar{B}_{\rho'}(x_0)$ absolut und gleichmäßig.
(ii) In $B_\rho(x_0)$ stellt die Potenzreihe (3.16) eine C^∞-Funktion dar und es gilt:

$$a_{k_1 k_2 \ldots k_n} = \frac{1}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!} \frac{\partial^{k_1 + k_2 + \ldots + k_n} f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n}} \Big|_{x = x_0} \qquad \forall\, k_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

(iii) Es existieren nicht-analytische C^∞-Funktionen.

Definition 18: Gegeben seien zwei Potenzreihen mit gleichem Enwicklungspunkt x_0:

(3.17) $$f(x) = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_n = 0}^{\infty} a_{k_1 k_2 \ldots k_n} (x_1 - x_{10})^{k_1} (x_2 - x_{20})^{k_2} \ldots (x_n - x_{n0})^{k_n} \qquad \text{und}$$

(3.18) $$g(x) = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_n=0}^{\infty} b_{k_1 k_2 \ldots k_n} (x_1 - x_{10})^{k_1} (x_2 - x_{20})^{k_2} \ldots (x_n - x_{n0})^{k_n}.$$

Die Reihe (3.18) konvergiere in $B_\rho(x_0)$ (mit $\rho > 0$) und es gelte

(3.19) $$|a_{k_1 k_2 \ldots k_n}| \le b_{k_1 k_2 \ldots k_n} \qquad \forall\, k_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Dann heißt die Reihe (3.18) konvergente Majorante (in $B_\rho(x_0)$) der Reihe (3.17). Ebenso heißt die Funktion g Majorante der Funktion f (in $B_\rho(x_0)$).

Lemma 19: (i) Für jede in $B_\rho(x_0)$ (mit $\rho > 0$) konvergente Potenzreihe existiert eine konvergente Majorante.
(ii) Für jede in $B_\rho(x_0)$ (mit $\rho > 0$) konvergente Potenzreihe existiert eine in $B_{\rho_1}(x_0)$ mit $0 < \rho_1 < \rho$ konvergente Majorante, die eine rationale Funktion darstellt.

Beweis: (i) Nehmen die Reihe mit den Beträgen der Koeffizienten als Majorante.
(ii) Sei $0 < \rho_1 < \rho$. Falls die Reihe (3.16) in $B_\rho(x_0)$ konvergiert, so konvergiert offenbar die Reihe

$$\sum_{k_1, k_2, \ldots, k_n=0}^{\infty} |a_{k_1 k_2 \ldots k_n}|\, \rho_1^{k_1+k_2+\ldots+k_n} =: M \in \mathbb{R}_+.$$

Hieraus folgt $$|a_{k_1 k_2 \ldots k_n}| \le \frac{M}{\rho_1^{k_1+k_2+\ldots+k_n}} =: b_{k_1 k_2 \ldots k_n}.$$

Dann erhalten wir folgende Majorante

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_n=0}^{\infty} b_{k_1 k_2 \ldots k_n} (x_1 - x_{10})^{k_1} (x_2 - x_{20})^{k_2} \ldots (x_n - x_{n0})^{k_n} =$$

$$= \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_n=0}^{\infty} \frac{M}{\rho_1^{k_1+k_2+\ldots+k_n}} (x_1 - x_{10})^{k_1} (x_2 - x_{20})^{k_2} \ldots (x_n - x_{n0})^{k_n} =$$

$$= M \sum_{k_1=0}^{\infty} \left(\frac{x_1 - x_{10}}{\rho_1}\right)^{k_1} \sum_{k_2=0}^{\infty} \left(\frac{x_2 - x_{20}}{\rho_2}\right)^{k_2} \ldots \sum_{k_n=0}^{\infty} \left(\frac{x_n - x_{n0}}{\rho_n}\right)^{k_n} =$$

$$= \frac{M}{\left(1 - \frac{x_1 - x_{10}}{\rho_1}\right)\left(1 - \frac{x_2 - x_{20}}{\rho_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{x_n - x_{n0}}{\rho_n}\right)} \qquad \forall\, |x_i - x_{i0}| < \rho_1.$$

Satz 20: (**Cauchy - analytische Lösungen**)
Seien $E \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $(t_0, x_0) \in E$ und $f \in C(E; \mathbb{R}^n)$ sei in einer Umgebung von (t_0, x_0) analytisch. Dann ist die nach Satz 3 auf einem Intervall $J := [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ existierende einzige Lösung $u \in C^1(J; \mathbb{R}^n)$ der Anfangswertaufgabe (1.2) in einer Umgebung von t_0 analytisch.

Beweis: Aus Gründen der Übersichtlichkeit führen wir den Beweis nur für den skalaren Fall $n = 1$.
Da f in einer Umgebung von (t_0, x_0) analytisch ist, so stellt f in dieser Umgebung eine C^∞-Funktion dar und erfüllt lokal die Voraussetzungen von Satz 3.
Also existiert auf einem geeigneten Intervall $J := [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ genau eine Lösung $u \in C^1(J; \mathbb{R})$. Nach dem Regularitätssatz 15 gilt dann natürlich $u \in C^\infty(J_1; \mathbb{R})$ mit $J_1 \subset J$, o.B.d.A. sei $J_1 = J$.
Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß dieses u in einer Umgebung von t_0 analytisch ist.
Wir setzen nun o.B.d.A. $t_0 := x_0 := 0$, was wir sonst durch die Transformation
$\tau := t - t_0$, $\xi := x - x_0$ leicht erreichen könnten.
Nach den Voraussetzungen existiert dann ein $\rho > 0$ mit $B_\rho(0, 0) \subset E$ und

(3.20) $f(t, x) = \sum_{k,l=0}^{\infty} a_{kl}\, t^k x^l \qquad \forall\ (t, x) \in B_\rho(0, 0).$

Wir konstruieren zuerst eine formale Lösung der AWA

(3.21) $x' = f(t, x), \quad x(0) = 0$

in Gestalt einer Potenzreihe und zeigen dann, daß diese Reihe in einer Umgebung von 0 konvergiert und dort eine Lösung (nach Einzigkeit *die* Lösung) darstellt.

Wir wählen also den Ansatz

(3.22) $u(t) := \sum_{m=1}^{\infty} u_m\, t^m \qquad$ (beachte die AB $u(0) = 0$).

Formales Einsetzen von (3.22) in die Gleichung (3.21) unter Beachtung der Darstellung (3.20) für f, liefert

(3.23) $\sum_{m=1}^{\infty} m\, u_m\, t^{m-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)\, u_{m+1}\, t^m = \sum_{k,l=0}^{\infty} a_{kl}\, t^k \Big(\sum_{j=1}^{\infty} u_j\, t^j\Big)^l.$

Nach dem Identitätssatz (zwei Potenzreihen mit gleichem Entwicklungspunkt sind genau dann gleich, wenn ihre Koeffizienten gleich sind) bestimmen wir aus (3.23) die unbekannten Koeffizienten u_m aus den bekannten a_{kl} (f ist ja gegeben).

Aus der Beziehung (3.23) folgt leicht:

- für t^0: $u_1 = a_{00}$,
- für t^1: $2\, u_2 = a_{10} + a_{01}\, u_1$,

...

(3.24) - für t^m: $(m+1)\, u_{m+1} = P_{m+1}(a_{kl}, u_j)$ mit $0 \le k, l \le m,\ 0 \le j \le m$.

Dabei ist P_{m+1} ein Polynom in a_{kl} und u_j mit nichtnegativen Koeffizienten.

Also sind die Koeffizienten u_m eindeutig bestimmt.

Zeigen nun, daß die Reihe (3.22) in einer Umgebung von 0 konvergiert und die Lösung des Problems (3.21) ist.

Betrachten folgende Hilfsaufgabe ("majorisierendes Problem"):

(3.25) $x' = \dfrac{M}{(1 - \frac{t}{\rho_1})(1 - \frac{x}{\rho_1})} \qquad x(0) = 0,$

wobei $0 < \rho_1 < \rho$, $|t|, |x| < \rho_1$ und $M := \sum_{k,l=0}^{\infty} |a_{kl}|\, \rho_1^{k+l}$.

Nach den Überlegungen im Beweis von Lemma 19 (ii) ist die rechte Seite in der Gleichung (3.25) eine Majorante von f in $B_{\rho_1}(0, 0)$.

Die Gleichung (3.25) ist eine GDG in trennbaren Variablen, somit besitzt die AWA (3.25) die einzige Lösung (Ü!)

(3.26) $v(t) := \rho_1 \Big(1 - \sqrt{1 + 2M \ln(1 - \frac{t}{\rho_1})}\Big)$

Für $|t| < \rho_1 (1 - e^{-\frac{1}{2M}}) =: \rho_2$ ist v in eine konvergente Potenzreihe entwickelbar (Ü) und es gilt

(3.27) $|v(t)| < \rho_1$, falls $|t| < \rho_2$.

Unser Ziel ist es jetzt, zu zeigen daß die Funktion v (und damit die zugehörige Potenzreihe) auf $B_{\rho_2}(0)$ eine konvergente Majorante für die Reihe (3.22) (und somit für die formale Lösung u) ist.

Es gelten offenbar die Darstellungen

$v(t) := \sum_{m=1}^{\infty} v_m\, t^m$ in $B_{\rho_2}(0)$ und

$$\frac{M}{(1 - \frac{t}{\rho_1})(1 - \frac{x}{\rho_1})} = \sum_{k,l=0}^{\infty} b_{kl}\, t^k x^l \qquad \text{in } B_{\rho_1}(0, 0) \text{ sowie } |a_{kl}| \le b_{kl}.$$

Ein Einsetzen dieser Zerlegungen - für $|t| < \rho_2$ - in die DG (3.25) ergibt damit eine völlig analoge Beziehung zu (3.23) (anstelle von u_m und a_{kl} stehen jetzt v_m und b_{kl}). Der Koeffizientenvergleich liefert ebenso analoge zu (3.24) Beziehungen. Die Polynome P_{m+1} sind die gleichen. Da sie nichtnegative Koeffizienten haben, so folgt wegen $|a_{kl}| \le b_{kl}$ die Ungleichung $|u_m| \le v_m$, also $|u(t)| \le v(t)$ in $B_{\rho_2}(0)$.
Somit konvergiert die Reihe (3.22) in $B_{\rho_2}(0)$ und stellt dort eine analytische Funtion u dar. Wegen (3.27) und $|u(t)| \le v(t)$ in $B_{\rho_2}(0)$ ist die Reihe (3.20) für f beim Einsetzen von u(t) anstelle von x für $t \in B_{\rho_2}(0)$ konvergent und - da f analytisch - gleich f(t, u(t)). Also stellt die formal durch den Ansatz (3.22) konstruierte Reihe in $B_{\rho_2}(0)$ eine analytische Funktion dar, die die AWA (3.21) löst. Wegen der Einzigkeit der Lösung ist das die durch den Satz 3 von Picard / Lindelöf existierende Lösung.

Bemerkung 21: (i) Der Satz 20 von Cauchy läßt sich für AWA für komplexe GDG

$$\frac{dw}{dz} = f(z, w), \quad w(z_0) = w_0,$$

(w und f sind komplexe Funktionen, z komplexe Variable)
übertragen und analog beweisen. Der Beweis läßt sich auch mit den spezifischen Hilfsmitteln der (komplexen) Funktionentheorie wesentlich kürzer führen ($\rightarrow$ Walter).
(ii) Eine weitere Verallgemeinerung des Satzes 20 auf Probleme mit partiellen Differentialgleichungen trägt die Namen von Cauchy und Kowalewskaja.

Beispiele 22: (i) Betrachten die AWA

(3.28) $\qquad x' = (x - 1)^2, \qquad x(0) = 0.$

Der Satz 3 von Picard / Lindelöf sichert, daß eine einzige Lösung $u \in C^1([-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}])$ existiert mit $|u(t)| \le \frac{1}{4}$ für $t \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ (**Ü**).

Die Funktion $f(t, x) := (x - 1)^2$ stellt auf dem Rechteck $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}] \times [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ eine konvergente Potenzreihe dar, und es sind $\rho_1 := \rho := \frac{1}{4}$, $M := 2$ wählbar.
Nach dem Satz 20 von Cauchy existiert für die Lösung von (3.28) die Majorante

(3.29) $\qquad v(t) := \frac{1}{4}\left(1 - \sqrt{1 + 4\ln(1 - 4t)}\right)$

Für $|t| < \rho_1 \left(1 - e^{-\frac{1}{2M}}\right) =: \rho_2 = \frac{1}{4}\left(1 - e^{-\frac{1}{4}}\right) \approx 0{,}0553.$

Satz 20 sichert also, daß die Lösung u in $B_{\rho_2}(0)$ analytisch ist.
Bestimmen nun die Koeffizienten mittels Koeffizientenvergleich. Einsetzen des Ansatzes $u(t) := \sum_{m=1}^{\infty} u_m t^m$ in die Gleichung (3.28) liefert

(3.30) $$\sum_{m=1}^{\infty} m\, u_m\, t^{m-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (m + 1)\, u_{m+1}\, t^m = \Big(-1 + \sum_{m=1}^{\infty} u_m t^m\Big)^2.$$

Hieraus folgen:

- für t^0: $\quad u_1 = 1,$
- für t^1: $\quad 2u_2 = -2u_1 = -2.$
- für t^2: $\quad 3u_3 = u_1^2 + 2(-u_2) = 3.$

- für t^3: $4u_4 = 2u_1 u_2 - 2u_3 = -4$.

Somit ergibt sich als Vermutung $u_0 := 0$ und $u_k := (-1)^{k+1}$ für $k \in \mathbb{N}$, und es gilt

$$(3.31)\quad u(t) = t - t^2 + t^3 - t^4 + \ldots = 1 - 1 + t - t^2 + t^3 - t^4 + \ldots = 1 - \sum_{m=0}^{\infty} (-t)^k = 1 - \frac{1}{1+t}.$$

Überprüfen Sie, daß diese Funktion u wirklich Lösung der AWA (3.28) ist. (**Ü**)

Die Reihe in (3.31) konvergiert nur für $|t| < 1$, obwohl u auf $]-1, +\infty[$ rell-analytisch ist. Der Satz 20 sichert unter der obigen Auswahl der Daten nur einen Konvergenzbereich von $|t| < 0{,}0553$.

Für die Anfangsbedingung $x(0) = 1$ ist offenbar die konstante Funktion $x(t) := 1$ die einzige Lösung der AWA, die Potenzreihendarstellung dieser Funktion hat den Konvergenzradius $+\infty$. Die Anfangsbedingung hat somit einen Einfluß auf den möglichen Konvergenzradius der Lösungsreihe mit Entwicklungspunkt t_0.

(ii) Der Satz 20 ist nur hinreichend, nicht notwendig.

Betrachten die AWA

$$(3.32)\qquad x' = f(t, x), \qquad x(0) = 0, \qquad \text{mit } f(t, x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{für } x > 0,\ t \in \mathbb{R} \\ 0, & \text{für } x \le 0,\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Wie bekannt, ist $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, aber in keiner Umgebung von $(0, 0)$ analytisch.

Die einzige Lösung von (3.32) ist die analytische Funktion $u(t) = 0$ für $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Wir ändern die Funktion f im vorigen Beispiel wie folgt

$$f(t, x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{t}}, & \text{für } x > 0,\ t > 0 \\ e^{-\frac{1}{t}}, & \text{für } x \le 0,\ t > 0 \\ e^{-\frac{1}{x}}, & \text{für } x > 0,\ t \le 0 \\ 0, & \text{für } x \le 0,\ t \le 0 \end{cases}$$

Wiederum ist $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, aber in keiner Umgebung von $(0, 0)$ analytisch.

Die eindeutige Lösung zur AB $x(0) = 0$ gehört zu $C^\infty(\mathbb{R})$, und alle ihre Ableitungen im Punkt $t = 0$ verschwinden (**Ü**). (Satz 15 benutzen!)

Daher kann diese Funktion in keiner Umgebung von 0 analytisch sein (**Ü**).

§ 4 Fortsetzbarkeit von Lösungen zu Anfangswertaufgaben

Die bisherigen Existenzsätze 3, 12 und 20 aus § 3 beinhalten "lokale" Resultate in der Weise, daß die Existenz von Lösungen der AWA (1.2) nur auf (möglicherweise kleinen) Mindest-Intervallen garantiert wird. Beispiele zeigen, daß verschiedentlich Lösungen auf größeren Intervallen existieren, andererseits gibt es auch Lösungen, die nur auf beschränkten Intervallen existieren. Diese Fragen der Fortsetzbarkeit von Lösungen zu AWA wollen wir nun systematischer untersuchen.

Definition 1: (Fortsetzung einer Lösung zu einer AWA)

Seien $E \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $f \in C(E; \mathbb{R}^n)$, $(t_0, x_0) \in E$, $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $t_0 \in J$.

Sei $u \in C^1(J; \mathbb{R}^n)$ Lösung der Cauchy-Aufgabe

$$(1.2)\qquad x' = f(t, x), \qquad x(t_0) = x_0$$

(i) Sei $\tilde{J} \subset \mathbb{R}$ ein weiteres Intervall mit $J \subset \tilde{J}$ und $\tilde{J} \neq J$. Sei $\tilde{u} \in C^1(\tilde{J}; \mathbb{R}^n)$ ebenfalls Lösung der Cauchy-Aufgabe (1.2).

Falls $u(t) = \tilde{u}(t)$ auf J, so heißt $\tilde{u}$ **Fortsetzung** der Lösung u (von J auf $\tilde{J}$).

(ii) Das Intervall J heißt **rechtes maximales Existenzintervall** der Lösung $u \in C^1(J; \mathbb{R}^n)$, wenn keine Fortsetzung dieser Lösung auf ein Intervall $\tilde{J}$ mit $[t_0, +\infty[\cap \tilde{J} \neq [t_0, +\infty[\cap J$ existiert. Analog wird ein linkes maximales Existenzintervall der Lösung definiert.
Ein Intervall heißt maximales Existenzintervall, wenn es linkes und rechtes maximales Existenzintervall ist.

Das folgende Resultat stellt eine kleine Übung dar.

Lemma 2: Seien unter den in Definition 1 gegebenen Voraussetzungen $J := [t_0, b]$ $(b > t_0)$ und $u \in C^1(J; \mathbb{R}^n)$ Lösung der AWA (1.2).
Falls nun $u_1 \in C^1([b, \alpha[; \mathbb{R}^n)$ $(b < \alpha)$ Lösung der AWA

$$x' = f(t, x), \quad x(b) = u(b)$$

ist, so gehört die durch

$$\tilde{u} := \begin{cases} u(t), & \text{für } t \in J \\ u_1(t), & \text{für } t \in]b, \alpha[\end{cases}$$

auf $[t_0, \alpha[$ definierte Funktion $\tilde{u}$ zu $C^1([t_0, \alpha[; \mathbb{R}^n)$ und ist Lösung der AWA (1.2).

Die Sätze 6 und 13 aus § 3 führen ohne größere Mühe zu folgenden Resultaten, deren Beweis zur Übung überlassen sei.

Satz 3: (i) Die Funktion $f \in C([c_0, +\infty[\times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ $(c_0 \in \mathbb{R})$ genüge der folgenden Lipschitz-Bedingung:
$\forall\, a \geq c_0$: $\| f(t, x_1) - f(t, x_2) \| \leq L(a) \| x_1 - x_2 \|$ $\forall (t, x_1), (t, x_2) \in [c_0, a] \times \mathbb{R}^n$.
(Die Lipschitz-Konstante auf dem "Streifen" $[c_0, a] \times \mathbb{R}^n$ hängt i.a. von a ab.)
Dann besitzt die Cauchy-Aufgabe
(1.2) $x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$
für jedes $(t_0, x_0) \in [c_0, +\infty[\times \mathbb{R}^n$ genau eine Lösung $u \in C^1([c_0, +\infty[; \mathbb{R}^n)$.
(ii) Die Funktion $f \in C([c_0, +\infty[\times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ $(c_0 \in \mathbb{R})$ sei für alle $a \geq c_0$ auf der Menge $[c_0, a] \times \mathbb{R}^n$ beschränkt. Dann besitzt die Cauchy-Aufgabe
(1.2) $x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$
für jedes $(t_0, x_0) \in [c_0, +\infty[\times \mathbb{R}^n$ mindestens eine Lösung $u \in C^1([c_0, +\infty[; \mathbb{R}^n)$.

In der Folge benötigen wir einige Fakten aus der Geometrie des $\mathbb{R}^n$.
Wir verwenden aus technischen Gründen weiterhin die Maximum-Norm in $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\| := \max \{ |x_i| : i = 1, ..., n \}.$$

Seien $x \in \mathbb{R}^n$ und $D, E \subset \mathbb{R}^n$ beliebige Mengen.
Mit ∂D bezeichnen wir die Menge der Randpunkte von D, kurz, den Rand von D.
Weiter definieren wir:

$$\operatorname{dist}(x, D) := \inf \{ \|x - y\| : y \in D \}, \quad \operatorname{dist}(E, D) := \inf \{ \operatorname{dist}(x, D) : x \in E \}.$$

Es gilt (**Ü**): Falls $E \subset D$, E kompakt (= abgeschlossen und beschränkt) und D offen, so folgt $\operatorname{dist}(E, \partial D) > 0$.

Lemma 4: Seien $E \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $f \in C(E; \mathbb{R}^n)$ und $E_0 \subset E$ kompakt.
Dann existiert ein $\alpha > 0$ so, daß für alle $(t_0, x_0) \in E_0$ die Cauchy-Aufgabe (1.2) mindestens eine Lösung auf $|t - t_0| \leq \alpha$ besitzt.

Beweis: Wegen $E_0 \subset E$ kompakt und E offen gilt $\delta := \operatorname{dist}(E_0, \partial E) > 0$.

Die Menge $E^0 := \{ x \in E : \mathrm{dist}(x, E_0) \le \frac{\delta}{2} \}$ ist eine kompakte Teilmenge von E. Somit existiert $M := \max \{ \|f(t, x)\| : (t, x) \in E^0 \}$. Sei $(t_0, x_0) \in E_0$, dann gilt $\overline{B}_{\frac{\delta}{2}}(t_0, x_0) \subset E^0$.

Dann ist für die Menge $\overline{B}_{\frac{\delta}{2}}(t_0, x_0) = [t_0 - \frac{\delta}{2}, t_0 + \frac{\delta}{2}] \times \overline{B}_{\frac{\delta}{2}}(x_0)$ der Satz 12 von Peano anwendbar, wobei auf $\overline{B}_{\frac{\delta}{2}}(t_0, x_0)$ das Maximum von $\|f\|$ nicht M übertrifft.

Also existiert mindestens eine Lösung zur AWA mit $(t_0, x_0) \in E_0$, die auf $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ mit $\alpha := \min \{ \frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2M} \}$ existiert.

(Dieses α hängt nur ab von E, f, E_0, nicht jedoch vom speziellen $(t_0, x_0) \in E_0$.)

Bemerkung 5: Die nachfolgenden Ergebnisse sichern, daß unter den Bedingungen von Lemma 4 *alle* Lösungen der Cauchy-Aufgabe zu $(t_0, x_0) \in E_0$ mindestens auf dem Intervall $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ existieren. (Dazu werden die Bemerkung 4 (iii) aus § 3 und die Bemerkung 8 dieses § kombiniert.)

Satz 6: (**Fortsetzung der Lösung auf maximales Existenzintervall**)
Seien $E \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $f \in C(E; \mathbb{R}^n)$ und $(t_0, x_0) \in E$. Sei $u \in C^1(J; \mathbb{R}^n)$ eine Lösung der Anfangswertaufgabe

(1.2) $\qquad x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$

auf einem Intervall J mit $t_0 \in J$.
Dann läßt sich u auf ein maximales Existenzintervall $]\omega_-, \omega_+[$ fortsetzen.
Falls dabei $\omega_+ < +\infty$, so gilt für jede Folge (t_k) mit $t_k \in]t_0, \omega_+[$ und $t_k \to \omega_+$, daß die zugehörige Folge $(t_k, u(t_k))$ in E keine Häufungswerte besitzt.
Eine analoge Aussage gilt in Bezug auf ω_-.

Beweis: Wir führen den Beweis nur für die Aussagen in Bezug auf ω_+.
Hierzu zeigen wir zuerst die Existenz eines rechten offenen maximalen Existenzintervalls $[t_0, \omega_+[$.
Falls das Intervall J nach oben unbeschränkt ist, so folgt $\omega_+ = +\infty$, und der Beweis ist erbracht.
Sei also J nach oben beschränkt, und sei $\tau := \sup \{ t \in \mathbb{R} : t \in J \}$ das rechte Intervallende von J. Falls u auf kein Intervall $[t_0, \tau'[$ mit $\tau' > \tau$ fortsetzbar ist, so ist τ bereits maximal, also $\tau = \omega_+$, und u ist in ω_+ nicht definiert. Das heißt, J ist rechtsoffen. Würde nämlich u in ω_+ definiert sein, so wäre nach der Definition 1, § 1, der Lösung einer AWA $(\omega_+, u(\omega_+)) \in E$ innerer Punkt, und es gäbe zur AWA mit Anfangspunkt $(\omega_+, u(\omega_+))$ nach dem Satz von Peano eine Lösung, und u wäre damit über ω_+ hinaus fortsetzbar.
Also darf J als abgeschlossen angenommen werden, falls es nicht rechtsmaximal ist.
Zeigen die Fortsetzbarkeit der Lösung in diesem Falle. Dazu führen wir folgende Überlegungen durch:
Seien $E_1, E_2, \ldots$ offene Teilmengen von E mit folgenden Eigenschaften:

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, \qquad \overline{E}_1, \overline{E}_2, \ldots \text{ kompakt}, \qquad \overline{E}_k \subset E_{k+1}.$$

(Solche Folgen von Teilmengen existieren (**Ü**))

Also gilt $(\tau, u(\tau)) \in \bar{E}_{k_0}$ für ein geeignetes $k_0 \in \mathbb{N}$.
Nach Lemma 4 existiert dann ein $\alpha_{k_0} > 0$ so, daß auf $[\tau, \tau + \alpha_{k_0}]$ eine Lösung der Cauchy-Aufgabe

$$x' = f(t, x), \quad x(\tau) = u(\tau)$$

existiert. Damit läßt sich die Lösung u von J auf $J \cup [\tau, \tau + \alpha_{k_0}]$ fortsetzen (Lemma 2). Dabei behalten wir die Bezeichnung u für die Fortsetzung bei.

Dann gilt $(\tau + \alpha_{k_0}, u(\tau + \alpha_{k_0})) \in E$. Falls $(\tau + \alpha_{k_0}, u(\tau + \alpha_{k_0})) \in \bar{E}_{k_0}$, so läßt sich die (fortgesetzte) Lösung von $J \cup [\tau, \tau + \alpha_{k_0}]$ auf $J \cup [\tau, \tau + 2\alpha_{k_0}]$ fortsetzen.

Da $\bar{E}_{k_0}$ kompakt ist, gibt es ein natürliches m_0, mit $(\tau + m_0\alpha_{k_0}, u(\tau + m_0\alpha_{k_0})) \notin \bar{E}_{k_0}$.
Dann gibt es wegen $(\tau + m_0\alpha_{k_0}, u(\tau + m_0\alpha_{k_0})) \in E$ ein geeignetes $k_1 \in \mathbb{N}$ mit

$(\tau + m_0\alpha_{k_0}, u(\tau + m_0\alpha_{k_0})) \in \bar{E}_{k_1}$. Also existiert wiederum ein $\alpha_{k_1} > 0$ so, daß die fortgesetzte Lösung - die stets mit u bezeichnet sei - auf $J \cup [\tau, \tau + m_0\alpha_{k_0} + \alpha_{k_1}]$ fortgesetzt werden kann.

Dann gibt es ein natürliches m_1, mit $(\tau + m_0\alpha_{k_0} + m_1\alpha_{k_1}, u(\tau + m_0\alpha_{k_0} + m_1\alpha_{k_1})) \notin \bar{E}_{k_1}$.
Bei Fortsetzung dieses Prozesses erhalten wir eine streng monoton wachsende Folge von Zahlen

$$b_j := \tau + \sum_{s=0}^{j} m_s\alpha_{k_s}$$

Wir definieren $\omega_+ = \lim_{j \to \infty} b_j$, dann ist nach Konstruktion eine Fortsetzung von u auf

$J \cup [\tau, \tau + \omega_+[$ definiert. Wegen $(b_j, u(b_j)) \notin \bar{E}_{k_j}$ kann die Folge $((b_j, u(b_j)))$ keinen Häufungswert in E besitzen.
Falls $\omega_+ = +\infty$, so ist der Beweis fertig. Falls $\omega_+ < +\infty$, so ist u nicht in ω_+ definiert. Sonst wäre $(\omega_+, u(\omega_+)) \in E$.
Die Stetigkeit der Lösung in ω_+ würde zum Widerspruch führen, da dann die Folge $((b_j, u(b_j)))$ den Grenzwert $(\omega_+, u(\omega_+)) \in E$ besitzen würde, obwohl sie keinen Häufungswert in E besitzen kann.
Damit haben wir unsere ursprüngliche Lösung $u \in C^1(J; \mathbb{R}^n)$ auf ein (nicht eindeutig bestimmtes) rechtes offenes maximales Existenzintervall $[t_0, \omega_+[$ fortgesetzt.
Die Behauptung, daß keine Folge (t_k) mit $t_k \in [t_0, \omega_+[$ und $t_k \to \omega_+$ existiert, für die die zugehörige Folge $((t_k, u(t_k)))$ in E einen Häufungswert besitzt, folgt sofort aus dem folgenden technischen Lemma:

Lemma 7: Seien $E \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $f \in C(E; \mathbb{R}^n)$, $(t_0, x_0) \in E$ und sei $u \in C^1([t_0, \delta[; \mathbb{R}^n)$ mit $\delta < \infty$ eine Lösung der Anfangswertaufgabe
(1.2) $\quad x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0.$
Es gebe ferner eine Folge (t_k) $(k \in \mathbb{N})$ mit $t_k \in [t_0, \delta[$ und $t_k \to \delta$ derart, daß der Grenzwert $\lim_{k \to \infty} u(t_k) = u_0$ existiert mit $(\delta, u_0) \in E$.
Dann gelten $\lim_{t \to \delta - 0} u(t) = u_0$ und $u \in C^1([t_0, \delta]; \mathbb{R}^n)$ ist Lösung der AWA (1.2).

Beweis: Seien $\varepsilon > 0$ und $M := M(\varepsilon) > 1$ so, daß

$$[\delta - \varepsilon, \delta]\times\bar{B}_\varepsilon(u_0) \subset E, \qquad \|f(t, x)\| \le M, \ \forall\ (t, x) \in [\delta - \varepsilon, \delta]\times\bar{B}_\varepsilon(u_0).$$

Nach Voraussetzung existiert dann ein $k\in\mathbb{N}$ so, daß

$$t_k\in[\delta - \tfrac{\varepsilon}{2M}, \delta[\ \text{ und } \ \|u(t_k) - u_0\| \le \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Dann gilt

(4.1) $$\forall\ t\in[t_k, \delta[\quad : \quad \|u(t) - u(t_k)\| < M\,(\delta - t_k) \le \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Denn, würde nicht (4.1) gelten, so gäbe es ein mimimales $t^1\in[t_k, \delta[$ mit

(4.2) $$\|u(t^1) - u(t_k)\| = M\,(\delta - t_k) \le \tfrac{\varepsilon}{2} \qquad \text{(Stetigkeit von } u\text{ !).}$$

Dann folgt aber

$$\|u(t) - u_0\| \le \|u(t) - u(t_k)\| + \|u(t_k) - u_0\| \le \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \forall\ t\in[t_k, t^1].$$

Aus $u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\,ds$ und $\|u(t) - u_0\| \le \varepsilon \quad \forall\ t\in[t_k, t^1]$ folgt

$\|u'(t)\| \le M \ \forall\ t\in[t_k, t^1]$. Der Mittelwertsatz liefert dann

$$\|u(t^1) - u(t_k)\| \le M\,(t^1 - t_k) < M\,(\delta - t_k),$$

was ein Widerspruch zu (4.2) ist. Also gilt (4.1) und es folgen

$\lim\limits_{t\to\delta-0} u(t) = u_0$ und wegen $u'(t) = f(t, u(t))$ ist $u\in C^1([t_0, \delta]; \mathbb{R}^n)$.

Bemerkungen 8: Im allgemeinen ist die Fortsetzung einer Lösung nicht eindeutig. Bei jedem Fortsetzungsschritt wählen wir eine mögliche Fortsetzung aus. Somit hängt also ω_+ von der speziellen Art der Fortsetzungen ab.
(**Ü**) Vereinfachen Sie den Beweis von Satz 6 unter lokaler Einzigkeitsvoraussetzung.
Auf jedem Fall gilt:
Eine Lösung gemäß Satz 6 ist entweder auf ihrem maximalen Existenzintervall gegeben oder sie läßt sich auf ein solches fortsetzen. Dabei gilt stets:
Der Graph jeder Fortsetzung einer Lösung (oder der Lösung selbst im ersten Fall) verläßt jede kompakte Teilmenge von E.

Angesichts dieser letzten Bemerkung ergeben sich aus Satz 6 wichtige

Folgerungen 9: Die Voraussetzungen des Satzes 6 seien gegeben.
(i) Es gelte außerdem $E = D\times\Omega$, D, Ω offen, $E_0\subset\Omega$ kompakt.
Falls für eine Lösung $u\in C^1([t_0, \omega_+[; \mathbb{R}^n)$ der AWA (1.2) gilt:

$$u(t)\in E_0 \qquad \forall\ t\in[t_0, \omega_+[,$$

so folgt $\omega_+\in\partial D$.

(ii) Die (offene) Menge E enthalte eine Menge der Art $[t_0, +\infty[\times\bar{B}_\delta(x_0)$ mit $\delta > 0$. Für jede Lösung u der Anfangswertaufgabe

(1.2) $$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

gelte die *a-priori-Abschätzung*

(4.3) $$\|u(t) - x_0\| \le \delta \text{ auf } [t_0, \omega_+[.$$

Dann läßt sich jede Lösung von (1.2) auf $[t_0, +\infty[$ fortsetzen.
(iii) Die (offene) Menge E enthalte $[t_0, +\infty[\times\mathbb{R}^n$. Für jede Lösung u der Anfangswertaufgabe (1.2) gelte die a-priori-Abschätzung

(4.4) $$\forall\ a \ge t_0 \quad : \quad \|u(t) - x_0\| \le \delta(a) \text{ auf } [t_0, \omega_+[\cap [t_0, a] \text{ mit } \delta(a) \ge 0.$$

Dann läßt sich jede Lösung von (1.2) auf $[t_0, +\infty[$ fortsetzen.

Beweis: (i) Folgt unmittelbar aus Satz 6 und Bemerkung 8.

(ii) Für jedes $b > 0$ ist die Menge $[t_0, b]\times\bar{B}_\delta(x_0)$ kompakt und in E enthalten. Dann gibt es eine weitere kompakte Menge E_0, mit $E_0 \subset E$ und

$[t_0, b]\times\bar{B}_\delta(x_0) \subset \text{int}(E_0)$. Der Graph jeder Lösung muß nach Satz 3 diese kompakte Menge E_0 verlassen, wegen (4.3) und Teil (i) geht das nur, indem die Lösung diese Menge in $t = b$ verläßt. Also gilt $\omega_+ \geq b$. Aus der Willkür von b folgt die Behauptung.
(iii) Modifikation von (ii).

Beispiele 10: (i) Seien $E :=]-\infty, 0[\times\mathbb{R}$ und $(t_0, x_0)\in E$. Betrachten die AWA

(4.5) $\qquad x' = f(t, x) := -\frac{1}{t^2}\cos(\frac{1}{t})\cos^2(x), \quad x(t_0) = x_0.$

Die Lösung dieser AWA zu einer DG mit trennbaren Variablen lautet (**Ü**)

a) Falls $x_0 = (k + \frac{1}{2})\pi$ für ein $k\in\mathbb{N}$, so ist $u(t) = (k + \frac{1}{2})\pi$ für $t\in]-\infty, 0[$.

b) Falls $x_0 \in](k - \frac{1}{2})\pi, (k + \frac{1}{2})\pi[$ für ein $k\in\mathbb{N}$, so ist

$$u(t) = \arctan(\sin(\tfrac{1}{t}) - \sin(\tfrac{1}{t_0}) + \tan(x_0)) + k\pi \quad \text{für } t\in]-\infty, 0[.$$

In beiden Fällen ist $\omega_- = -\infty$ und $\omega_+ = 0$ für die einzigen Lösungen zu allen zulässigen Anfangswerten. Die analogen Voraussetzungen von Satz 3 (i) sind erfüllt (**Ü**). Falls $x_0 \neq (k + \frac{1}{2})\pi$, so oszilliert die Lösung für $t \to \omega_+ = 0$, wobei ihr Graph jede kompakte Teilmenge von E verläßt. Die "Breite" der Oszillationen hängt vom Anfangswert ab! (Skizze!)

(ii) Seien $E := \mathbb{R}^2$ und $f(t, x) := \begin{cases} \sqrt{|x|}, & \text{für } |x| \leq 1 \\ x^2, & \text{für } |x| \geq 1 \end{cases}$.

Betrachten die AWA

(4.6) $\qquad x' = f(t, x), \quad x(0) = 0.$

Diese Aufgabe in trennbaren Variablen ist lösbar. Unter Beachtung der Beispiele (1.18) und (1.19) gelangen wir zur Lösungsschar (**Ü**):

$$u(t) := \begin{cases} \frac{1}{c - 3 - t}, & \text{falls } c - 3 < t \leq c - 2 \\ -\frac{1}{4}(t - c)^2, & \text{falls } c - 2 \leq t \leq c \\ 0, & \text{falls } c \leq t \leq d \\ \frac{1}{4}(t - d)^2, & \text{falls } d \leq t \leq d + 2 \\ \frac{1}{d + 3 - t}, & \text{falls } d + 2 \leq t < d + 3 \end{cases}$$

wobei $c \leq 0 \leq d$ beliebige Konstanten sind.
Außerdem löst noch die triviale Lösung $u(t) := 0$ für $t\in\mathbb{R}$ die AWA.
Zur Lösung $u(t) := 0$ auf $[c,d]$ (mit $c < d$) existieren also Fortsetzungen mit jedem maximalen Existenzintervall $]\omega_-, \omega_+[$, wenn nur $\omega_- \leq c - 3$ oder $\omega_- = -\infty$ und $\omega_+ \geq d + 3$ oder $\omega_+ = \infty$ gewählt werden.
Diskutieren Sie das Lösungsverhalten für die allgemeinere AB $x(t_0) = x_0$ (**Ü**).

Eine wichtige Frage - nicht nur bei GDG - ist natürlich, wie sogenannte a-priori-Abschätzungen von (angenommenen) Lösungen erhalten werden können. Als nächstes beweisen wir eine wichtige Ungleichung.

Satz 11: (**Gronwallsches Lemma**)
Seien $u, v \in C([a, b])$ $(a < b)$ mit $u(t), v(t) \geq 0$ auf $[a, b]$. Für ein $c \geq 0$ gelte:

(4.7) $$u(t) \leq c + \int_a^t v(s)\, u(s)\, ds \qquad \forall\, t \in [a, b].$$

Dann gilt auch:

(4.8) $$u(t) \leq c \exp\Big(\int_a^t v(s)\, ds \Big) \qquad \forall\, t \in [a, b].$$

Speziell gilt dabei. Falls $c = 0$, so $u(t) = 0$ auf $[a, b]$.

Beweis: Sei zuerst $c > 0$. Wir setzen $U(t) := c + \int_a^t v(s)\, u(s)\, ds$, $t \in [a, b]$. Also gilt

$u(t) \leq U(t)$, $0 < c \leq U(t)$ auf $[a, b]$.

Somit folgt aus (4.7) $U'(t) = v(t)\, u(t) \leq v(t)\, U(t)$ und damit $\frac{U'}{U} \leq v$.

Diese letzte Ungleichung integrieren wir über $[a, t]$, somit erhalten wir

$$\ln(U(t)) - \ln(U(a)) \leq \int_a^t v(s)\, ds,$$

wegen $U(a) = c$ folgt hieraus $U(t) \leq c \exp\Big(\int_a^t v(s)\, ds \Big)$, daraus die Behauptung.

Im Fall $c = 0$ gilt die Voraussetzung (4.7) für jedes positive c. Also gilt auch die Schlußfolgerung (4.8) für jedes positive c.
Der Grenzübergang für $c \to 0$ liefert $u = 0$.

Folgerung 12: (Einzigkeit der Lösung im Satz von Picard / Lindelöf)
Seien unter den Bedingungen von Satz 3 aus § 3 die Funktionen

$u_1, u_2 \in C^1([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]; \overline{B}_b(x_0))$ Lösungen der Cauchy-Aufgabe
(1.2) $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$.
Dann gilt $u_1 = u_2$ auf $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

Beweis: Beide Lösungen erfüllen natürlich (Lemma 2 § 3) die Integralgleichung

(3.3) $$u_i(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_i(s))\, ds \quad \forall t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha],\ i = 1, 2.$$

Bezeichnen wir $u(t) := u_1(t) - u_2(t)$, dann gilt offenbar

$$u(t) = \int_{t_0}^t \big(f(s, u_1(s)) - f(s, u_2(s)) \big)\, ds.$$

Die Lipschitz-Stetigkeit sichert dann

$$\|u(t)\| \leq L \int_{t_0}^t \|u_1(s) - u_2(s)\|\, ds = L \int_{t_0}^t \|u(s)\|\, ds \quad \text{auf } [t_0, t_0 + \alpha].$$

Auf die skalare Funktion $\|u\|$ wird das Gronwallsche Lemma angewandt, mit der Situation $c = 0$ und $v(t) = L$ (zuerst für $t \geq t_0$, danach durch Transformation für $t \leq t_0$ (**Ü**)) auf $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.
Also ergibt sich $\|u\| = 0$, was nur für $u = 0$ und somit $u_1(t) = u_2(t)$ möglich ist.

Folgerung 13 (Fortsetzbarkeit von Lösungen) Die offene Menge $E \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ enthalte die Menge $[t_0, b[\times \mathbb{R}^n$ mit $b > t_0$. Die Funktion $f \in C(E; \mathbb{R}^n)$ genüge der Abschätzung

(4.9) $\|f(t, x)\| \le c_1 \|x\| + c_2 \quad \forall (t, x) \in [t_0, b[\times\mathbb{R}^n$ mit $c_1, c_2 \ge 0$.
Dann existiert jede Lösung u der Anfangswertaufgabe
(1.2) $x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$
für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}^n$ auf $[t_0, b[$, also $\omega_+ \ge b$.
Zusatz: Gelten die Voraussetzungen für beliebig großes b, so ist für jede Lösung der Aufgabe (1.2) $\omega_+ = +\infty$.

Beweis: Wir leiten für jede mögliche Lösung der AWA (1.2) eine a-priori-Abschätzung her und wenden dann die Folgerungen 9 (i) bzw. (iii) an.
Sei also $u \in C^1([t_0, \omega_+[; \mathbb{R}^n)$ eine Lösung von (1.2) (O.B.d.A. sei $b > \omega_+$), dann gilt also

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds \quad \forall t \in [t_0, \omega_+[.$$

Unter Beachtung von (4.9) erhalten wir hieraus

$$\|u(t)\| \le \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} (c_1 \|u(s)\| + c_2)\, ds.$$

Das Gronwallsche Lemma 11 führt zu

$$\|u(t)\| \le (\|x_0\| + c_2(b - t_0))e^{(b - t_0) c_1}$$

und die erwähnten Folgerungen sind anwendbar.

Beispiele 14: (Fortsetzbarkeit von Lösungen, a-priori-Abschätzungen)
(i) Betrachten die Aufgabe
(4.10) $x' = -x^3, \quad x(0) = x_0, \quad x_0 > 0.$
Die Gleichung (4.10) besitzt trennbare Variable, ist also elementar zu integrieren (**Ü**)
Die Lösung der AWA (4.5) ist demnach

(4.11) $u(t) := \left(2t + \frac{1}{x_0^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$ für $t \ge 0$.

Wir wollen zeigen, wie das qualitative Verhalten der Lösung untersucht werden kann. Der Satz von Picard / Lindelöf ist offenbar anwendbar und sichert ein minimales Existenzintervall $\left[-\frac{4}{27x_0^2}, \frac{4}{27x_0^2} \right]$ (**Ü**).

Wir fragen, ob sich die Lösung auf $[0, \infty[$ fortsetzen läßt. Nach dem Fortsetzungssatz 6 existiert genau eine (lokale Lipschitz-Stetigkeit!) Lösung auf $[0, \omega_+[$, wobei das ω_+ erst einmal nicht bekannt ist. Wir multiplizieren die Gleichung (4.10) mit $u(t)$ und integrieren von 0 bis $t < \omega_+$ und erhalten

(4.12) $$\frac{1}{2} u^2(t) - \frac{1}{2} u^2(0) + \int_0^t u^4(s)\, ds = 0.$$

Also folgt unter Beachtung der Anfangsbedingung
(4.13) $|u(t)| \le x_0 \quad$ auf $[0, \omega_+[$.
Nach Folgerung 9 (ii) gilt dann $\omega_+ = \infty$.
Es ist leicht zu sehen, daß wegen der Eindeutigkeit die Lösung die Gerade $x = 0$ nicht schneiden kann (**Ü**). Aus der Stetigkeit und $x_0 > 0$ folgt dann $0 < u(t) \le x_0$, was durch die explizite Darstellung der Lösung (4.11) bestätigt wird.
(ii) Die Überlegung, daß eine Lösung nicht ihr Vorzeichen wechseln kann, hilft manchmal sogar beim Erhalt der a-priori-Abschätzung. Betrachten die AWA
(4.14) $x' = -x^2, \quad x(0) = x_0, \quad x_0 > 0.$
Die exakte Lösung lautet (**Ü**)

(4.15) $u(t) := (t + \frac{1}{x_0})^{-1}$ für $t \geq 0$.

Wiederum multiplizieren wir die Gleichung (4.14) mit $u(t)$ und integrieren von 0 bis $t < \omega_+$. Diesmal erhalten wir

(4.16) $$\frac{1}{2} u^2(t) - \frac{1}{2} u^2(0) + \int_0^t u^3(s)\, ds = 0, \quad \text{also}$$

$$u^2(t) + 2\int_0^t u^3(s)\, ds = x_0^2.$$

Ohne zusätzliche Information wissen wir nicht, ob das Integral nichtnegativ ist.
Da aber $x_0 > 0$, muß die Lösung während ihrer Existenz größer null bleiben (**Ü**).
Somit erhalten wir $0 < u(t) \leq x_0$, was durch (4.15) bestätigt wird.
(iii) Nun ein Beispiel, bei dem wir nicht mehr "nachrechnen" können.

(4.17) $x' = -x^3 + f(t), \qquad x(0) = x_0, \qquad f \in C(\mathbb{R})$.

Die allgemeinen Sätze garantieren uns die Existenz und Einzigkeit einer Lösung auf einem maximalen rechten Intervall $[0, \omega_+[$.
Multiplikation der Gleichung mit $u(t)$ und Integration von 0 bis $t < \omega_+$ ergeben:

(4.18) $$\frac{1}{2} u^2(t) + \int_0^t u^4(s)\, ds = \frac{1}{2} x_0^2 + \int_0^t f(s)u(s)\, ds \leq \frac{1}{2} x_0^2 + \frac{1}{2} \int_0^t (f^2(s) + u^2(s))\, ds.$$

Hieraus erhalten wir

$$u^2(t) \leq x_0^2 + \int_0^t f^2(s)\, ds + \int_0^t u^2(s)\, ds.$$

Das Gronwallsche Lemma liefert dann natürlich

(4.19) $$u^2(t) \leq (x_0^2 + \int_0^t f^2(s)\, ds)e^t \qquad \forall\, t \in [0, \omega_+[.$$

Nach der Folgerung 9 (iii) existiert dann die Lösung auf $[0, \infty[$.

Das folgende Resultat sei als Übung zur Anwendung des Gronwallschen Lemmas gedacht.

Satz 15: Die Funktion $f \in C([0, T] \times \bar{B}_b(x_0); \mathbb{R}^n)$ $(T, b > 0, \bar{B}_b(x_0) \subset \mathbb{R}^n)$
genüge der Lipschitz-Bedingung

$$\| f(t, x_1) - f(t, x_2) \| \leq L \| x_1 - x_2 \| \qquad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in [0, T] \times \bar{B}_b(x_0)$$

und sei $u \in C^1([0, T]; \bar{B}_b(x_0))$ die Lösung der Cauchy-Aufgabe

$$x' = f(t, x), \quad x(0) = x_0.$$

Sei weiter $v \in C^1([0, T]; \bar{B}_b(x_0))$ eine Funktion, die den Bedingungen

(4.20) $v(0) = x_0, \qquad \| v'(t) - f(t, v(t)) \| \leq \varepsilon \qquad \forall\, t \in [0, T]$ für ein $\varepsilon > 0$

genügt. Dann gilt

$$\| u(t) - v(t) \| \leq \varepsilon T e^{LT} \qquad \forall\, t \in [0, T].$$

Der Sinn dieses Satzes besteht darin, daß aus der Kenntnis der Abschätzung in (4.20) ("Maß des Nichterfüllens der GDG $x' = f(t, x)$ durch die Funktion v") eine Abweichung der tatsächlichen Lösung u von der näherungsweise als Lösung angenommenen Funktion v folgt.
In dieser Richtung sind schärfere Aussagen möglich ($\rightarrow$ Heuser, GDG, Walter).

§ 5 Abhängigkeit der Lösungen von Parametern

Oft liegt die Situation vor, daß eine GDG nicht nur die gesuchte Funktion x und die Variable t (oft mit der Zeit assoziiert), sondern weitere Größen, sogenannte Parameter enthält. Z.B. kann es sein, daß der Wachstumsprozeß von Bakterien von der Temperatur abhängt. In diesem Falle würde die Wachstumsrate, ggf. auch die Sterberate, eine Funktion der Umgebungstemperatur sein.
Natürlich können auch mehrere skalare Parameter oder sogar Parameter aus metrischen Räumen im Spiel sein. Wir wollen das Problem mathematisch formulieren, wobei wir berücksichtigen, daß auch die Anfangsbedingung von Parametern abhängen darf.
Seien also $E := D\times\Omega \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, $D\subset\mathbb{R}$, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ und $\Lambda\subset\mathbb{R}^m$ Gebiete und $f\in C(E\times\Lambda; \mathbb{R}^n)$. Seien weiter zwei Funktionen $\tau : \Lambda \to D$ und $\xi : \Lambda \to \Omega$ gegeben.
Wir betrachten die Anfangswertaufgabe mit Parameter:

(5.1) $\qquad x' = f(t, x, \lambda), \qquad x(\tau(\lambda)) = \xi(\lambda).$

Es ist natürlich möglich, für ein fixiertes $\lambda\in\Lambda$ die Aufgabe (5.1) mit den bisherigen Existenz- und Einzigkeitssätzen zu untersuchen. Meist interessiert aber auch, wie sich die Lösung ändert, wenn sich der Parameter ändert.
Wir wollen hier zuerst an den Satz 3 aus § 3 von Picard / Lindelöf anknüpfen und ein einfaches Resultat beweisen für den Fall, daß nur die "rechte Seite" f vom Parameter abhängt.

Satz 1: (Picard / Lindelöf - stetige Abhängigkeit vom Parameter)

Die Funktion $f\in C([t_0 - a, t_0 + a]\times\overline{B}_b(x_0)\times W; \mathbb{R}^n)$ $(a, b > 0, \overline{B}_b(x_0) \subset \mathbb{R}^n, W\subset\mathbb{R}$, kompaktes Intervall) genüge der Lipschitz-Bedingung

(5.2) $\quad \| f(t, x_1, \lambda) - f(t, x_2, \lambda) \| \le L \| x_1 - x_2 \|$

$$\forall (t, x_1, \lambda), (t, x_2, \lambda) \in [t_0 - a, t_0 + a]\times\overline{B}_b(x_0)\times W.$$

Seien $M := \max\{ \|f(t, x, \lambda)\| : (t, x, \lambda)\in[t_0 - a, t_0 + a]\times\overline{B}_b(x_0)\times W \}$ und $\alpha := \min\{ a, \frac{b}{M} \}$.
Dann besitzt die Cauchy-Aufgabe

(5.3) $\qquad x' = f(t, x, \lambda), \qquad x(t_0) = x_0$

auf dem Intervall $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ genau eine Lösung $u_\lambda\in C^1([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]; \overline{B}_b(x_0))$.

Dabei ist die Abbildung $\lambda\in W \to u_\lambda\in C^1([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]; \overline{B}_b(x_0))$ auf W gleichmäßig stetig (bezüglich der Maximum-Norm auf $C^1([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]; \overline{B}_b(x_0))$).

Beweis: Der Beweis des Satzes 3 aus § 3 ist für jedes fixierte $\lambda\in W$ anwendbar, und wir erhalten genau eine Lösung $u_\lambda\in C^1([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]; \overline{B}_b(x_0))$.
Wird bei diesem Beweis die nullte Iteration $u_0(t) := x_0$ auf $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ unabhängig von λ gewählt, so hängen

$$u_1(t, \lambda) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u_0(s), \lambda)\, ds \quad \forall\, t\in[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \ \forall\, \lambda\in W$$

und alle weiteren Iterationen stetig von t und λ ab. Die Argumentation mit der konvergenten Majorante und dem Satz von Weierstraß liefert dann, daß

$$u(t, \lambda) := \lim_{k\to\infty} u_k(t, \lambda)$$

als gleichmäßiger Grenzwert eine auf $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]\times W$ stetige Funktion darstellt.

Wir bezeichnen $u_\lambda(t) := u(t, \lambda)$, dann gilt $u_\lambda \in C([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]; \bar{B}_b(x_0))$ und u_λ ist Lösung der Integralgleichung (3.3), also auch Lösung der AWA (5.3), und es ist

$u_\lambda \in C^1([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]; \bar{B}_b(x_0))$.
Zeigen nun, daß die Abbildung

$$\lambda \in W \rightarrow u_\lambda \in C^1([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]; \bar{B}_b(x_0))$$

auf W gleichmäßig stetig ist.
Sei $\varepsilon > 0$. Als stetige Funktion ist u auf der abgeschlossenen Menge $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]\times W$ gleichmäßig stetig, also existiert ein $\delta > 0$, so daß gilt:

$$\forall\, t_1, t_2 \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha],\ \forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in W \text{ mit } |t_1 - t_2| + |\lambda_1 - \lambda_2| < \delta \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \|u(t_1, \lambda_1) - u(t_2, \lambda_2)\| < \varepsilon.$$

Wählen nun $t_1 = t_2 = t$, dann folgt natürlich aus $\lambda_1, \lambda_2 \in W$ mit $|\lambda_1 - \lambda_2| < \delta$ die Abschätzung

(5.4) $$\|u(t, \lambda_1) - u(t, \lambda_2)\| < \varepsilon \qquad \forall\, t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha].$$

Hieraus folgt

(5.5) $$\|u_{\lambda_1} - u_{\lambda_2}\|_0 := \max \{ \|u_{\lambda_1}(t) - u_{\lambda_2}(t)\| : t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \} \le \varepsilon,$$

falls nur $\lambda_1, \lambda_2 \in W$ mit $|\lambda_1 - \lambda_2| < \delta$, was bedeutet, daß die Abbildung

$$\lambda \in W \rightarrow u_\lambda \in C([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]; \bar{B}_b(x_0))$$

auf W gleichmäßig stetig ist (bezüglich der Maximum-Norm im normierten Raum

$C([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]; \bar{B}_b(x_0))$).

Zeigen, daß diese Abbildung auch mit Werten in $C^1([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]; \bar{B}_b(x_0))$ gleichmäßig auf W ist. Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in W$, dann erfüllen u_{λ_1} und u_{λ_2} die DG (5.3). Es gilt also (beachte die Lipschitz-Stetigkeit (5.2))

$$\|u'_{\lambda_1}(t) - u'_{\lambda_2}(t)\| \le \| f(t, u_{\lambda_1}(t), \lambda_1)\, ds - f(t, u_{\lambda_2}(t), \lambda_2) \| \le$$
(5.6) $$\le \| f(t, u_{\lambda_1}(t), \lambda_1)\, ds - f(t, u_{\lambda_1}(t), \lambda_2) \| + \| f(t, u_{\lambda_1}(t), \lambda_2)\, ds - f(t, u_{\lambda_2}(t), \lambda_2) \| \le$$
$$\le \| f(t, u_{\lambda_1}(t), \lambda_1)\, ds - f(t, u_{\lambda_1}(t), \lambda_2) \| + L \|u_{\lambda_1}(t) - u_{\lambda_2}(t)\| \text{ für } t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha].$$

Die gleichmäßige Stetigkeit von f auf der Menge $[t_0 - a, t_0 + a]\times\bar{B}_b(x_0)\times W$ sichert, daß zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta_1 > 0$ existiert, so daß aus $\lambda_1, \lambda_2 \in W$ mit $|\lambda_1 - \lambda_2| < \delta_1$ folgt $\| f(t, u_{\lambda_1}(t), \lambda_1)\, ds - f(t, u_{\lambda_1}(t), \lambda_2) \| < \varepsilon \quad \forall\, t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.
Wählen wir nun $\delta_2 := \min\{\delta_1, \delta\}$ (> 0), so erhalten wir aus (5.4) und (5.6)

$$\|u'_{\lambda_1}(t) - u'_{\lambda_2}(t)\| \le \varepsilon + L\varepsilon \qquad \text{für } t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$$

Auf der linken Seite nehmen wir das Maximum für alle $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ und erhalten

(5.7) $$\|u'_{\lambda_1} - u'_{\lambda_2}\|_0 \le \varepsilon + L\varepsilon \qquad \text{für}$$

Zusammen mit (5.5) besagt (5.7)

$$\|u_{\lambda_1} - u_{\lambda_2}\|_1 := \|u_{\lambda_1} - u_{\lambda_2}\|_0 + \|u'_{\lambda_1} - u'_{\lambda_2}\|_0 \le 2\varepsilon + L\varepsilon.$$

Also ist die Abbildung

$$\lambda \in W \rightarrow u_\lambda \in C^1([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]; \bar{B}_b(x_0))$$

auf W gleichmäßig stetig.

Der folgenden Satz stellt eine Verallgemeinerung des vorigen dar.

Satz 2: (Stetige Abhängigkeit vom Parameter und Anfangswerten)
Seien $E := D\times\Omega \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, $D\subset\mathbb{R}$, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ und $\Lambda\subset\mathbb{R}^m$ offene Mengen und die Funktion $f\in C(E\times\Lambda; \mathbb{R}^n)$ genüge der folgenden Lipschitz-Bedingung
(5.8) $\quad \| f(t, x_1, \lambda) - f(t, x_2, \lambda) \| \le L(\lambda) \| x_1 - x_2 \| \ \forall (t, x_1, \lambda), (t, x_2, \lambda) \in E\times\Lambda,$
dabei sei die Funktion $L : \Lambda \to \mathbb{R}_+$ in $\lambda_0\in\Lambda$ stetig.
Die Funktionen $\tau : \Lambda \to D$ und $\xi : \Lambda \to \Omega$ seien ebenso in λ_0 stetig.
(i) Dann existieren ein $\eta = \eta(\lambda_0) > 0$, $\alpha_0 = \alpha_0(\lambda_0) > 0$ und ein $a = a(\lambda_0) > 0$ derart, daß die AWA mit Parameter
(5.1) $\quad x' = f(t, x, \lambda), \qquad x(\tau(\lambda)) = \xi(\lambda)$

für jedes $\lambda\in\overline{B}_\eta(\lambda_0)$ auf dem Intervall $J := [\tau(\lambda) - \alpha_0, \tau(\lambda) + \alpha_0] \subset D$ genau eine Lösung $u_\lambda\in C^1(J; \overline{B}_{\frac{a}{2}}(\xi(\lambda)))$ besitzt.

(ii) Weiter existiert ein $\eta_1 = \eta_1(\lambda_0) > 0$ derart, daß die AWA (5.1) für jedes $\lambda\in\overline{B}_{\eta_1}(\lambda_0)$ genau eine Lösung $u_\lambda\in C^1(J_0; \overline{B}_a(\xi(\lambda_0)))$ mit $J_0 := [\tau(\lambda_0) - \frac{\alpha_0}{2}, \tau(\lambda_0) + \frac{\alpha_0}{2}]$ besitzt. Dabei ist die Abbildung $\lambda\in\overline{B}_{\eta_1}(\lambda_0) \to u_\lambda\in C^1(J_0; \overline{B}_a(\xi(\lambda_0)))$ in λ_0 stetig.

Beweis: (i) Wegen $(\tau(\lambda_0), \xi(\lambda_0)) \in E$ (E offen!) existiert eine kompakte Menge der Art $[\tau(\lambda_0) - a, \tau(\lambda_0) + a] \times \overline{B}_a(\xi(\lambda_0)) \in E$, wobei $a = a(\lambda_0) > 0$.
Aus der Stetigkeit der Funktionen τ, ξ und L in λ_0 existiert dann ein $\eta = \eta(\lambda_0) > 0$ so, daß $\quad \forall\, \lambda\in\overline{B}\eta(\lambda_0) \ : \ \tau(\lambda)\in[\tau(\lambda_0) - \frac{a}{2}, \tau(\lambda_0) + \frac{a}{2}], \ \xi(\lambda)\in\overline{B}_{\frac{a}{2}}(\lambda_0), \ |L(\lambda) - L(\lambda_0)| \le a.$

Sei $M_0 := \max \{ \|f(t, x, \lambda)\| : t\in[\tau(\lambda_0) - a, \tau(\lambda_0) + a], \ x\in\overline{B}_a(\xi(\lambda_0)), \ \lambda\in\overline{B}\eta(\lambda_0)\}$,

für jedes $\lambda\in\overline{B}\eta(\lambda_0)$ liegt dann der Punkt der Anfangswerte $(\tau(\lambda), \xi(\lambda))$ in $[\tau(\lambda_0) - \frac{a}{2}, \tau(\lambda_0) + \frac{a}{2}]\times\overline{B}_{\frac{a}{2}}(\lambda_0)$. Nach dem Satz 3 (Picard / Lindelöf) aus § 3 existiert dann für diese Anfangswerte auf jedem Intervall $J := [\tau(\lambda) - a_0, \tau(\lambda) + a_0]$ genau ein Lösung $u_\lambda\in C^1(J; \overline{B}_{\frac{a}{2}}(\xi(\lambda)))$ der AWA (5.1), wobei $\alpha_0 := \min \{ \frac{a}{2}, \frac{a}{2M_0} \}$ gewählt werden kann.
(ii) Aus der Stetigkeit der Funktion τ folgt die Existenz eines $\eta_1 = \eta_1(\lambda_0) > 0$ derart, daß für jedes $\lambda\in\overline{B}_{\eta_1}(\lambda_0)$ gilt $\tau(\lambda)\in[\tau(\lambda_0) - \frac{\alpha_0}{2}, \tau(\lambda_0) + \frac{\alpha_0}{2}] =: J_0$, dabei sei o.B.d.A.

$\eta_1 \le \eta$ angenommen. Unter Beachtung von (i) folgt dann, daß für jedes $\lambda\in\overline{B}_{\eta_1}(\lambda_0)$ die zugehörige Lösung der AWA (5.1) u_λ eine (mindestens) auf J_0 definierte C^1-Funktion ist, die in $\overline{B}_a(\xi(\lambda_0))$ abbildet.

Es bleibt noch die Stetigkeitsaussage zu beweisen. Sei $\lambda\in\overline{B}_{\eta_1}(\lambda_0)$, dann gilt

$$(5.9)\quad \|u_{\lambda_0}(t) - u_\lambda(t)\| \le \|\xi(\lambda_0) - \xi(\lambda)\| + \Big\| \int_{\tau(\lambda_0)}^{t} f(s, u_{\lambda_0}(s), \lambda_0)\, ds - \int_{\tau(\lambda)}^{t} f(s, u_\lambda(s), \lambda)\, ds \Big\|$$

für $t \in [\tau(\lambda_0) - \frac{\alpha_0}{2}, \tau(\lambda_0) + \frac{\alpha_0}{2}]$. Offenbar folgt leicht

$$(5.10)\quad \| \int_{\tau(\lambda_0)}^{t} f(s, u_{\lambda_0}(s), \lambda_0)\, ds - \int_{\tau(\lambda)}^{t} f(s, u_\lambda(s), \lambda)\, ds \| \le$$

$$\le \left| \int_{\tau(\lambda_0)}^{t} \| f(s, u_{\lambda_0}(s), \lambda_0)\, ds - f(s, u_{\lambda_0}(s), \lambda) \|\, ds \right| +$$

$$+ \left| \int_{\tau(\lambda_0)}^{t} \| f(s, u_{\lambda_0}(s), \lambda)\, ds - f(s, u_\lambda(s), \lambda) \|\, ds \right| + \left| \int_{\tau(\lambda)}^{\tau(\lambda_0)} \| f(s, u_\lambda(s), \lambda) \|\, ds \right|.$$

Unter Ausnutzung der Lipschitz-Stetigkeit (5.8) erhalten wir dann aus (5.9) und (5.10)

$$(5.11)\quad \|u_{\lambda_0}(t) - u_\lambda(t)\| \le \|\xi(\lambda_0) - \xi(\lambda)\| + \int_{J_0} \| f(s, u_{\lambda_0}(s), \lambda_0)\, ds - f(s, u_{\lambda_0}(s), \lambda) \|\, ds +$$

$$+ \int_{\tau(\lambda_0)}^{t} (L(\lambda_0) + a)\, \|u_{\lambda_0}(s) - u_\lambda(s)\|\, ds + M_0\, |\tau(\lambda_0) - \tau(\lambda)| \quad \text{für } t \ge \tau(\lambda_0).$$

Hieraus folgt nach dem Gronwallschen Lemma

$$(5.12)\quad \|u_{\lambda_0}(t) - u_\lambda(t)\| \le \{ \|\xi(\lambda_0) - \xi(\lambda)\| + \int_{J_0} \| f(s, u_{\lambda_0}(s), \lambda_0)\, ds - f(s, u_{\lambda_0}(s), \lambda) \|\, ds +$$

$$+ M_0\, |\tau(\lambda_0) - \tau(\lambda)| \}\, \exp\left(\frac{\alpha_0}{2} + (L(\lambda_0) + a)\right) \qquad \text{für } t \ge \tau(\lambda_0).$$

Die gleiche Abschätzung ist auch für $t \le \tau(\lambda_0)$ zu erhalten (**Ü**).

Sei $\varepsilon > 0$. Die Stetigkeitsvoraussetzungen sichern jetzt die Existenz eines $\eta_2 > 0$, dabei sei o.B.d.A. $\eta_2 \le \eta_1$, daß gilt

$$\forall\, \lambda \in \bar{B}_{\eta_2}(\lambda_0) \quad : \quad \|\xi(\lambda_0) - \xi(\lambda)\| \le \varepsilon,\ |\tau(\lambda_0) - \tau(\lambda)| \le \varepsilon$$

$$\| f(s, u_{\lambda_0}(s), \lambda_0)\, ds - f(s, u_{\lambda_0}(s), \lambda) \| \le \varepsilon \quad \text{(gleichmäßig bezgl. } s)$$

Also folgt aus (5.12)

$$(5.13)\quad \|u_{\lambda_0}(t) - u_\lambda(t)\| \le c(\lambda_0)\, \varepsilon, \qquad \text{für } t \in J_0.$$

Also ist die Stetigkeit in λ_0 gleichmäßig bezüglich $t \in J_0$. Aus (5.13) folgt somit

$$(5.14)\quad \|u_{\lambda_0} - u_\lambda\|_0 := \max \{ \|u_{\lambda_0}(t) - u_\lambda(t)\| : t \in J_0 \} \le c(\lambda_0)\, \varepsilon.$$

($\|u_{\lambda_0} - u_\lambda\|_0$ ist die übliche Norm im normierten Raum $C(J_0, \mathbb{R}^n)$.)

Aus der Differentialgleichung selbst erhalten wir

$$\|u'_{\lambda_0}(t) - u'_\lambda(t)\| \le \| f(t, u_{\lambda_0}(t), \lambda_0)\, ds - f(t, u_\lambda(t), \lambda) \| \le$$

$$\le \| f(t, u_{\lambda_0}(t), \lambda_0)\, ds - f(t, u_{\lambda_0}(t), \lambda) \| + \| f(t, u_{\lambda_0}(t), \lambda)\, ds - f(t, u_\lambda(t), \lambda) \| \le$$

$$\le \{ \varepsilon + (L(\lambda_0) + a)\, \|u_{\lambda_0}(t) - u_\lambda(t)\| \} \le c_1(\lambda_0)\, \varepsilon \qquad \text{für } t \in J_0.$$

Wiederum folgt dann

$$(5.15)\quad \|u'_{\lambda_0} - u'_\lambda\|_0 = \max \{ \|u'_{\lambda_0}(t) - u'_\lambda(t)\| : t \in J_0 \} \le c_1(\lambda_0)\, \varepsilon.$$

Die Abschätzungen (5.14) und (5.15) besagen, daß die Abbildung

$$\lambda \in \bar{B}_{\eta_1}(\lambda_0) \ \to\ u_\lambda \in C^1(J_0; \mathbb{R}^n)$$

in λ_0 stetig ist, wenn $C^1(J_0; \mathbb{R}^n)$ als üblicher normierter Raum aufgefaßt wird.

(Dabei wird die Norm in $C^1(J_0; \mathbb{R}^n)$ definiert durch $\|u\|_1 := \|u\|_0 + \|u'\|_0$)

Bemerkungen 3: (i) Die Stetigkeitsvoraussetzung an f läßt sich abschwächen in folgender Weise:

$\forall\, \lambda \in \Lambda$: $f(\cdot, \lambda) \in C(E; \mathbb{R}^n)$,

$\forall\, (t, x) \in E$: $f(t, x, \cdot)$ ist in $\lambda = \lambda_0$ stetig,

$\exists\, \rho > 0$: f ist auf $\bar{B}_\rho(\tau(\lambda_0), \xi(\lambda_0), \lambda_0) \subset E$ beschränkt.

Beim Beweis wird dann der Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz verwendet.

(ii) Ein wichtiger Spezialfall ist z.B. gegeben, falls $\Lambda := \Omega$ und $\xi(\lambda) := \lambda$ gesetzt werden. Dabei ist dann der zu einem bestimmten $t_0 \in D$ genommene (räumliche) Anfangspunkt $\lambda \in \Omega$ Parameter. Geometrisch gesehen wird also die Schar aller Lösungskurven durch (t_0, λ) betrachtet. Klar, daß in diesem Fall die Parameterabhängigkeit der Lösungen stetig ist.

(iii) Bei entsprechenden Voraussetzungen an die eingehenden Funktionen lassen sich Lipschitz-stetige, differenzierbare oder gar analytische Abhängigkeiten der Lösung vom Parameter erhalten. ($\rightarrow$ Heuser, GDG; Hartmann; Matwejew,...)

Hierauf bauen sich Lösungsmethoden auf, bei denen die analytische Lösung in Gestalt einer Potenzreihe bezüglich t gesucht werden, deren Koeffizienten vom Parameter λ abhängen.

(iv) Es ist auch möglich, die Funktion f selbst als Parameter, der dann in einer Teilmenge eines geeigneten Funktionenraumes variiert, aufzufassen. Das Ergebnis ist dann, daß bei "kleiner" Änderung der Funktion f die Änderung der AWA auch "klein" ausfällt.

Beispiele 4: (i) Betrachten die AWA mit Parameter

(5.16) $x' = t + \lambda \sin(x), \quad x(0) = 0, \quad t \in [0, T], \quad \lambda \in W := [0, 1].$

Offenbar ist $f(t, x, \lambda) := t + \lambda \sin(x)$ auf $[0, T] \times \mathbb{R} \times W$ global Lipschtiz-stetig.

(Satz 1 ist für diesen Fall modifizierbar)

Für jedes $\lambda \in W$ besitzt die AWA (5.16) genau eine Lösung $u_\lambda \in C^1([0, T]; \mathbb{R})$.

Für $\lambda = 0$ erhalten wir $u_0(t) = \frac{t^2}{2}$ auf $[0, T]$. Dabei gilt

$$u_0(t) = \lim_{\lambda \to 0} u_\lambda(t) \qquad \text{(gleichmäßiger Grenzwert für } t \in [0, T]!)$$

und der maximale Fehler beim Ersetzen von u_λ durch u_0 beträgt (Satz 15 aus § 4)

$$| u_\lambda(t) - u_0(t) | \le \lambda T e^{T\lambda} \qquad \text{für alle } t \in [0, T] \text{ und jedes fixierte } \lambda \in [0, 1].$$

(ii) Die Voraussetzungen zur stetigen Abhängigkeit vom Parameter sind nur hinreichend, i.a. nicht notwendig, wie das folgende Beispiel zeigt.

Sei $f(t, x, \lambda) := \begin{cases} \frac{2t\, x\sqrt{\lambda}}{t^2 + \lambda^2}, & \text{für } t \in [0, T],\ x \in \mathbb{R},\ \lambda > 0 \\ 0, & \text{für } t \in [0, T],\ x \in \mathbb{R},\ \lambda = 0 \end{cases}$

Betrachten die AWA

(5.17) $x' = f(t, x, \lambda), \quad x(0) = 1.$

Für $\lambda = 0$ erhalten wir $u_0(t) = 1$ auf $[0, T]$. Es gilt (**Ü**)

$$u_\lambda(t) := (t^2 + \lambda^2)^{\sqrt{\lambda}}\, \lambda^{-2\sqrt{\lambda}} \qquad \text{für } \lambda > 0.$$

Die Funktion f ist in $(0, 1, 0)$ nicht stetig, nur partiell stetig und in keiner Umgebung von $(0, 1, 0)$ beschränkt (**Ü**). Trotzdem gilt (**Ü**)

$$u_0(t) = \lim_{\lambda \to 0} u_\lambda(t) \qquad \text{(gleichmäßiger Grenzwert für } t \in [0, T]!)$$

§ 6 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Gleichungen mit variablen Koeffizienten

In diesem Paragraphen betrachten wir GDG, bei denen für die rechte Seite f gilt

(6.1) $\quad f(t, x) := A(t)x + b(t).$

Wir bezeichnen $E := D\times\mathbb{R}^n$, $D\subset\mathbb{R}$ nichtentartetes Intervall.

Soweit nichts Gegenteiliges gesagt wird seien $b\in C(D; \mathbb{R}^n)$ und $A\in C(D; M_{\mathbb{R}}(n, n))$ mit

$M_{\mathbb{R}}(n, n) :=$ { Menge aller $n\times n$-Matrizen mit reellen Koordinaten }.

Offenbar können wir uns $M_{\mathbb{R}}(n, n)$ auch als $\mathbb{R}^{n^2}$ vorstellen.

In kompakter Schreibweise notieren wir für die Differentialgleichung, die wir *linear* nennen wollen,

(6.2) $\quad x' = f(t, x) = A(t)x + b(t),$

was koordinatenweise ausgedrückt lautet:

(6.3) $\quad x'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\, x_j + b_i(t) \qquad i = 1, ..., n.$

Daher wird auch oft von einem **System GDG in Normalform** gesprochen.

($A\in C(D; M_{\mathbb{R}}(n, n))$ ist gleichwertig mit $a_{ij}\in C(D)$ $\forall$ i, j = 1, ..., n.

Die a_{ij} werden auch Koeffizienten der Matrix A bzw. des Systems (6.3) genannt.)

Verschwinden alle b_i auf D, so heißen (6.2) und (6.3) *homogen*, ansonsten *inhomogen*. Seien neben den obigen Voraussetzungen $t_0\in D$ und $\xi\in\mathbb{R}^n$.

Wir betrachten die Anfangswertaufgabe

(6.4) $\quad x' = A(t)x + b(t), \qquad x(t_0) = \xi.$

Es soll hier noch einmal auf die Normierung von $\mathbb{R}^n$, $C([\alpha, \beta]; \mathbb{R}^n)$ und $C([\alpha, \beta]; M_{\mathbb{R}}(n, n))$ eingegangen werden, wobei $[\alpha, \beta]$ ein kompaktes Intervall sei.

Den linearen Raum $\mathbb{R}^n$ wollen wir - in Konsequenz des Bisherigen - mit der Maximum-Norm

$$\|x\| := \max\{ |x_i| : i = 1, 2, ..., n \}$$

versehen, die bekanntlich zu den anderen Normen (z.B. der euklidischen) äquivalent ist. Wir normieren $M_{\mathbb{R}}(n, n)$ ebenfalls mit der Maximum-Norm, also

$$\|A\| := \max\{ |a_{ij}| : i, j = 1, 2, ..., n \}.$$

Weiter normieren wir $C([\alpha, \beta]; \mathbb{R}^n)$ und $C([\alpha, \beta]; M_{\mathbb{R}}(n, n))$ wie folgt:

$$\|u\|_{C([\alpha, \beta]; \mathbb{R}^n)} := \max \{ \|u(t)\|_{\mathbb{R}^n} : t\in[\alpha, \beta] \},$$

$$\|A\|_{C([\alpha, \beta]; M_{\mathbb{R}}(n, n))} := \max \{ \|A(t)\|_{M_{\mathbb{R}}(n, n)} : t\in[\alpha, \beta] \}.$$

(Falls keine Verwechselungsgefahr besteht, lassen wir die verschiedenen Normen-Bezeichnungen weg.)

Lemma 1: Die Funktion $f(t, x) := A(t)x + b(t)$ für $(t, x) \in D\times\mathbb{R}^n$ gehört zu $C(D; \mathbb{R}^n)$ und genügt der folgenden (lokalen) Lipschitz-Bedingung

(6.5) $\quad \forall\ [\alpha, \beta]\subset D : \|f(t, x) - f(t, y)\| \le L(\alpha, \beta)\, \|x - y\| \quad \forall\ (t, x), (t, y) \in [\alpha, \beta]\times\mathbb{R}^n.$

Beweis: Seien $(t, x), (s, y) \in D\times\mathbb{R}^n$. Dann gilt

$\|f(t, x) - f(s, y)\| \le \| A(t)x - A(s)x + A(s)(x - y) + b(t) - b(s) \| \le \|A(t) - A(s)\|_{M_{\mathbb{R}}(n, n)}\|x\| +$

$+ \|A(s)\|_{M_{\mathbb{R}}(n, n)}\|x - y\| + \|b(t) - b(s)\| \to 0,$ falls $(s, y) \to (t, x)$ in E, also $f\in C(D; \mathbb{R}^n)$.

Seien $(t, x), (t, y) \in D\times\mathbb{R}^n$. Dann gilt

$\|f(t, x) - f(s, y)\| \le \| A(t)x - A(t)y\| \le \|A(t)\|_{M_{\mathbb{R}}(n, n)}\, \|x - y\|,$

wir setzen $L(\alpha, \beta) := \max \{ \|A(t)\|_{M_{\mathbb{R}}(n, n)} : t\in[\alpha, \beta] \}$ ($< +\infty$ (**Ü**))

Satz 2: (**Existenz und Einzigkeit der Lösung**) Die Cauchy-Aufgabe

(6.4) $x' = A(t)x + b(t), \qquad x(t_0) = \xi$

besitzt für jedes $t_0 \in D$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ genau eine Lösung $u \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$.

Beweis: Für jedes Intervall $[\alpha, \beta] \subset D$ mit $t_0 \in [\alpha, \beta]$ können wir den Satz 6 (aus § 3) von Picard / Lindelöf auf den "Streifen" $[\alpha, \beta] \times \mathbb{R}^n$ anwenden. Damit besitzt die AWA (6.4) genau eine Lösung $u \in C^1([\alpha, \beta], \mathbb{R}^n)$, (die iterativ erhalten werden kann.) Nach den Überlegungen zur Fortsetzbarkeit (Vgl. Satz 3 (i), § 4) folgt dann die Behauptung.

Wir wollen nun die **Struktur der Lösungsmenge** zur homogenen und inhomogenen linearen Differentialgleichung untersuchen.

Wir erinnern an den Begriff der *linearen Unabhängigkeit* von Elementen (Vektoren) in einem linearen Raum, speziell in Funktionenräumen über $\mathbb{R}$.

Wie bekannt, bilden die Funktionen, die eine gegebene nichtleere Menge N in einen linearen Raum V abbilden, selbst einen linearen Raum.

Definition 3: Eine endliche Menge von $m \in \mathbb{N}$ Funktionen $v_k : N \to V$, $k = 1, ..., m$ heißt **linear unabhängig**, falls gilt:

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k v_k(t) = 0 \qquad \forall\, t \in N \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_k = 0 \qquad \forall\, k = 1, ..., m.$$

Gilt diese Aussage nicht, so heißen die Funktionen linear abhängig.

Satz 4: (i) Jede Linearkombination $\sum_{j=1}^{m} c_j u_j$ von Lösungen der homogenen DG

(6.6) $x' = A(t)x$

ist wieder Lösung dieser Gleichung.

(ii) Seien $\mathbb{M}_0$ die Lösungsmenge der linearen homogenen DG (6.6) und $\mathbb{M}$ die Lösungsmenge der linearen inhomogenen DG

(6.7) $x' = A(t)x + b(t).$

Dann gilt

(6.8) $\mathbb{M} = \{ \bar{u} + u : u \in \mathbb{M}_0 \},$

wobei $\bar{u} \in \mathbb{M}$ beliebig ist.

(iii) Die homogene DG (6.6) besitzt n linear unabhängige Lösungen und beliebige $(n + 1)$ Lösungen von (6.6) sind linear abhängig.

Beweis: (i), (ii) (**Ü**)

(iii) Wir bezeichnen mit $\{ e_k := (0, ..., 1, ..., 0) : k = 1, ..., n \}$ die Standardbasis in $\mathbb{R}^n$. Nach Satz 2 existiert zu jedem Anfangswert $\xi := e_k$ genau eine Lösung $u_k \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ mit $u_k(t_0) = e_k$. Diese n Lösungen sind linear unabhängig. Nehmen das Gegenteil an, dann existiert ein $t_1 \in D$ und ein n-Tupel $(c_1, c_2, ..., c_n) \in \mathbb{R}^n$ mit einem $c_k \neq 0$ so, daß $\sum_{k=1}^{n} c_k u_k(t_1) = 0.$

Die Funktion $u := \sum_{k=1}^{n} c_k u_k$ löst dann die AWA

(6.9) $x' = A(t)x, \qquad x(t_1) = 0.$

Die Funktion $v(t) = 0$ auf D löst ebenfalls (5.9). Wegen der Einzigkeit (Satz 2) fallen dann u und v zusammen und sind beide identisch null. Also gilt

$$u(t_0) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, u_k(t_0) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, e_k = 0.$$

Da die $\{e_k\}$ als Basis in $\mathbb{R}^n$ linear unabhängig sind, müssen alle c_k verschwinden, was ein Widerspruch zur Annahmen ist.
Somit existieren zu (6.6) n linear unabhängige Lösungen.
Nehmen nun an, es lägen $(n + 1)$ linear unabhängige Lösungen v_k zu (6.6) vor. Nach Definition 3 heißt das, daß aus

$$\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k\, v_k(t) = 0 \qquad \forall\, t \in D \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_k = 0 \qquad \forall\, k = 1, \ldots, n + 1.$$

Hieraus folgt aber sofort, daß auch aus

$$\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k\, v_k(t_0) = 0 \qquad \text{stets} \quad \alpha_k = 0 \qquad \forall\, k = 1, \ldots, n + 1 \quad \text{folgt.}$$

Das heißt, wir haben in $\mathbb{R}^n$ die $(n + 1)$ linear unabhängigen Vektoren $v_k(t_0)$ gefunden, was natürlich nicht möglich ist.

Algebraisch gesprochen besagt Satz 4, daß die Lösungsmenge von (6.6) ein linearer Teilraum von $C^1(D, \mathbb{R}^n)$ der Dimension n und die Lösungsmenge von (6.7) ein affiner Teilraum von $C^1(D, \mathbb{R}^n)$ ist.
Je n linear unabhängige Lösungen von (6.6) bilden somit eine Basis, man sagt speziell auch **Integralbasis** oder **Fundamentalsystem** von (6.6)
Als praktische Folgerungen aus Satz 4 ergeben sich sofort:

Folgerungen 5: Seien zur homogenen DG (6.6) n linear unabhängige Lösungen u_k, also ein Fundamentalsystem, gegeben.
(i) Jede Lösung von (6.6) hat dann die Gestalt

(6.10) $$u = \sum_{k=1}^{n} c_k\, u_k,$$

wobei die $c_k \in \mathbb{R}$ eindeutig bestimmt sind.
(ii) Seien $t_0 \in D$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ beliebig gegeben. Dann besitzt die AWA
(6.4) $$x' = A(t)x, \qquad x(t_0) = \xi$$
die eindeutig bestimmte Lösung

$$u = \sum_{k=1}^{n} c_k\, u_k,$$

wobei die c_k durch Lösen des linearen Gleichungssystems

(6.11) $$\sum_{k=1}^{n} c_k\, u_k(t_0) = \xi$$

(eindeutig) bestimmt sind.

Seien die Funktionen $u_k \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ ein Fundamentalsystem zu (6.6).
Jede Vektorfunktion u_k läßt sich als Spaltenvektor schreiben mit

$$u_k := \begin{pmatrix} u_{1k} \\ u_{2k} \\ \ldots \\ u_{nk} \end{pmatrix}.$$

Schreiben wir diese n Spalten in eine Matrix, so erhalten wir eine **Fundamentalmatrix** der DG (6.6),

$$U(t) := \begin{pmatrix} u_{11}(t), & u_{12}(t), & \dots & u_{1n}(t), \\ u_{21}(t), & u_{22}(t), & \dots & u_{2n}(t), \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1}(t), & u_{n2}(t), & \dots & u_{nn}(t), \end{pmatrix}$$

ihre Determinante nennen wir die
Wronski-Determinante

$$w(t) := \begin{vmatrix} u_{11}(t), & u_{12}(t), & \dots & u_{1n}(t), \\ u_{21}(t), & u_{22}(t), & \dots & u_{2n}(t), \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1}(t), & u_{n2}(t), & \dots & u_{nn}(t), \end{vmatrix}.$$

Aus dem bisher Gesagten folgt, daß die Wronski-Determinante eines Fundamentalsystems in allen Punkten von D *nicht* verschwindet (**Ü**).
Es bleibt noch die Frage zu beantworten, wie ein Fundamentalsystem der (homogenen) DG benutzt werden kann, um eine zugehörige inhomogene DG bzw. die zugehörige AWA zu lösen.

Wir müssen feststellen, daß es kein allgemeines Verfahren gibt, im Falle $n > 1$ ein Fundamentalsystem zu (6.6) `exakt´ zu bestimmen. Natürlich wäre es möglich, für jeden Basivektor in $\mathbb{R}^n$ die zugehörige AWA iterativ zu lösen - mit den dann erwachsenden Problemen.

Ist eine einzelne (auch partikuläre genannte) Lösung $\bar{u}$ der inhomogenen DG (6.7) und ein Fundamentalsystem $\{u_k\}$ der zugehörigen homogenen DG (6.6) bekannt, dann wird nach Satz 4 (ii) die allgemeine Lösung von (6.7) durch

(6.12) $$u = \bar{u} + \sum_{k=1}^{n} c_k\, u_k,$$

beschrieben, wobei die c_k beliebige reelle Konstanten sind.
Eine partikuläre Lösung kann unter Umständen durch Probieren oder speziellen Ansatz gefunden werden.
Die allgemeine Lösung zu (6.7) kann durch **Variation der Konstanten** bestimmt werden, falls ein Fundamentalsystem $\{u_k\}$ der zugehörigen homogenen DG (6.6) bekannt ist.

Satz 6: Sei U eine Fundamentalmatrix der homogenen DG (6.6).
(i) Dann sind

(6.13) $$\bar{u}(t) := \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t} (U^{-1})_{ki}(s)\, b_i(s)\, ds \Big)\, u_k(t)$$

eine partikuläre Lösung der inhomogenen DG (6.7) und

(6.14) $$u(t) = \sum_{k=1}^{n} \bar{c}_k\, u_k(t) + \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t} (U^{-1})_{ki}(s)\, b_i(s)\, ds \Big)\, u_k(t)$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen DG (6.7). Dabei sind die $\bar{c}_k$ willkürliche reelle Konstanten.
(ii) Die eindeutig bestimmte Lösung $u \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ der AWA

(6.4) $$x' = A(t)x + b(t), \qquad x(t_0) = \xi$$

($t_0 \in D$, $\xi \in \mathbb{R}^n$) hat die Darstellung (6.14), wobei die $\bar{c}_k$ durch Lösen von

(6.15) $$\sum_{k=1}^{n} \bar{c}_k\, u_k(t_0) = \xi$$

bestimmt sind.

Beweis: (i) Wir wählen als Lösung der DG (6.7) den Ansatz

(6.16) $$u(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t)\, u_k(t)$$

und versuchen, die unbekannten Funktionen $c_k \in C^1(D)$ zu bestimmen.
Einsetzen von (6.16) in (6.7) ergibt

$$u'(t) = \sum_{k=1}^{n} c'_k(t)\, u_k(t) + \sum_{k=1}^{n} c_k(t)\, u'_k(t) = A(t)\Big(\sum_{k=1}^{n} c_k(t)\, u_k(t)\Big) + b(t) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_k(t)\, A(t) u_k(t) + b(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t)\, u'_k(t) + b(t),$$

also

(6.17) $$\sum_{k=1}^{n} u_{ik}(t)\, c'_k(t) = b_i(t) \quad \text{oder in Matrizenschreibweise} \quad Uc' = b.$$

Wir erhalten ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der c'_k. Die Determinante von (6.17) ist natürlich die Wronski-Determinante des Fundamentalsystems, ist also in keinem Punkte aus D gleich 0. Somit besitzt die Fundamentalmatrix U eine Inverse U^{-1} mit stetigen Elementen und es folgt aus (6.17):

$$c'_k(t) = \sum_{i=1}^{n} (U^{-1})_{ki}(t)\, b_i(t),$$

hieraus durch Integration

(6.18) $$c_k(t) = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t} (U^{-1})_{ki}(s)\, b_i(s)\, ds + \bar{c}_k,$$

dabei sind die $\bar{c}_k$ beliebige reelle Integrationskonstanten.
Setzen wir für die c_k im Ansatz (6.16) den erhaltenen Ausdruck (6.18) ein, so ergeben sich die Behauptungen.
(ii) Ü.

Bemerkung 7: (Lineare Gleichungen mit komplexen Koeffizienten)
(i) Die in diesem Paragraphen entwickelte Theorie der linearen DG läßt sich ohne Mühe auf lineare DG mit komplexwertigen Funktionen übertragen. Dabei sind bis auf die Variable t (oft mit der Zeit assoziert) alle anderen Funktionen komplexwertig, also $E := D \times \mathbb{C}^n$, $b \in C(D; \mathbb{C}^n)$ und $A \in C(D; M_{\mathbb{C}}(n, n))$. Für jedes $t_0 \in D$ und $\xi \in \mathbb{C}^n$ wird dann die Anfangswertaufgabe

(6.4) $$x' = A(t)x + b(t), \qquad x(t_0) = \xi.$$

betrachtet. Die Lösung u gehört dann zu $C^1(D, \mathbb{C}^n)$.
Es ist leicht einzusehen, daß sich die obigen Resultate auf diesen komplexwertigen Fall übertragen lassen ($\mathbb{C}^n$ ist ein n-dimensionaler linearer Raum über $\mathbb{C}$ ...).
(ii) Andererseits gilt: Falls A, b und ξ reellwertig, dann muß die Lösung auch reellwertig sein (**Ü**).

Lineare Gleichungen mit konstanten Koeffizienten
Wir wollen jetzt die Spezialfälle der DG (6.2) und der AWA (6.4) für den Fall betrachten, daß A nicht von der Zeit t abhängt.
Natürlich gelten alle bisherigen Resultate, der Vorteil liegt darin, daß jetzt mehr über die Lösungen und ihr Auffinden gesagt werden kann.

Von nun an ist es zweckmäßig, mit *komplexwertigen* Größen zu arbeiten (vgl. Bem. 7), da auch reellwertige Matrizen komplexe Eigenwerte haben können. Wir gehen einen "Umweg" über das Komplexe.
Die linearen Räume $\mathbb{C}^n$ (:= Menge aller n-Tupel komplexer Zahlen mit koordinatenweiser Addition und Multiplikation mit komplexen Skalaren) und $M_{\mathbb{C}}(n, n)$ normieren wir analog, es werden nur die Beträge von komplexen Zahlen anstelle der Beträge reeller Zahlen genommen. Für die folgenden Untersuchungen seien die *euklidischen* Normen in $\mathbb{C}^n$ und $M_{\mathbb{C}}(n, n)$ verwendet.
Zur Vorbereitung benötigen wir einige Fakten über Matrizen.
Wie bekannt, lassen sich (n, n)-Matrizen miteinander multiplizieren

$$AB := (c_{ij}) \quad \text{mit} \quad c_{ij} := \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}.$$

(**Ü**) $\|AB\| \le \|A\|\,\|B\|, \quad \|A^k\| \le \|A\|^k, \quad \|Ax\| \le \|A\|\,\|x\|.$

Die Konvergenz in $M_{\mathbb{C}}(n, n)$ (wie auch in $\mathbb{C}^n$ und auch $\mathbb{R}^n$) ist die koordinatenweise, d.h.,

$$A_k \to A \text{ in } M_{\mathbb{C}}(n, n) \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij,k} \to a_{ij} \text{ in } \mathbb{C} \quad \forall\, i, j = 1, \ldots, n.$$

Wir setzen $A^0 := I$ (:= Einheitsmatrix mit $c_{ij} := \delta_{ij}$)) und erklären eine Matrizenreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \text{ als Folge ihrer Partialsummen } s_m := \sum_{k=0}^{m} A_k.$$

Eine Matrizenreihe heißt konvergent, falls ihre Folge der Partialsummen (in $M_{\mathbb{C}}(n, n)$) konvergiert. Die Matrizenreihe heißt absolut konvergent, falls die entsprechende Reihe der Normen $\sum_{k=0}^{\infty} \|A_k\|$ (in $\mathbb{R}$) konvergiert.
(**Ü**) Aus absoluter Konvergenz folgt Konvergenz.
Wir definieren nun die *Exponentialfunktion einer Matrix*:

(6.19) $$\exp(A) := e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

(**Ü**) Für jedes $A \in M_{\mathbb{C}}(n, n)$ konvergiert die Reihe (6.19) absolut und es gilt
(6.20) $$\|e^A\| \le e^{\|A\|}.$$

Für die Exponentialfunktion einer Matrix gelten viele zum skalaren Fall analoge Aussagen (**Ü**):
(6.21) $e^A e^B = e^{A+B}$, falls $AB = BA$.
$e^{\mathbf{0}} = I, \quad (e^A)^{-1} = e^{-A}, \quad e^A \in M_{\mathbb{R}}(n, n)$, falls $A \in M_{\mathbb{R}}(n, n)$,
$\exp : M_{\mathbb{C}}(n, n) \to M_{\mathbb{C}}(n, n)$ stetig.
Außerdem gilt für die Funktion $t \in \mathbb{R} \to e^{tA} \in M_{\mathbb{C}}(n, n)$:

(6.22) $$\frac{de^{tA}}{dt} := \lim_{h \to 0} \frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} = Ae^{tA}. \quad (\text{Ü})$$

Zur Erinnerung: Vektor- und Matrizenfunktionen einer Variablen werden differenziert, indem sie koordinatenweise differenziert werden.
Mit diesem Wissen können wir jetzt den folgenden Satz für homogenen lineare DG mit konstanten Koeffizienten beweisen.

Satz 8: (i) Es seien $t_0 \in \mathbb{R}$ und $\xi \in \mathbb{C}^n$ beliebig gegeben. Dann besitzt die AWA
(6.23) $x' = Ax, \quad x(t_0) = \xi$
die eindeutig bestimmte Lösung $u \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n)$
(6.24) $u(t) := e^{(t - t_0)A}\, \xi.$
(ii) Jede Lösung $u \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n)$ der DG
(6.25) $x' = Ax$

hat die Gestalt $u(t) := e^{tA} v$, wobei $v \in \mathbb{C}^n$.
(iii) Sind $v_1, v_2, ..., v_n \in \mathbb{C}^n$ linear unabhängig, so bilden die Funktionen
$u_k(t) := e^{tA} v_k$ ein Fundamentalsystem von (6.25).

Beweis: (i) Der Satz 2 in Verbindung mit Bemerkung 7 garantiert die Existenz einer eindeutig bestimmten Lösung $u \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n)$ der AWA (6.23) (klar, $D := \mathbb{R}$). Zeigen durch Nachrechnen, daß die in (6.24) gegebene Funktion die AWA löst.
Die Anfangsbedingung ist erfüllt, denn $u(t_0) := e^{0A} \xi = I\xi = \xi$.
Außerdem gilt

$$u'(t) = Ae^{(t - t_0)A} \xi = Au(t) \quad \text{unter Beachtung von (6.22).}$$

(ii) Jede Lösung $u \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n)$ der DG (6.25) nimmt für $t = 0$ den Vektor $u(0) \in \mathbb{C}^n$ an. Wegen der Einzigkeit ist dann u auch Lösung der AWA (6.23) mit $t_0 := 0$ und $\xi := u(0)$, also gilt nach (6.24) $u(t) := e^{tA} v$ mit $v := u(0)$.
(iii) Seien die $v_1, v_2, ..., v_n \in \mathbb{C}^n$ linear unabhängig, dann sind die Funktionen $u_k(t) := e^{tA} v_k$ offenbar Lösungen von (6.25), ihre Wronski-Determinante im Punkt $t = 0$ ist gerade die Determinante, in deren Spalten die Vektoren v_k stehen, diese Determinante darf jedoch nicht verschwinden wegen der linearen Unabhängigkeit der v_k.

Bemerkung 9: Die Lösungen von (6.23) und (6.25) sind reell-analytisch, was auch der Satz von Cauchy garantieren würde.

Wählen wir in Satz 8 (ii) beliebige linear unabhängige Vektoren v_k, so besteht das Fundamentalssytem i.a. nicht aus elementaren Funktionen.
Es zeigt sich, daß eine solche Auswahl an Vektoren v_k möglich ist, daß die Lösungen im Fundamentalsystem elementar sind.

Wir erinnern an die Begriffe **Eigenwert** und **Eigenvektor** einer Matrix.
Sei $A \in M_{\mathbb{C}}(n, n)$. Ein $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt Eigenwert der Matrix A, falls ein $v \in \mathbb{C}^n$ existiert mit

$$v \neq 0 \quad \text{und} \quad Av = \lambda v.$$

Der Vektor v heißt Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ.

Satz 10: Die Matrix $A \in M_{\mathbb{C}}(n, n)$ besitze n linear unabhängige Eigenvektoren v_k zu den Eigenwerten λ_k. Dann bilden die Funktionen

(6.26) $$u_k(t) := e^{\lambda_k t} v_k$$

ein Fundamentalsystem der homogenen DG

(6.25) $$x' = Ax.$$

Beweis: Nachrechnen ergibt sofort

$$u'_k(t) = \lambda_k e^{\lambda_k t} v_k = e^{\lambda_k t} (\lambda_k v_k) = e^{\lambda_k t} (Av_k) = Au_k(t).$$

Die lineare Unabhängigkeit der Eigenvektoren sichert mit den Argumenten aus dem Beweis von Satz 8 (ii), daß die u_k wirklich ein Fundametalsystem bilden.

Aus der linearen Algebra wissen wir, daß bei Vorliegen von n verschiedenen Eigenwerten stets n linear unabhängige Eigenvektoren existieren. Es gibt Fälle, bei denen auch bei sogenannten mehrfachen Eigenwerten noch n linear unabhängige Lösungen existieren ($\rightarrow$ Beispiele).
Schwieriger ist der Fall, bei dem es keine n linear unabhängigen Eigenvektoren zu A gibt. Damit wollen wir uns nun befassen ($\rightarrow$ Braun).

Seien $A \in M_{\mathbb{C}}(n, n)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ und $v \in \mathbb{C}^n$. Dann gilt:

(6.27) $\quad e^{tA} v = e^{t(A - \lambda I)} e^{t\lambda I} v = e^{t(A - \lambda I)} e^{t\lambda} v = e^{t\lambda} e^{t(A - \lambda I)} v.$

(beachte, daß $e^{t\lambda I}$ eine Diagonalmatrix mit $e^{t\lambda}$ auf der Hauptdiagonalen ist, also $e^{t\lambda I} = e^{t\lambda} I$)

Weiter gilt:

Falls $(A - \lambda I)^m v = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$, so folgen $(A - \lambda I)^{m+r} v = 0$ für alle $r \in \mathbb{N}$ und damit

(6.28) $$e^{t(A - \lambda I)} v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k (A - \lambda I)^k}{k!} v = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k (A - \lambda I)^k}{k!} v.$$

Insbesondere haben wir jetzt:

Falls $(A - \lambda I)^2 v = 0$, so gilt $e^{tA} v = e^{t\lambda} e^{t(A - \lambda I)} v = e^{t\lambda} \{v + t(A - \lambda I)v\}$ und in diesem Falle ist

$$u(t) := e^{tA} v = e^{t\lambda} \{v + t(A - \lambda I)v\}$$

eine Lösung der homogenen DG (6.25).

Wir erhalten folgendes Verfahren zum Auffinden eines "elementaren" Fundamentalsystems:

1) Wir bestimmen alle Eigenwerte λ_k der Matrix A und alle zu diesen Eigenwerten gehörenden linear unabhängigen Eigenvektoren v_j $(j = 1, ..., m \leq n)$. Jeder dieser Eigenvektoren ergibt gemäß (6.26) eine Lösung zu (6.25). Falls $m = n$, so bilden diese Lösungen ein Fundamentalsystem.

2) Falls $m < n$, so bestimmen wir für jeden Eigenwert λ_k alle linear unabhängigen Vektoren w, für die gilt

$$(A - \lambda_k I)^2 w = 0 \quad \text{und} \quad (A - \lambda_k I) w \neq 0.$$

Wie die Algebra lehrt, sind die so erhaltenen Vektoren w linear unabhängig zu den Eigenvektoren. Unter Beachtung von (6.27) und (6.28) sind dann

$$e^{tA} w = e^{t\lambda_k} \{w + t(A - \lambda_k I)w\}$$

weitere linear unabhängige Lösungen zu (6.25). Erhalten wir so, zusammen mit den im 1. Schritt erhaltenen Lösungen, n linear unabhängige, so sind wir fertig.

3) Falls die in den ersten beiden Schritten erhaltenen linear unabhängige Lösungen noch kein Fundamentalsystem ergeben, so bestimmen wir für jeden Eigenwert λ_k alle linear unabhängigen Vektoren w, für die gilt

$$(A - \lambda_k I)^3 w = 0 \quad \text{und} \quad (A - \lambda_k I)^2 w \neq 0.$$

Wieder lehrt die Algebra, daß die so erhaltenen Vektoren w linear unabhängig zu den Eigenvektoren und den im 2. Schritt erhaltenen Vektoren sind.

Unter Beachtung von (6.27) und (6.28) sind dann

$$e^{tA} w = e^{t\lambda} \{w + t(A - \lambda I)w + \frac{t^2}{2} (A - \lambda I)^2 w\}$$

weitere linear unabhängige Lösungen zu (6.25).

Es läßt sich zeigen, daß diese Prozedur zu n linear unabhängigen Lösungen führt.

Aus der Bemerkung 7 (ii) folgt, daß für $A \in M_{\mathbb{R}}(n, n)$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ die AWA

(6.23) $\quad x' = Ax, \qquad x(t_0) = \xi$

genau eine Lösung $u \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ besitzt.

Natürlich müssen die Eigenwerte nicht reell sein. Daher ist es nicht sofort klar, daß es ein "elementares" Fundamentalsystem zur DG (6.23), bestehend aus rein-reellen Größen, gibt.

Sei $\lambda := \alpha + i\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0)$ ein Eigenwert zu $A \in M_{\mathbb{R}}(n, n)$ mit Eigenvektor $v \in \mathbb{C}^n$. Dann ist auch

$\bar{\lambda} := \alpha - i\beta$ ein Eigenwert zu $A \in M_{\mathbb{R}}(n, n)$ mit Eigenvektor $\bar{v} \in \mathbb{C}^n$.

Wegen $\lambda \neq \bar{\lambda}$ sind v und $\bar{v}$ linear unabhängig. Dann sind natürlich

$$u(t) := e^{\lambda t} v \quad \text{und} \quad \bar{u}(t) := e^{\bar{\lambda} t} \bar{v}$$

linear unabhängige Lösungen. Anstelle von u und $\bar{u}$ wählen wir die beiden linear unabhängigen (**Ü**) Lösungen

Re(u) und Im(u).

Da bei mehrfachen komplexen Eigenwerten die konjugiert-kompexen Werte ebenfalls Eigenwerte der gleichen Vielfachheit sind, so treten in den Schritten 2 und 3 neben Vektoren w zu λ auch Vektoren $\bar{w}$ zu $\bar{\lambda}$ auf.
Ist also λ nicht reell, so wählen wir z.B. statt

$$e^{tA} w = e^{\lambda t} \{w + t(A - \lambda I)w\} \quad \text{und} \quad e^{tA} \bar{w} = e^{\bar{\lambda} t} \{\bar{w} + t(A - \bar{\lambda} I)\bar{w}\}$$

den Real- und Imaginärteil von $e^{tA} w = e^{\lambda t} \{w + t(A - \lambda I)w\}$.
Es gilt also das Resümee:

Satz 11: Sei $A \in M_{\mathbb{R}}(n, n)$. Dann besitzt die DG $x' = Ax$ ein "elementares" Fundamentalsystem, bestehend aus Funktionen aus $C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$.

Beispiele 12: (i) (Lineares Gleichungssystem mit variablen Koeffizienten)

Betrachten die folgende AWA mit $D :=]-\frac{1}{2}, \infty[$

(6.29)
$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 + t & x_1(1) &= 0, \\ x_2' &= \frac{4}{2t+1} x_1 - \frac{4t}{2t+1} x_2 + 1 & x_2(1) &= 1. \end{aligned}$$

Durch Probieren finden wir ein Fundamentalsystem für das zugehörige homogene System $\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -2e^{-2t} \end{pmatrix}$.

Wir berechnen dann die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems (6.29) durch Variation der Konstanten. Einsetzen des Ansatzes

(6.30)
$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -2e^{-2t} \end{pmatrix}$$

in (6.29) führt zu einem linearen System zur Bestimmung von c_1' und c_2'.

(6.31)
$$c_1' \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} + c_2' \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -2e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Determinante dieses Systems ist die Wronski-Determinante

$$w(t) = \begin{vmatrix} t & e^{-2t} \\ 1 & -2e^{-2t} \end{vmatrix} = -e^{-2t}(2t + 1) \quad t \in D.$$

Auflösen von (6.31) (z.B. mit Cramerscher Regel) ergibt

$$c_1' = 1, \quad c_2' = 0, \quad \text{also} \quad c_1 = t + \bar{c}_1, \quad c_2 = \bar{c}_2$$

Einsetzen von c_1 und c_2 in den Ansatz (6.30) ergibt die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems (6.29)

(6.32)
$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \bar{c}_1 \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} + \bar{c}_2 \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -2e^{-2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}.$$

Um die AWA (6.29) zu lösen, bestimmen wir die Konstanten $\bar{c}_1$ und $\bar{c}_2$ aus den Anfangsbedingungen. Somit ist das folgende System zu lösen:

$u_1(1) = 0 = \bar{c}_1 + \bar{c}_2\, e^{-2} + 1,$

$u_2(1) = 1 = \bar{c}_1 - \bar{c}_2\, e^{-2} + 1.$

Das Auflösen ergibt: $\bar{c}_1 = -\frac{2}{3}$, $\bar{c}_2 = -\frac{1}{3}\, e^{-2}$. Die einzige Lösung der AWA (6.29) lautet also:

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = -\frac{2}{3}\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} + -\frac{1}{3}\, e^{-2}\begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -2e^{-2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}.$$

(ii) (Lineares System mit konstanten Koeffizienten, Fall komplexer Eigenwerte)
Betrachten das folgende System GD

(6.30) $x_1' = x_1 + x_2$
$x_2' = -2\, x_1 + 3\, x_2.$

Die Eigenwerte der Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ sind $\lambda_1 = 2 + i$ und $\lambda_1 = 2 - i$.

Ein Eigenvektor zu λ_1 berechnet sich aus dem linearen Gleichungssystem

$(A - \lambda_1 I)\, x = 0$, also $(-1 - i)\, x_1 + x_2 = 0$
$-2\, x_1 + (1 - i)\, x_2 = 0.$

somit gilt $x_2 = (1 + i)\, x_1$, und ein Eigenvektor ist z.B. $v^{(1)} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + i \end{pmatrix}$.

Ein Eigenvektor zu λ_2 wäre z.B. $v^{(2)} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - i \end{pmatrix}$.

Die allgemeine Lösung des Systems (6.30) lautet dann - in komplexer Darstellung -

(6.31) $$u(t) = c_1\, e^{\lambda_1 t}\, v^{(1)} + c_2\, e^{\lambda_2 t}\, v^{(2)} = c_1\, e^{(2+i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 + i \end{pmatrix} + c_2\, e^{(2-i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 - i \end{pmatrix}$$

Wir können diese Lösung u in reeller Darstellung erhalten, wenn wir als Fundamentalsystem wählen $\{ \mathrm{Re}(e^{\lambda_1 t}\, v^{(1)}), \mathrm{Im}(e^{\lambda_1 t}\, v^{(1)}) \}$. Damit ergibt sich

$$u(t) = c_1\, \mathrm{Re}(e^{\lambda_1 t}\, v^{(1)}) + c_2\, \mathrm{Im}(e^{\lambda_1 t}\, v^{(1)}) = c_1\, e^{2t}\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(t) - \sin(t) \end{pmatrix} + c_2\, e^{2t}\begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix}.$$

(iii) (Lineares System mit konstanten Koeffizienten, mehrfache Eigenwerte)
Betrachten das System GD

(6.32) $x' = Ax$ mit $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Diese Matrix hat den dreifachen Eigenwert $\lambda = 2$. Das lineare Gleichungssystem $(A - \lambda I)\, x = 0$ führt auf $x_2 + x_3 = 0$, $-x_3 = 0$, also $x_2 = x_3 = 0$, x_1 frei.

Ein Eigenvektor ist somit $v^{(1)} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Weitere linear unabhängige Eigenvektoren existieren nicht. Eine Lösung des Fundamentalsystems ist $u^{(1)}(t) = e^{2t}\, v^{(1)}$.

Suchen Vektoren, die $(A - \lambda I)^2\, x = 0$ lösen, aber nicht Eigenvektoren sind.

Das System $(A - \lambda I)^2\, x = 0$ führt auf $x_3 = 0$, also x_1, x_2 frei.

Wählen den Vektor $v^{(2)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, dieser ist nicht Eigenvektor. Weitere, zu $v^{(1)}$ und $v^{(2)}$ linear unabhängige Lösungen von $(A - \lambda I)^2\, x = 0$ existieren nicht.

Eine weitere Lösung des Fundamentalsystems ist somit

$$u^{(2)}(t) = e^{2t}\, [\, v^{(2)} + t\, (A - \lambda I)\, v^{(2)}\,].$$

Suchen Lösungen zu $(A - \lambda I)^3\, x = 0$, die nicht $(A - \lambda I)^2\, x = 0$ erfüllen.

Wegen $(A - \lambda I)^3 x = 0\, x$, was ja von allen Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ erfüllt wird, wählen wir einen zu $v^{(1)}$ und $v^{(2)}$ linear unabhängigen Vektor, z.B. $v^{(3)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, und erhalten eine dritte Lösung des Fundamentalsystems

$$u^{(3)}(t) = e^{2t}\left[v^{(3)} + t\,(A - \lambda I)\, v^{(3)} + \frac{t^2}{2}\,(A - \lambda I)^2\, v^{(3)} \right].$$

Die allgemeine Lösung des Systems (6.32) lautet dann

$$u(t) = c_1\, u^{(1)}(t) + c_2\, u^{(2)}(t) + c_3\, u^{(3)}(t) =$$

$$= c_1\, e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\, e^{2t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\, e^{2t} \begin{pmatrix} 3t - \frac{t^2}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

§ 7 Differentialgleichungen höherer Ordnung

Definition 1: Seien $E \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ $(n\in\mathbb{N})$ ein Gebiet (:= eine offene zusammenhängende Menge) und $f : E \to \mathbb{R}$. Dann heißt

(7.1) $$x^{(n)} = f(t, x, x', ..., x^{(n-1)})$$

eine **gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung in Normalform**.

Eine n-mal differenzierbare Funktion $u : J \to \mathbb{R}$ heißt **Lösung** (oder auch Integral) der Differentialgleichung (7.1), falls

$J\subset\mathbb{R}$ ist ein Intervall positiver Länge,

$\forall t\in J$: $(t, u(t), u'(t), ..., u^{(n-1)}(t)) \in E$, $u^{(n)}(t) = f(t, u(t), u'(t), ..., u^{(n-1)}(t))$.

Sei außerdem $(t_0, x_0)\in E$ gegeben, so bezeichnen wir mit

(7.2) $$x^{(n)} = f(t, x, x', ..., x^{(n-1)}), \quad x(t_0) = x_{01}, x'(t_0) = x_{02}, ..., x^{(n-1)}(t_0) = x_{0n},$$

die **Anfangswertaufgabe** (auch Cauchy-Problem) zur Differentialgleichung (7.1).

Eine Lösung der Differentialgleichung (7.1) heißt Lösung der Anfangswertaufgabe (7.2), falls sie zusätzlich den Anfangsbedingungen

$x(t_0) = x_{01}, x'(t_0) = x_{02}, ..., x^{(n-1)}(t_0) = x_{0n}$ genügt.

Mit der folgenden Substitution können wir sofort eine GD der Ordnung n in ein System GDn 1. Ordnung überführen.

Sei u Lösung von (7.1). Dann definieren wir eine differenzierbare Vektorfunktion $v : J \to \mathbb{R}^n$ gemäß

(7.3) $$v_1 := u, \; v_2 := u', \; v_3 := u'', ..., \; v_n := u^{(n-1)}.$$

Dann gilt:

(7.4)
$$v'_1 = v_2,$$
$$v'_2 = v_3,$$
$$....$$
$$v'_{n-1} = v_n,$$
$$v'_n = f(t, v_1, v_2, ..., v_n).$$

Weiter sei

(7.5) $$F(t, v) := \begin{pmatrix} v_2 \\ ... \\ v_n \\ f(t, v_1, v_2, ..., v_n) \end{pmatrix}.$$

Dann kann das System (7.4) in die Vektorschreibweise

(7.6) $$v' = F(t, v)$$

gebracht werden.

Mit anderen Worten:
Die Funktion u löst (7.1) genau dann, falls die gemäß (7.3) definierte Vektorfunktion v das System (7.6) löst.
Es ist auch klar, wie sich die Anfangsbedingungen

$x(t_0) = x_{01},\ x'(t_0) = x_{02},\ \ldots,\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{0n}$ in
$v_1(t_0) = x_{01},\ v_2(t_0) = x_{02},\ \ldots,\ v_n(t_0) = x_{0n}$ übertragen.

Wir merken an, daß die Substitution (7.3) nicht die einzig mögliche ist - bei speziellen Fragestellungen könnten sich andere als günstiger erweisen.
Analog wäre es auch möglich, ein System aus zwei GD 2. Ordnung in ein System von vier GD 1. Ordnung zu überführen. (**Ü**)

Angesichts der obigen Transformation lassen sich die wesentlichen Resultate über Existenz, Einzigkeit, Fortsetzung, Abhängigkeit von Parametern und Analytizität von Lösungen zu AWA formulieren und beweisen, indem auf die entsprechenden Ergebnisse für GDG 1. Ordnung zurückgegriffen wird.
Als Beispiel formulieren wir das Analogon zu Satz 3 aus § 3.

Satz 2: (lokale Existenz und Einzigkeit - Picard / Lindelöf) Die Funktion

$f \in C([t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}_b(x_0))$ $(a, b > 0,\ \overline{B}_b(x_0) \subset \mathbb{R}^n)$ genüge der Lipschitz-Bedingung

(3.2) $\quad | f(t, x_1) - f(t, x_2) | \le L \, || x_1 - x_2 || \qquad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}_b(x_0).$

Seien $M := \max \{ \max\{ ||f(t, x)|| : (t, x) \in [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}_b(x_0) \}, ||x_0|| + b \}$
und $\alpha := \min\{ a, \frac{b}{M} \}$. Dann besitzt die Cauchy-Aufgabe

(7.2) $\qquad x^{(n)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}), \qquad x(t_0) = x_{01},\ x'(t_0) = x_{02},\ \ldots,\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{0n},$

auf dem Intervall $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ genau eine Lösung $u \in C^n([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]; \overline{B}_b(x_{01}))$ und es gilt $\quad \max \{ |u^{(i)}(t) - x_{0i}| : t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha],\ i = 1, \ldots, n-1\} \le b.$
(Die Norm in $\mathbb{R}^n$ sei dabei die Max-Norm.)

Beweis: (**Ü**) Wenden Sie Satz 3 aus § 3 an. Geben Sie für F gemäß (7.5) eine Lipschitz-Konstante an. Verdeutlichen Sie sich die Iteration.

Wir betrachten nun eine **lineare GD n-ter Ordnung**:

(7.7) $\qquad x^{(n)} + a_{n-1}(t)\, x^{(n-1)} + a_{n-2}(t)\, x^{(n-2)} + \ldots + a_1(t)\, x' + a_0(t)\, x = g(t).$

mit der Transformation (7.3) gelangen wir sofort zu dem linearen System

$$
\begin{aligned}
&v'_1 = v_2,\\
&v'_2 = v_3,\\
(7.8)\qquad &\ldots.\\
&v'_{n-1} = v_n,\\
&v'_n = - a_0(t)\, v_1 - a_1(t)\, v_2 - \ldots - a_{n-1}(t)\, v_n + g(t).
\end{aligned}
$$

Mit den Bezeichnungen

$$
(7.9)\qquad A(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_3 & \ldots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad b(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ g(t) \end{pmatrix}
$$

stellt also das System (7.8) einen Spezialfall des linearen Systems (6.2) dar.

Seien $D \subset \mathbb{R}$ ein nichtentartetes Intervall und $t_0 \in D$. Neben der DG (7.7) betrachten wir die AWA

(7.10) $$x^{(n)} + a_{n-1}(t)\, x^{(n-1)} + a_{n-2}(t)\, x^{(n-2)} + \ldots + a_1(t)\, x' + a_0(t)\, x = g(t),$$
$$x(t_0) = x_{01},\ x'(t_0) = x_{02},\ \ldots,\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{0n},$$

Dann lautet das Analogon zum Satz 2 aus § 6:

Satz 3: (Existenz und Einzigkeit) Es seien $a_i \in C(D)$ für $i = 0, \ldots, n-1$ und $g \in C(D)$. Dann besitzt die Cauchy-Aufgabe (7.10) für jedes $t_0 \in D$ und jedes $x_0 \in \mathbb{R}^n$ genau eine Lösung $u \in C^n(D)$.

Ebenso gelten natürlich die Aussagen über die Struktur der Lösungsmengen von homogener und inhomogener DG.

Satz 4: (i) Jede Linearkombination $\sum_{j=1}^{m} c_j u_j$ von Lösungen der homogenen DG

(7.11) $$x^{(n)} + a_{n-1}(t)\, x^{(n-1)} + a_{n-2}(t)\, x^{(n-2)} + \ldots + a_1(t)\, x' + a_0(t)\, x = 0$$

ist wieder Lösung dieser Gleichung.

(ii) Seien M_0 die Lösungsmenge der linearen homogenen DG (7.11) und M die Lösungsmenge der linearen inhomogenen DG

(7.7) $$x^{(n)} + a_{n-1}(t)\, x^{(n-1)} + a_{n-2}(t)\, x^{(n-2)} + \ldots + a_1(t)\, x' + a_0(t)\, x = g(t)$$

Dann gilt

$$M = \{ \bar{u} + u : u \in M_0 \},$$

wobei $\bar{u} \in M$ beliebig ist.

(iii) Die homogene DG (7.11) besitzt n linear unabhängige Lösungen und beliebige $(n + 1)$ Lösungen von (7.11) sind linear abhängig.

Beweis: (i), **(ii)** folgen sofort (Ü).

(iii) Wir betrachten das äquivalente homogene System (7.8) (also mit $G = 0$ auf D). Nach Satz 3 (iii) aus § 6 besitzt dieses System n linear unabhängige Lösungen

$$v_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ \ldots \\ v_{1n} \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ \ldots \\ v_{2n} \end{pmatrix},\ \ldots,\ v_n = \begin{pmatrix} v_{n1} \\ v_{n2} \\ \ldots \\ v_{nn} \end{pmatrix} \in C^1(D; \mathbb{R}^n).$$

Jede erste Koordinate v_{k1} dieser Vektoren v_k ist offenbar n-mal stetig differenzierbar auf D und ist Lösung der homogenen DG (7.11). Zur besseren Übersicht bezeichnen wir

$$u_k := v_{k1},\ k = 1, \ldots, n.$$

Zeigen, daß die u_k linear unabhängig sind. Sei also

(7.12) $$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, u_k(t) = 0 \qquad \forall\, t \in D.$$

Wir dürfen die Gleichung (7.12) $(n - 1)$-mal nach t ableiten, erhalten also

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, u_k^{(i)}(t) = 0 \qquad \forall\, t \in D,\ i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Mit anderen Worten: Wenn (7.12) gilt, so folgt, daß die Skalare α_k einem Gleichungssystem genügen, dessen Determinante aus den n Spaltenvektoren v_k besteht, in der neuen Bezeichnung geschrieben als

(7.13) $$w(t) := \begin{vmatrix} u_1^{(0)}(t) & u_2^{(0)}(t) & \dots & u_n^{(0)}(t) \\ u_1^{(1)}(t) & u_2^{(1)}(t) & \dots & u_n^{(1)}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n-1)}(t) & u_2^{(n-1)}(t) & \dots & u_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}.$$

(Wir nennen diese Determinante ebenfalls Wronski-Determinante, nämlich der Lösungen von (7.11))
Offenbar gilt $w(t) \neq 0 \quad \forall\, t \in D$, also müssen alle $\alpha_k = 0$ sein. Somit sind die u_k linear unabhängig.
Zeigen nun, daß es keine $n + 1$ linear unabhängigen Lösungen zu (7.11) geben kann. Wir nehmen an, es gäbe $n + 1$ linear unabhängige Lösungen
u_k, $k = 1, \dots, n + 1$ der DG (7.11). D.h., falls

$$\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k u_k(t) = 0 \qquad \forall\, t \in D, \qquad \text{so} \quad \alpha_k = 0 \quad \forall\, k = 1, \dots, n+1.$$

Nach obiger Konstruktion erzeugt jede Lösung u_k der DG (7.11) eine (vektorielle) Lösung

$$U_k := \begin{pmatrix} u_k \\ u_k^{(1)} \\ \dots \\ u_k^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

des Systems (7.8). Dabei gilt natürlich $\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k U_k(t) = 0 \qquad \forall\, t \in D,$
$i = 0, 1, \dots, n-1$, und alle $\alpha_k = 0$ nach Annahme. Damit haben wir $(n + 1)$ linear unabhängige Lösungen des Systems (7.8) erhalten, was ein Widerspruch zum Satz 3 (iii) aus § 6 ist.

Jeweils n linear unabhängige Lösungen der homogenen DG (7.11) wollen wir Fundamentalsystem nennen. Ist dieses bekannt, so kann die allgemeine Lösung der inhomogenen DG (7.7) durch Variation der Konstanten erhalten werden, unter Verwendung der Fundamentalmatrix, die der Wronski-Determinante (7.13) enspricht, und dem Vektor b aus (7.9) (**Ü**).

Analog zur Bemerkung 7 im vorigen Paragraphen können wir wiederum feststellen, daß auch die Ergebnisse für lineare DG höherer Ordnung auf komplexe Koeffizienten, rechte Seiten und Anfangswerte übertragen werden können.

Lineare Gleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten
Wie im Fall der linearen Systeme mit konstanten Koeffizienten läßt sich die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung durch elementare Funktionen ausdrücken.
Theoretisch wäre eine Übertragung der entsprechenden Resultate möglich, es geht aber wesentlich einfacher.
Wir betrachten die lineare homogene DG mit konstanten Koeffizienten
(7.14) $$L(x) := x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + a_{n-2} x^{(n-2)} + \dots + a_1 x' + a_0 x = 0.$$
Der Abkürzung halber sei die linke Seite der DG (7.14) mit $L(x)$ bezeichnet. Man sagt auch, " L ist ein linearer gewöhnlicher Differentialoperator der Ordnung n mit konstanten Koeffizienten".
Wir folgen einer Idee Eulers und suchen Lösungen von (7.14) in der Gestalt
(7.15) $$u(t) := e^{\lambda t},$$

wobei $\lambda \in \mathbb{C}$ fixiert sei. Einsetzen von (7.15) in (7.14) ergibt

(7.16) $L(u) = L(e^{\lambda t}) = (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + ... + a_1\lambda + a_0)\, e^{\lambda t} = P(\lambda)\, e^{\lambda t} = 0$

wobei wir mit

(7.17) $P(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + ... + a_1\lambda + a_0$

das sogenannte **charakteristische Polynom** der DG (7.14) bezeichnen.

Ü: Das charakteristische Polynom (7.17) stimmt mit der Determinante von $A - \lambda I$ überein, wobei die Matrix A gemäß (7.9) gebildet wird.

Aus der Beziehung (7.16) folgt sofort

Lemma 5: Die Funktion $u(t) := e^{\lambda t}$ ist genau dann Lösung der DG (7.14), wenn $P(\lambda) = 0$.

Besitzt das charakteristische Polynom genau n verschieden Wurzeln λ_k, so erhalten wir n Lösungen $u_k(t) := e^{\lambda_k t}$, $t \in \mathbb{R}$.
Wir müssen noch klären, ob diese Funktionen auch linear unabhängig sind. Dann hätten wir ein Fundamentalsystem zu (7.14).
Zu diesem Zweck formulieren wir das folgende

Lemma 6: Seien $\lambda_k \in \mathbb{C}$ $(k = 1, ..., m)$ paarweise verschieden und $n_1, n_2, ..., n_m$ natürliche Zahlen. Dann sind die Funktionen

(7.18) $e^{\lambda_1 t},\ te^{\lambda_1 t},\ ...,\ t^{n_1}e^{\lambda_1 t},\ e^{\lambda_2 t},\ te^{\lambda_2 t},\ ...,\ t^{n_2}e^{\lambda_2 t},\ ...,\ e^{\lambda_m t},\ te^{\lambda_m t},\ ...,\ t^{n_m}e^{\lambda_m t}$

auf jedem nichtentarteten Intervall $J \subset \mathbb{R}$ linear unabhängig.

Beweis: Wir nehmen an, die gegebenen Funktionen seien linear abhängig, dann existieren Konstanten $\alpha_{jk} \in \mathbb{C}$ $(j = 0, ..., n_k;\ k = 1, ..., m)$, die nicht alle verschwinden, so daß

(7.19) $$\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=0}^{n_k} \alpha_{jk}\, t^j\, e^{\lambda_k t} = 0 \qquad \forall\, t \in J$$

gilt. Die Beziehung (7.19) können wir in die Form

(7.20) $$\sum_{k=1}^{m} P_{n_k}(t)\, e^{\lambda_k t} = 0 \quad \forall\, t \in J \qquad \text{mit} \quad P_{n_k}(t) := \sum_{j=0}^{n_k} \alpha_{jk}\, t^j$$

bringen. Da nach Annahme nicht alle α_{jk} verschwinden, sind auch nicht alle Polynome P_{n_k} identisch null.

Sei also o.B.d.A. $P_{n_m} \neq 0$. Wir multiplizieren die Gleichung (7.20) mit $e^{-\lambda_1 t}$, erhalten

$$P_{n_1}(t) + \sum_{k=2}^{m} P_{n_k}(t)\, e^{(\lambda_k - \lambda_1)t} = 0 \qquad \forall\, t \in J.$$

Die letzte Gleichung wird $(n_1 + 1)$ mal nach t differenziert. Es ergibt sich

(7.21) $$\sum_{k=2}^{m} P^1_{n_k}(t)\, e^{(\lambda_k - \lambda_1)t} = 0 \qquad \forall\, t \in J.$$

Es ist leicht zu sehen, daß der Grad von $P^1_{n_m}$ gleich dem von P_{n_m} ist, also verschwindet $P^1_{n_m}$ nicht.

Multiplizieren (7.21) mit $e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t}$ und erhalten

$$P^1_{n_2}(t) + \sum_{k=3}^{m} P^1_{n_k}(t)\, e^{(\lambda_k - \lambda_2)t} = 0 \qquad \forall\, t \in J.$$

Die letzte Gleichung wird $(n_2 + 1)$ mal nach t differenziert. Es ergibt sich

(7.22) $$\sum_{k=3}^{m} P^2_{n_k}(t)\, e^{(\lambda_k - \lambda_2)t} = 0 \qquad \forall\, t \in J.$$

Hierbei ist wiederum $P^2_{n_m}$ nicht identisch null.
Wir setzen diesen Prozeß fort und gelangen zu

$$P^{m-1}_{n_m}(t)\, e^{(\lambda_m - \lambda_{m-1})t} = 0 \qquad \forall\, t \in J,$$

wobei $P^{m-1}_{n_m}$ nicht identisch verschwindet, was aber nicht möglich ist. Also war die Annahme falsch und die Funktionen in (7.18) sind linear unabhängig.

Wir diskutieren nun den Fall, daß das charakteristische Polynom (7.17) der DG (7.14) mehrfache Wurzeln besitzt.
Sei also $\lambda \in \mathbb{C}$ eine m-fache Wurzel von (7.17). Dann gilt offenbar

(7.23) $$P(\lambda) = P'(\lambda) = P''(\lambda) = \ldots = P^{(m-1)}(\lambda) = 0, \quad P^{(m)}(\lambda) \neq 0.$$

Somit gilt für alle $k = 1, \ldots, m-1$ die folgende Gleichungskette

$$L(t^k e^{\lambda t}) = L\Big(\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k}(e^{\lambda t})\Big) = \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} L(e^{\lambda t}) = \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k}\big(P(\lambda)\, e^{\lambda t}\big) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} P^{(m-i)}(\lambda)\, t^i e^{\lambda t} = 0 \qquad \text{(Leibnizsche Formel).}$$

Neben $e^{\lambda t}$ sind also auch alle Funktionen der Art $t^k e^{\lambda t}$ mit $k = 1, \ldots, m-1$ Lösungen der DG (7.14). Unser Resümee lautet:

Satz 7: Seien die komplexen Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ Wurzeln des charakteristischen Polynoms der DG (7.14) mit den entsprechenden Vielfachheiten $m_1, m_2, \ldots, m_r$ (dann gilt $\sum_{i=1}^{r} m_i = n$). Dann bilden die n Funktionen

(7.24) $$e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \ldots, t^{m_1-1}e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, te^{\lambda_2 t}, \ldots, t^{m_2-1}e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_r t}, te^{\lambda_r t}, \ldots t^{m_r-1}e^{\lambda_r t}$$

ein Fundamentalsystem der DG (7.14).

Falls alle Koeffizienten der DG (7.14) reell sind, so kann anstelle von (7.24) stets eine Fundamentalsystem angegeben werden, das nur aus reellen Funktionen besteht.
Dann treten nämlich die komplexen Wurzeln des charakteristischen Polynoms immer paarweise mit ihren konjugierten Werten auf.

Sei $P(\lambda) = 0$ mit $\lambda := \alpha + i\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0)$. Dann gilt auch $P(\bar{\lambda}) = 0$ mit

$\bar{\lambda} := \alpha - i\beta$. Dabei haben λ und $\bar{\lambda}$ gleiche Vielfachheiten.

Wir ersetzen Paare von Lösungen der Art $t^k e^{\lambda t}$, $t^k e^{\bar{\lambda} t}$ durch die Paare

$$Re(t^k e^{\lambda t}) = t^k e^{\alpha t} \cos(\beta t), \quad Im(t^k e^{\lambda t}) = t^k e^{\alpha t} \sin(\beta t).$$

Beispiel 8. (Gedämpfte und ungedämpfte Schwingungen)
Eine Masse m (> 0) sei an einer Feder mit der Federkonstanten c (> 0) aufgehangen. Die Bewegung der Masse erfolge parallel zur Schwerkraft $gm.$ $(g > 0)$

Mit $x = x(t)$ bezeichnen wir die Lage der Masse m zum Zeitpunkt t, als Nullpunkt für x sei die Lage bezeichnet, die die Masse im Ruhezustand bei Vernachlässigung der Schwerkraft einnimmt. Dabei sei die Richtung der x-Achse die Richtung der Schwerkraft.
Wir wollen die Bewegung dieses "Federschwingers" studieren. Dazu stellen wir die Kräftebilanz auf:

(7.25) $mx'' = - cx - bx' + mg$

Mit bx' ($b \geq 0$, für $b = 0$ ist die Bewegung ungedämpft) wird die Dämpfungskraft (z.B. durch Luftwiderstand hervorgerufen) bezeichnet, das Minus-Zeichen vor bx sagt, daß die Dämpfung der Bewegung entgegengesetzt ist. Ebenso ist die Federkraft cx (Hookesches Gesetz!) der Bewegung entgegengesetzt.
Zum Zeitpunkt $t = 0$ seien Anfangsauslenkung u_0 und Anfangsgeschwindigkeit v_0 gegeben.
Eine partikuläre Lösung der inhomogenen DG (7.25) ist offenbar

$$x(t) := \frac{mg}{c}.$$

Das ist der Betrag, um den die Feder bei Anhängen des Massestücks nach dem Hookschen Gesetz verlängert wird. Die Funktion wird zur Lösung der homogenen DG hinzuaddiert. Wir könnten also auch als Ursprung der x-Achse diesen Wert $\frac{mg}{c}$ wählen und in der Kräftebilanz die Schwerkraft fortlassen.
Wir wollen nun die zu (7.25) zugehörige homogene DG

(7.26) $$x'' + \frac{b}{m}x' + \frac{c}{m}x = 0$$

lösen. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind

(7.27) $$\lambda_1 = -\frac{b}{2m} + \frac{1}{2m}\sqrt{b^2 - 4cm} \quad \text{und} \quad \lambda_1 = -\frac{b}{2m} - \frac{1}{2m}\sqrt{b^2 - 4cm}$$

Wir nehmen Fallunterscheidungen vor:
1) $b^2 > 4cm$ ("Starke Dämpfung")
In diesem Fall sind die Nullstellen (7.27) beide negativ und die allgemeine Lösung von (7.26) lautet

(7.28) $$u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Diese Funktion u beschreibt einen aperiodischen Abklingvorgang.
Werden z.B. die Anfangsbedingungen

(7.29) $$u(0) = u_0 (\neq 0), \qquad u'(0) = 0$$

gewählt, dann erhalten wir die einzige Lösung zu (7.26), (7.29)

(7.30) $$u(t) = \frac{u_0}{\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_1 e^{\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{\lambda_1 t}).$$

Nach Loslassen kehrt das Massestück asymptotisch in seine Ruhelage zurück, ohne diese zu überschreiten (**Ü**).
2) $b^2 = 4cm$ ("Starke Dämpfung" - Sonderfall)
Aus (7.27) folgt sofort, daß eine doppelte Nullstelle $\lambda = -\frac{b}{2m}$ vorliegt.
Für die allgemeine Lösung von (7.26) ergibt sich

(7.31) $$u(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}.$$

Es handelt sich ebenfalls um einen aperiodischen Abklingvorgang, in Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen kann dabei die Ruhelage höchstens einmal angenommen werden.
3) $0 < b^2 < 4cm$ ("Schwache Dämpfung")
In diesem Fall liegen zwei zueinander konjugiert-komplexe Nullstellen

$$\lambda_1 = -\frac{b}{2m} + \frac{i}{2m}\sqrt{b^2 - 4cm} \quad \text{und} \quad \lambda_1 = -\frac{b}{2m} - \frac{i}{2m}\sqrt{b^2 - 4cm}$$

vor. Da die Koeffizienten der DG reell sind erhalten wir ein reelles Fundamentalsystem

$$\{ \mathrm{Re}(e^{\lambda_1 t}), \mathrm{Im}(e^{\lambda_1 t}) \} = \{ e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t), e^{-\frac{b}{2m}t} \sin(\omega t) \}$$

mit $\omega := \frac{b}{2m}\sqrt{b^2 - 4cm}$ ("Kreisfrequenz").

Die allgemeine Lösung von (7.26) lautet dann

(7.32) $$u(t) = c_1 e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t) + c_2 e^{-\frac{b}{2m}t} \sin(\omega t).$$

Es handelt sich um eine gedämpfte harmonische Schwingung, deren Amplitude exponentiell abklingt. Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen durch die Ruhelage vergeht die Zeit $T := \frac{2\pi}{\omega}$ (Periode genannt, obwohl u nicht periodisch ist).

Mit zunehmendem b (= stärkerer Dämpfung) nimmt ω ab und T zu.

Für die Anfangswerte (7.29) ergibt sich

(7.33) $$u(t) = u_0 e^{-\frac{b}{2m}t} \left(\cos(\omega t) + \frac{b}{2m\omega} \sin(\omega t) \right).$$

Dabei läßt sich die Klammer in (7.33) als Sinusfunktion mit Phasenverschiebung aufschreiben.

4) $b = 0$ (dämpungsfreie Bewegung - Idealisierung)

In diesem liegen die beiden rein imaginären Nullstellen

$$\lambda_1 = i\sqrt{\frac{c}{m}} \quad \text{und} \quad \lambda_1 = -i\sqrt{\frac{c}{m}}$$

vor. Da die Koeffizienten der DG reell sind erhalten wir ein reelles Fundamentalsystem

$$\{ \mathrm{Re}(e^{\lambda_1 t}), \mathrm{Im}(e^{\lambda_1 t}) \} = \{ \cos(\omega t), \sin(\omega t) \}$$

mit $\omega := \sqrt{\frac{c}{m}}$ ("Kreisfrequenz").

Die allgemeine Lösung von (7.26) lautet dann

(7.34) $$u(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t).$$

Es handelt sich um eine ungedämpfte harmonische Schwingung, dabei ist die Kreisfrequenz höher als im gedämpften Fall.

§ 8 Randwertaufgaben für gewöhnliche Differentialgleichungen

Im Unterschied zu den Anfangswertaufgaben für GDG, bei denen die gesuchten Funktionen und ggf. ihre Ableitungen vorgeschriebene Werte zu einem (Zeit-)Punkt t_0 annehmen sollen, suchen wir jetzt Lösungen zu GDG, die auf einem von vornherein gegebenen Intervall $[a, b]$ definiert sind und gewissen Bedingungen an den "Rändern" a und b genügen.

Wir beschränken uns dabei auf reelle GDG 2. Ordnung, die von besonderer Wichtigkeit bei vielen Anwendungen sind.

Im Unterschied zum Bisherigen bezeichnen wir die unabhängige Variable - jetzt meist für eine Ortsvariable anstelle der Zeit stehend - mit x.

Definition 1. Seien $E := [a, b]\times\Omega$ mit $-\infty < a < b < \infty$ und $\Omega \in \mathbb{R}^2$ offen und $f \in C(E)$. Weiter seien reelle Zahlen $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_i$, $i, j = 1, 2$ gegeben. Dabei gelte

(8.1) $$\mathrm{rang} \begin{pmatrix} \alpha_{11}, & \alpha_{12}, & \beta_{11}, & \beta_{12} \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22}, & \beta_{21}, & \beta_{22} \end{pmatrix} = 2$$

und es sei mindestens ein α_{ij} und ein β_{ij} verschieden von null.

Die Aufgabe

(8.2) $y'' = f(x, y, y'), \qquad x \in J := [a, b],$

(8.3) $R_1 y := \alpha_{11} y(a) + \alpha_{12} y'(a) + \beta_{11} y(b) + \beta_{12} y'(b) = \gamma_1,$

$R_2 y := \alpha_{21} y(a) + \alpha_{22} y'(a) + \beta_{21} y(b) + \beta_{22} y'(b) = \gamma_2,$

heißt **Randwertaufgabe** für eine GDG 2. Ordnung mit allgemeinen linearen Randbedingungen.

Eine Funktion $u \in C^2(J)$ heißt **Lösung der RWA** (8.2), (8.3), falls

$(u(x), u'(x)) \in \Omega \quad \forall x \in J,\ u''(x) = f(x, u(x), u'(x)) \quad \forall x \in J,\ R_1 u = \gamma_1,\ R_2 u = \gamma_2.$

Bemerkungen 2. (i) Die Bedingung (8.1) sichert, daß es Funktionen aus $u \in C^2(J)$ gibt, die den Randbedingungen (8.3) genügen (s. Lemma 6). Mit der weiteren Bedingung "mindestens ein α_{ij} und ein β_{ij} verschieden von null" wird gewährleistet, daß die RWA nicht zu einer AWA wird.

(ii) Häufig vorkommende Spezialfälle der allgemeinen linearen RB (8.3) sind:

* Randbedingungen 1. Art (oder Dirichlet-Randbedingungen)

$y(a) = \gamma_1, \qquad y(b) = \gamma_2.$

* Randbedingungen 2. Art (oder Neumann-Randbedingungen)

$y'(a) = \gamma_1, \qquad y'(b) = \gamma_2.$

* Randbedingungen 3. Art (oder Sturm-Randbedingungen)

$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \gamma_1,\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_2,\ (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0,\ \beta_1^2 + \beta_2^2 > 0).$

* Periodische Randbedingungen

$y(a) - y(b) = 0, \qquad y'(a) - y'(b) = 0.$

(iii) Sind γ_1 und γ_2 gleich null, so sprechen wir von **homogenen**, sonst von **inhomogenen** Randbedingungen.

(iv) Möglich sind auch nichtlineare RB sowie weitere Bedingungen (Nebenbedingungen), wie z.B. die gegebene Länge eines durchhängenden Seiles.
Ebenso ist es möglich, RWA auf unbeschränkten Intervallen zu untersuchen und Abklingbedingungen zu stellen. Wir verweisen auf die Literatur: Walter, GDG; Heuser, GDG; Collatz, DG; Kamke, GDG; ...).

Verschiedene statische oder stationäre Aufgaben, wie z.B. Durchbiegung von Stäben, Wärmeleitung in Stäben führen auf RWA für GDG.
Partielle Differentialgleichungen, die z.B. Schwingungsvorgänge in Raum und Zeit untersuchen, führen nach sogenannten Separationsschritten auf Hilfsaufgaben, die RAW für GDG darstellen.
Bei der Behandlung von klassischen Variationsaufgaben entstehen ebenfalls RWA.

Beispiel 3. (Wärmeleitung im endlichen Stab) Ein Stab sei idealisierend als Intervall [a, b] angenommen. Es interessiert die stationäre Temperaturverteilung.
Unter entsprechenden physikalischen Annahmen genügt die Temperatur u der GDG 2. Ordnung

(8.4) $(k(x)\, u'(x))' + f(x) = 0.$

Dabei sind $k > 0$ die im Punkt x vorhandenen Wärmeleitfähigkeit des Stabes und f eine im Punkt x wirkende äußere Quelldichte. Sollen an den Stabenden vorgegebene konstante Temperaturen eingehalten werden, so werden 1. RB gefordert, also $u(a) = \gamma_1,\ u(b) = \gamma_2$. Dem Modell der Wärmeisolation in den Endpunkten entsprechen die homogenen 2. RB, also $u'(a) = 0,\ u'(b) = 0$.
Wärmeaustausch läßt sich mit den 3. RB modellieren, natürlich können an den Stabenden verschiedene Arten von RB ("gemischte" RB) gestellt werden.

Bei komplexeren Modellen für die Wärmeausbreitung kann die Funktion k von u' abhängen, was zu nichtlinearen Aufgaben führt. Bei Berücksichtigung von Wärmeabstrahlung hängt f von u ab, was ebenfalls zu Nichlinearität führt.

Die folgenden zwei Beispiele zeigen die *mathematischen Probleme* bei der Behandlung von RWA für GDG. Im Unterschied zu AWA für GDG, für die es die allgemeinen Sätze von Peano und Picard / Lindelöf gibt, sind die Probleme der Existenz und Einzigkeit bei RWA wesentlich komplexer. Schon bei einfachen Aufgaben gibt es interessante Phänomene.

Beispiele 4. (i) Wir betrachten die DG

(8.5) $\quad y'' = 0.$

Die allgemeine Lösung ist $u(x) = c_1x + c_2$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Stellen wir die RB 1. Art $u(a) = \gamma_1$, $u(b) = \gamma_2$, so ist die entstehende RWA für alle γ_1, γ_2 eindeutig lösbar.
Werden hingegen die 2. RB $u'(a) = \gamma_1$, $u'(b) = \gamma_2$ gestellt, so besitzt die RWA für $\gamma_1 \neq \gamma_2$ keine Lösung, für $\gamma_1 = \gamma_2$ jedoch unendlich viele. Diskutieren Sie die 3. RB (**Ü**).
(ii) Wir betrachten die nichtlineare RWA

(8.6) $\quad y'' = \frac{1}{2} y'^3, \qquad y'(0) = \gamma_1, \qquad y(1) = \gamma_2.$

Durch die Substitution $z := y'$ wird die DG in (8.6) in die DG mit trennbaren Variablen

(8.7) $\quad z' = \frac{1}{2} z^3$

überführt. Im Falle $\gamma_1 = 0$ ist $z(x) = 0$ für $x \in [0, 1]$ einzige Lösung dieser DG. Dann ist $y(x) = \gamma_2$ für $x \in [0, 1]$ einzige Lösung der RWA (8.6).
Ist $\gamma_1 \neq 0$, so ist die Funktion

(8.8) $\quad z(x) := \operatorname{sign}(\gamma_1) \left(\frac{1}{\frac{2}{\gamma_1}} - x\right)^{-\frac{1}{2}}$ für $x \in [0, \frac{1}{\frac{2}{\gamma_1}}[$

Lösung der DG (8.7) unter der Bedingung $z(0) = y'(0) = \gamma_1$ (Ü).
Durch Integration erhalten wir aus (8.8)

(8.9) $\quad y(x) := -2 \operatorname{sign}(\gamma_1) \left(\frac{1}{\frac{2}{\gamma_1}} - x\right)^{\frac{1}{2}} + c$ für $x \in [0, \frac{1}{\frac{2}{\gamma_1}}[.$

Diese Funktion existiert nur auf $[0, \frac{1}{\frac{2}{\gamma_1}}]$, erreicht also für $|\gamma_1| > 1$ nicht den Punkt $x = 1$ und für $\gamma_1 = 1$ ist y auf $[0, 1]$ nicht differenzierbar. Das Resümee lautet:
Für $|\gamma_1| \geq 1$ besitzt die RWA (8.6) keine Lösung, für $\gamma_1 = 0$ ist $y(x) = \gamma_2$ für $x \in [0, 1]$ ihre einzige Lösung und für $|\gamma_1| < 1$ ist die Funktion

$$y(x) := -2 \operatorname{sign}(\gamma_1) \left(\frac{1}{\frac{2}{\gamma_1}} - x\right)^{\frac{1}{2}} + 2 \operatorname{sign}(\gamma_1) \left(\frac{1}{\frac{2}{\gamma_1}} - 1\right)^{\frac{1}{2}} + \gamma_2 \qquad \text{für } x \in [0, 1]$$

einzige Lösung.

Wie die folgenden Lemmata zeigen, lassen sich inhomogene lineare Randbedingungen durch sogenannte Homogenisierung beseitigen.
Wie leicht nachzuprüfen, gilt

Lemma 5. (**Homogenisierung der Randbedingungen**) Die Funktion $w \in C^2(J)$ erfülle die RB (8.3). Die Funktion $u \in C^2(J)$ ist Lösung der RWA (8.2), (8.3) genau dann, wenn die Funktion $v \in C^2(J)$ mit $v := u - w$ Lösung der RWA

(8.10) $\quad y'' = f(x, y + w, y' + w') - w''$

(8.11) $\quad R_1y = 0, \qquad R_2y = 0$ ist.

Lemma 6. Unter den Bedingungen (8.1) existiert eine Funktion $w \in C^2(J)$, die den RB (8.3) für beliebig gegebene γ_1, γ_2 genügt.

Beweis: Wegen (8.1) folgt, daß das System

$$\alpha_{11}y(a) + \alpha_{12}y'(a) + \beta_{11}y(b) + \beta_{12}y'(b) = \gamma_1,$$
$$\alpha_{21}y(a) + \alpha_{22}y'(a) + \beta_{21}y(b) + \beta_{22}y'(b) = \gamma_2$$

mindestens eine Lösung $y(a), y'(a), y(b), y'(b)$ besitzt (**Ü**). Dann läßt sich leicht zeigen, daß w als Polynom 3. Grades $w(x) = c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4$ durch $w(a) = y(a), w'(a) = y'(a), w(b) = y(b), w'(b) = y'(b)$ eindeutig bestimmt ist (**Ü**).

Lineare Randwertaufgaben

Eine RWA heißt linear, wenn sowohl die DG linear (in der gesuchten Funktion und ihren Ableitungen) als auch die RB linear sind. Die allgemeine lineare RWA für eine GDG 2. Ordnung lautet demnach:

(8.12) $L(y) := y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$ für $x \in [a, b] =: J$,

(8.3) $R_1y := \alpha_{11}y(a) + \alpha_{12}y'(a) + \beta_{11}y(b) + \beta_{12}y'(b) = \gamma_1$,

$R_2y := \alpha_{21}y(a) + \alpha_{22}y'(a) + \beta_{21}y(b) + \beta_{22}y'(b) = \gamma_2$,

mit $a_1, a_0, f \in C(J)$ sowie Bedingungen (8.1).

Bemerkungen 7. (i) Nach den Lemmata 5 und 6 läßt sich die inhomogene lineare RWA (8.12), (8.3) stets in eine "halbhomogene" lineare RWA

(8.13) $L(v) = f(x) - L(w)$,

(8.14) $R_1v = 0, \ R_2v = 0$

überführen, wobei $w \in C^2(J)$ den inhomogenen RB (8.3) genügt.

In der DG ändert sich also nur die rechte Seite.

Wenn wir über eine Lösungstheorie für die halbhomogene RWA (8.13), (8.14) verfügen, die von der konkreten Gestalt der rechten Seite der DG keinen Gebrauch macht, so ist auch das volle inhomogenen Problem gelöst.

(ii) Endliche Linearkombinationen von Lösungen der homogenen linearen RWA sind wieder Lösungen der homogenen RWA.

Die Differenz von zwei Lösungen der inhomogenen RWA (oder der halbhomogenen RWA) ist Lösung der homogenen RWA.

(iii) Sind eine partikuläre Lösung der inhomogenen (bzw. der halbhomogenen) RWA und alle Lösungen der homogenen RWA bekannt, so sind alle Lösungen der inhomogenen (bzw. der halbhomogenen) RWA bekannt.

Die Linearität gestattet folgende Existenz- und Einzigkeitsaussage

Satz 8. (i) Sei u_1, u_2 ein Fundamentalsystem der homogenen DG (8.12).

Die RWA (8.12), (8.3) ist genau dann eindeutig lösbar, wenn gilt

(8.15) $$\begin{vmatrix} R_1u_1 & R_1u_2 \\ R_2u_1 & R_2u_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

(ii) Die inhomogene RWA (8.12), (8.3) ist genau dann eindeutig lösbar, wenn die zugehörige homogene RWA nur trivial lösbar ist.

Beweis: Die allgemeine Lösung der inhomogenen DG (8.12) läßt sich darstellen als

$$u = u^* + c_1u_1 + c_2u_2,$$

wobei u^* eine partikuläre Lösung der inhomogenen DG (8.12) ist (vgl § 7). Die RWA (8.12), (8.3) ist somit genau dann eindeutig lösbar, wenn die Konstanten c_1

und c_2 eindeutig aus den RB bestimmbar sind, d.h., wenn das lineare Gleichungssystem

$$R_1u = R_1u^* + c_1R_1u_1 + c_2R_1u_2 = \gamma_1,$$
$$R_2u = R_2u^* + c_1R_2u_1 + c_2R_2u_2 = \gamma_1$$

eindeutig nach c_1 und c_2 auflösbar ist. Das ist genau dann der Fall, wenn (8.15) gilt.

(ii) Die (volle) homogene RWA besitzt immer die triviale Lösung $u \equiv 0$.
Nach Teil (i) besitzt sie nur diese, wenn die Bedingung (8.15) erfüllt ist.

Wir betrachten jetzt sogenannte **Sturmsche Randwertaufgaben** mit homogenen Randbedingungen, was nach der Bemerkung 7 (i) keine wesentliche Einschränkung ist. Der lineare Differentialoperator L wird dabei in einer für weitere Untersuchungen zweckmäßigen Form geschrieben.

(8.16) $L(y) := -(p(x)y')' + q(x)y = f(x)$ für $x \in [a, b] =: J$,

(8.17) $R_1y := \alpha_1y(a) + \alpha_2y'(a) = 0$,
$R_2y := \beta_1y(b) + \beta_2y'(b) = 0$.

Dabei seien folgende Bedingungen an die "Daten" auferlegt:

(8.18) $p \in C^1(J)$ mit $p(x) > 0 \ \forall x \in J$, $q, f \in C(J)$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 > 0$.

Bemerkung 9. Der Differentialoperator in (8.16) läßt sich durch "Ausdifferenzieren" sofort in die Form (8.12) bringen. Andererseits gelangen wir von der Form (8.12) durch Multiplikation mit $p(x) := \exp(\int a_1(x)\,dx)$ zur sogenannten selbstadjungierten Form (8.16). Übrigens tritt diese Darstellung (8.16) in natürlicher Weise bei vielen Anwendungsaufgaben auf (vgl. (8.4)).

Die Nützlichkeit der Form (8.16) zeigt sich auch beim Beweis des folgenden Satzes.

Satz 10. (Einzigkeitsaussage in Abhängigkeit von den Daten der Aufgabe)
Neben den Bedingungen (8.18) gelte weiter:

(8.19) $q(x) \geq 0 \ \forall x \in J$, $\alpha_1, -\alpha_2, \beta_1, \beta_2 \geq 0$.

Dann ist die homogenen Sturmsche RWA (8.16), (8.17) nur trivial lösbar, wenn zusätzlich eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(8.20) $\alpha_1 > 0$ oder

(8.21) $\beta_1 > 0$ oder

(8.22) $\exists\, x_0 \in J$: $q(x_0) > 0$.

Beweis: Sei $u \in C^2(J)$ eine Lösung der homogenen RWA (8.16), (8.17). Wir multiplizieren die DG (8.16) mit u und integrieren über J. Somit erhalten wir

$$-\int_a^b (p(x)u'(x))'\,u(x)\,dx + \int_a^b q(x)u^2(x)\,dx = 0,$$

hieraus durch partielle Integration

(8.23) $$\int_a^b p(x)(u'(x))^2\,dx + \int_a^b q(x)u^2(x)\,dx - p(b)u'(b)u(b) + p(a)u'(a)u(a) = 0$$

Die Voraussetzungen (8.18), (8.19) sichern, daß in (8.23) eine Summe aus nichtnegativen Summanden steht. Diese Summe ist nur gleich null, wenn alle Summanden verschwinden. Also folgt leicht (**Ü**)

$$p(x)(u'(x))^2 = 0 \qquad \forall\, x \in J,$$

daher ist u eine Konstante.
Im Falle von (8.20) folgt aus der Randbedingung

$$R_1 u := \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = \alpha_1 u(a) = 0$$

sofort $u = 0 \;\forall\, x \in J$.
Analog verfahren wir im Falle (8.21).
Aus (8.23) folgt auch $q(x)u^2(x) = 0$, also ist im Falle (8.22) $u(x_0) = 0$ und somit gilt wiederum die Behauptung.

Aus dem letzten und Satz 8 (ii) folgt sofort

Satz 11. (Existenz und Einzigkeit) Unter den Voraussetzungen des Satzes 10 besitzt die Sturmsche RWA (8.16), (8.17) (für jedes $f \in C(J)$) genau eine Lösung $u \in C^2(J)$.

Falls ihre Einzigkeit gesichert ist, kann die Lösung der Sturmschen RWA mit Hilfe der sogenannten **Greenschen Funktion** dargestellt werden.
Ohne näher auf Eigenschaften dieser Greenschen Funktion einzugehen, zeigen wir nur, daß eine bestimmte Funktion die gesuchte Lösung ist und verweisen auf die Literatur für Einzelheiten.
Zuerst zwei technische Lemmata. Durch Nachrechnen (**Ü**) wird verifiziert:

Lemma 12. (Lagrange-Identität) Für beliebige $u, v \in C^2(J)$ gilt:
(8.24) $$u\,L(v) - v\,L(u) = (p(x)\,(u'v - v'u))' \qquad \forall\, x \in J,$$
wobei L durch (8.16) definiert und $p \in C^1(J)$ ist.

Lemma 13. Sei die homogene RWA (8.16) (8.17) nur trivial lösbar. Dann existiert ein Fundamentalsystem $\{u_1, u_2\}$ zur DG
(8.25) $$L(y) := -(p(x)y')' + q(x)y = 0 \qquad \text{für } x \in J,$$
das den folgenden Bedingungen genügt:
(8.26) $$R_1 u_1 = 0, \quad R_2 u_1 \neq 0, \quad R_1 u_2 \neq 0, \quad R_2 u_2 = 0.$$

Beweis: Das relle Zahlenpaar $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ möge der Gleichung $\alpha_1\lambda + \alpha_2\mu = 0$ genügen. Dann existiert nach Satz 3 aus § 3 genau eine Lösung $u_1 \in C^2(J)$ der AWA
(8.27) $$L(y) = 0, \quad y(a) = \lambda, \quad y'(a) = \mu.$$
Offenbar gilt dann $R_1 u_1 = 0$. Wegen der vorausgesetzten Einzigkeit der trivialen Lösung zur homogenen RWA muß $R_2 u_1 \neq 0$ gelten. In analoger Weise erhalten wir die Existenz einer entsprechenden Funktion $u_2 \in C^2(J)$.
Die beiden Lösungen u_1, u_2 der DG (8.25) bilden wirklich ein Fundamentalsystem.
Ihre angenommene lineare Abhängigkeit, also $u_2 = cu_1$ mit $c \neq 0$, würde wegen $R_1 u_1 = 0$ sofort zu $R_1 u_2 = 0$ führen, was der Konstruktion von u_2 widerspricht.

Satz 14. (Darstellung der einzigen Lösung durch die Greensche Funktion) Sei die homogene RWA (8.16) (8.17) nur trivial lösbar und sei $\{u_1, u_2\}$ ein Fundamentalsystem zur DG (8.25), das den Bedingungen (8.26) genügt
Dann lautet die einzige Lösung der Sturmschen RWA (8.16), (8.17)

(8.28) $$u(x) = \int_a^b G(x, \xi)\, f(\xi)\, d\xi,$$

wobei die Greensche Funktion $G \in C(J^2)$ die Gestalt

(8.29) $$G(x,\xi) := \begin{cases} -\dfrac{u_1(x)u_2(\xi)}{p(a)W(a)} & \text{für } a \le x \le \xi \le b \\ -\dfrac{u_1(\xi)u_2(x)}{p(a)W(a)} & \text{für } a \le \xi \le x \le b \end{cases}$$

besitzt. ($W(a)$ ist der Wert der Wronski-Determinante von $\{u_1, u_2\}$ im Punkt $x = a$)

Beweis: Unter Einzigkeitsvoraussetzung existiert nach Satz 8 (ii) genau eine Lösung $u \in C^2(J)$ der RWA (8.16), (8.17). Es genügt also, zu zeigen, daß die in (8.28) angegebene Funktion eine Lösung dieser RWA ist. Offenbar folgen leicht (**Ü**)

(8.30) $$u(x) = -\int_a^x \frac{u_1(\xi)u_2(x)}{p(a)W(a)} f(\xi)\,d\xi - \int_x^b \frac{u_1(x)u_2(\xi)}{p(a)W(a)} f(\xi)\,d\xi \qquad \text{und}$$

(8.31) $$u'(x) = -\frac{1}{p(a)W(a)} \left(u_2'(x) \int_a^x u_1(\xi) f(\xi)\,d\xi + u_1'(x) \int_x^b u_2(\xi) f(\xi)\,d\xi \right)$$

Aus (8.31) folgt

(8.32) $$-(p(x)u'(x))' = \frac{1}{p(a)W(a)} \{ (p(x)u_2'(x))' \int_a^x u_1(\xi) f(\xi)\,d\xi + (p(x)u_1'(x))' \int_x^b u_2(\xi) f(\xi)\,d\xi$$
$$+ p(x)u_2'(x)u_1(x)f(x) - p(x)u_1'(x)u_2(x)f(x) \}.$$

Unter Beachtung der Beziehungen $-(p(x)u_i'(x))' + q(x)u_i(x) = 0$ für $i = 1, 2$
sowie der Lagrange-Identität (8.24) erhalten wir aus (8.32)

$$-(p(x)u'(x))' = f(x) + \frac{1}{p(a)W(a)} \left(q(x)u_2(x) \int_a^x u_1(\xi) f(\xi)\,d\xi + q(x)u_1(x) \int_x^b u_2(\xi) f(\xi)\,d\xi \right) =$$

$$= f(x) + q(x) \int_a^x \frac{u_1(\xi)u_2(x)}{p(a)W(a)} f(\xi)\,d\xi + q(x) \int_x^b \frac{u_1(x)u_2(\xi)}{p(a)W(a)} f(\xi)\,d\xi =$$

$$= f(x) - q(x)u(x) \qquad \text{unter Beachtung von (8.28), (8.29).}$$

Somit löst die Funktion u die DG (8.16).
Aus den Beziehungen (8.30), (8.31) ergibt sich, daß die in (8.28) definierte Funktion auch die RB (8.17) erfüllt (**Ü**). Dabei werden die speziellen Eigenschaften (8.26) des Fundamentalsystems $\{u_1, u_2\}$ ausgenutzt.

Bemerkung 15. Der unschätzbare Vorteil der Greenschen Funktion und der Darstellungsformel (8.28) besteht darin, daß die Greensche Funktion nicht von der rechten Seite f der DG (8.16) abhängt. Das findet seine Anwendung auch bei der Untersuchung nichtlinearer Probleme.
Die Darstellungsformel (8.28) definiert den "inversen Operator" des "Sturmschen Operators". ($\rightarrow$ Walter, Heuser, ...)

Beispiel 16. (Konstruktion einer Greenschen Funktion)
Wir betrachten die RWA

(8.33) $$-y'' = f(x), \quad y(a) = 0, \quad y(b) = 0.$$

Es handelt sich um eine Sturmsche RWA mit $p \equiv 1$, $q \equiv 0$, $\alpha_1 = \beta_1 = 1$, $\alpha_2 = \beta_2 = 0$.
Nach Satz 10 liegt Einzigkeit vor.
Zuerst suchen wir ein Fundamentalsystem zu $y'' = 0$ mit den Bedingungen (8.26).
Wir können z.B. $(\lambda, \mu) = (0, 1)$ wählen.
Die allgemeine Lösung zu $y'' = 0$ ist offenbar $u(x) = c_1x + c_2$.
Suchen also u_1 mit $u_1(a) = 0 = c_1a + c_2$ und $u_1'(a) = 1 = c_2$. Somit ist $u_1(x) = x - a$.
Analog erhalten wir $u_2(x) = x - b$.
Die Wronski-Determinante ist $W(x) = b - a > 0$. Die Grennsche Funktion lautet damit gemäß (8.29)

(8.34) $$G(x, \xi) := \begin{cases} \frac{(x - a)(\xi - b)}{a - b} & \text{für } a \le x \le \xi \le b \\ \frac{(\xi - a)(x - b)}{a - b} & \text{für } a \le \xi \le x \le b \end{cases}$$

Und für jedes $f \in C(J)$ ist die einzige Lösung der RWA (8.33)

(8.35) $$u(x) = \frac{1}{a - b}(x - b)\int_a^x (\xi - a) f(\xi)\, d\xi + \frac{1}{a - b}(x - a)\int_x^b (\xi - b) f(\xi)\, d\xi.$$

Nichtlineare Randwertaufgaben für GDG 2. Ordnung

Wir betrachten nun Randwertaufgaben für nichtlineare DG mit linearen RB 3. Art.

(8.36) $- y'' = f(x, y, y')$ für $x \in [a, b] =: J$,

(8.37) $R_1 y := \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0$,

$R_2 y := \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$.

Dabei seien $f \in C(J \times \mathbb{R}^2)$ und $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 > 0$.

Das Beispiel 4 (ii) läßt etwas die vielen Möglichkeiten erahnen, die sich in punkto Existenz und Einzigkeit bei allgemeinem f ergeben können. Eine allgemeine Theorie hierzu gibt es bis heute nicht, aber viele Resultate zu einzelnen Typen von RWA sind in der mathematischen Literatur zu finden ($\rightarrow$ Kamke).

Grundsätzlich ist es den Versuch wert, zur DG (8.36) die allgemeine Lösung zu suchen, und aus den RB (8.37) die freien Konstanten zu bestimmen.

Sind die RB inhomogen, so dürfen sie gemäß Lemma 5 homogenisiert werden, dabei kann sich die Nichlinearität in der DG ändern.

Eine interessante Möglichkeit zur Untersuchung nichtlinearer RWA eröffnet die Greensche Funktion zur "zugehörigen" linearen RWA

(8.38) $- y'' = 0, \quad R_1 y = 0, \quad R_2 y = 0.$

Offenbar gilt folgendes Lemma.

Lemma 17. Sei die Aufgabe (8.38) nur trivial lösbar und sei $G \in C(J^2)$ die Greensche Funktion dieser Aufgabe. Dann ist die RWA (8.36), (8.37) äquivalent zur nichtlinearen Integralgleichung

(8.39) $$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi, y(\xi), y'(\xi))\, d\xi.$$

Mit den Mitteln der nichlinearen Funktionalanalysis (z.B. Fixpunktsätzen) ist es manchmal möglich, für diese Integralgleichung Lösbarkeitsaussagen zu erhalten.

Für die sogenannte inhomogene 1. Randwertaufgabe für eine nichtlineare GDG 2. Ordnung

(8.40) $y'' = f(x, y, y')$ für $x \in [a, b] =: J$,

(8.41) $y(a) = \gamma_1, \quad y(b) = \gamma_2, \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$,

zitieren wir zwei Resultate.

Satz 18. (i) Falls $f \in BC(J \times \mathbb{R}^2)$ (:= beschränkt und stetig), besitzt die RWA (8.40), (8.41) mindestens eine Lösung $u \in C^2(J)$.

(ii) (Bernstein, 1912) Für $f \in C(J \times \mathbb{R}^2)$ mit $D_2 f \in C(J \times \mathbb{R}^2)$, $D_3 f \in C(J \times \mathbb{R}^2)$ existiere ein $k > 0$, so daß

(8.42) $D_2 f(x, y, z) \ge k \quad \forall (x, y, z) \in J \times \mathbb{R}^2$.

Weiter mögen für jede kompakte Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^2$ zwei nichtnegative Zahlen $\alpha(M)$, $\beta(M)$ existieren, so daß gilt:

(8.43) $|f(x, y, z)| \le \alpha(M)z^2 + \beta(M) \qquad \forall (x, y, z) \in J \times M.$

Dann besitzt die RWA (8.40), (8.41) genau eine Lösung $u \in C^2(J)$.

Zusatz: Wird anstelle von (8.42), (8.43) nur

$$D_2 f(x, y, z) > 0 \qquad \forall (x, y, z) \in J \times \mathbb{R}^2$$

gefordert, so besitzt die RWA (8.40), (8.41) höchstens eine Lösung $u \in C^2(J)$.

§ 9 Anfangsgründe der klassischen Variationsrechnung

Im Kurs Analysis I und II wurden für reellwertige Funktionen einer oder mehrerer Variablen lokale Extrema gesucht. Dabei wurden die Mittel der Differentialrechnung eingesetzt, soweit es sich um differenzierbare Funktionen handelte.
Diese Ideen sollen in der Variationsrechnung auf allgemeinere Situationen ausgedehnt werden.
Allgemein können wir die **Grundaufgabe der Variationsrechnung** so formulieren:
Seien $M \neq \emptyset$ eine beliebige Menge und $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion.
Gesucht wird eine Element $u_0 \in M$, das der Abbildung f ein Maximum oder Minimum erteilt, d.h., daß gilt

$$f(u_0) = \sup_{u \in M} \{f(u)\} \qquad \text{bzw.} \qquad f(u_0) = \inf_{u \in M} \{f(u)\}.$$

Falls solche u_0 existieren, so wird naturgemäß gefragt ob sie einzig sind, ob sie z.B. 'exakt' oder näherungsweise berechnet werden können.
Um zu greifbaren Ergebnissen zu gelangen, werden dieser allgemeinen Situation Einschränkungen auferlegt. So wird etwa vorausgesetzt, daß M ein metrischer Raum und daß f stetig sei.
Ein recht allgemeines, wenn auch nicht konstruktives Resultat ist der folgende

Satz 1 (**Weierstraß**) Seien (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$ eine kompakte Menge. Dann besitzt jede stetige Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ auf M sowohl Maximum als auch Minimum.

Bevor wir zur mathematischen Formulierung unserer klassischen Variationsaufgabe kommen, sei ein einfaches Beispiel zur Illustration angegeben.
Gesucht sei die kürzeste Verbindung zwischen zwei verschiedenen Punkten in der Ebene. Oder genauer formuliert:
Welche ebene Kurve, die Graph einer stetig differenzierbaren Funktion ist und zwei gegebene Punkte (a, A) und (b, B) verbindet, besitzt die kleinste Kurvenlänge?
Die Kurvenlänge einer jeden solchen Kurve, die also Graph einer stetig differenzierbaren Funktion $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist, berechnet sich zu

(9.1) $$F(u) := \int_a^b \sqrt{1 + u'^2(x)}\, dx.$$

Wir kommen hierauf im Beispiel 13 weiter unten zurück. Derartige Abbildungen F, die Funktionen - hier $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ - reelle Zahlen zuordnen, werden oft Funktionale genannt. Allgemeinere Funktionale als in (9.1) (statt skalarer mit Vektorfunktion, die von mehreren Variablen abhängt) werden in der klassischen Variationsrechnung, die etwa 300 Jahre alt ist, untersucht.
Wir verwenden folgende Bezeichnungen:
$C^k([a, b])$:= Menge der auf dem Intervall $J := [a, b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ k-mal stetig differenzierbaren Funktionen. Für $k = 0$ schreiben wir natürlich auch $C([a, b])$.

Wie bekannt, bildet $C^k([a, b])$ eine Vektorraum, versehen mit der Norm

$$\|u\|_k := \sum_{i=0}^{k} \sup_{x\in[a, b]} \{ |u^{(i)}(x)| \}$$

wird $C^k([a, b])$ zu einem vollständigen normierten Raum (einem Banach-Raum).
Seien $E := [a, b]\times\Omega$ mit $-\infty < a < b < \infty$ und $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ offen und $f\in C(E)$.
Weiter seien $M := \{ u\in C^1([a, b]) : (u(x), u'(x)) \in \Omega \ \forall x\in[a, b] \}$ und $D\subset M$, $D \neq \emptyset$.
Wir definieren folgendes Funktional $F : D \to \mathbb{R}$ vermöge

$$F(u) := \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\, dx. \tag{9.2}$$

Die Menge D - der Definitionsbereich von F - wird oft "Menge der zulässigen Funktionen des Funktionals F" genannt.

Definition 2. (i) Das Funktional (9.2) besitzt in $u_0\in D$ ein **globales Maximum** (bzw. Minimum), falls gilt

$$F(u) \le F(u_0) \quad \forall\, u\in D \qquad (\text{bzw.} \quad F(u) \ge F(u_0) \quad \forall\, u\in D). \tag{9.3}$$

(ii) Das Funktional (9.2) besitzt in $u_0\in D$ ein **lokales Maximum** (bzw. Minimum), falls ein $r > 0$ existiert, so daß gilt

$$F(u) \le F(u_0) \quad \forall\, u\in D \quad \text{mit} \quad \|u - u_0\|_1 < r \tag{9.4}$$
$$(\text{bzw.} \quad F(u) \ge F(u_0) \quad \forall\, u\in D \quad \text{mit} \quad \|u - u_0\|_1 < r).$$

Bemerkungen 3 (i) Offenbar sind die Aussagen in (9.3) äquivalent zu

$$F(u_0) = \sup_{u\in D}\{F(u)\} \quad \text{bzw.} \quad F(u_0) = \inf_{u\in D}\{F(u)\}.$$

(ii) Maximum oder Minimum fassen wir unter den Begriff Extremum zusammen.
Ein globales Extremum ist offenbar ohne Bezug auf eine metrische Struktur definiert. Lokale Extrema jedoch beziehen sich immer auf eine Metrik. Hier wird die durch die Norm $\|\cdot\|$ erzeugte Metrik benutzt. Es wäre auch möglich, die Menge $C^1([a, b])$ mit der "normalen" Maximum-Norm $\|\cdot\|$ zu normieren und mit dieser Norm ein lokales Extremum zu definieren. In der Literatur wird ein solches lokales Extremum oft als "starkes lokales Extremum" bezeichnet.
In der Definition 2 (ii) haben wir sogenannte "schwache lokale Extrema" definiert.
Ü: Jedes starke lokale Extremum ist auch schwaches.
(iii) Statt "global" und "lokal" sind auch die Begriffe "absolut" bzw. "relativ" in Gebrauch.
(iv) Es ist auch möglich, Funktionale vom Typ (9.2) auf anderen Funktionenklassen zu definieren.

Literaturhinweise: Smirnow, Lehrgang der höheren Mathematik, Band IV/1; Achieser, Variationsrechnung; Trautman; Giaquinta / Hildebrandt, ...

Selbst "einfache" Funktionale des Typs (9.2) müssen keineswegs Extrema besitzen.

Beispiel 4. (i) Das Funktional $F(u) := \int_0^1 u^2(x)\, dx$ besitzt auf dem Definitionsbereich $D := \{ u\in C([0, 1]) : u(0) = 0, u(1) = 1 \}$ kein Minimum.
Denn offenbar gilt

$$F(u) \ge 0 \qquad \forall u\in D \qquad \text{und somit} \qquad \inf_{u\in D}\{F(u)\} \ge 0.$$

Wählen wir in D die Funktionenfolge $u_n(t) := t^n$ für $t\in[0, 1]$, so folgt sofort

$F(u_n) = \frac{1}{2n+1} \to 0$ für $n \to \infty$.

Also gilt $\inf_{u \in D}\{F(u)\} = 0$, aber es existiert kein $u_0 \in D$ mit $F(u_0) = 0$.

(ii) Das Funktional $F(u) := \int_{-1}^{1} u^2(x)(1 - u'(x))^2\, dx$ besitzt auf dem Definitionsbereich $D := \{ u \in C^1([0, 1]) : u(-1) = 0, u(1) = 1 \}$ kein Minimum.

Für die stetige, aber in $x = 0$ nicht diffenrenzierbare Funktion

$$u_0(x) := \begin{cases} 0, & \text{für } -1 \le x \le 0 \\ x, & \text{für } 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

gilt offenbar $F(u_0) = 0$. Dieses u_0 ist einzige stetige Funktion, die F den Wert 0 erteilt.

Bevor wir notwendige Bedingungen für die Existenz lokaler Extrema von Funktionalen herleiten, wollen wir grundlegende Lemmata der Variationsrechnung beweisen.

Lemma 5. Sei $f \in C([a, b])$ und es gelte

$$\int_a^b f(x)\, \varphi(x)\, dx \ge 0 \quad \forall\, \varphi \in C^1([a, b]) \text{ mit } \varphi(x) \ge 0 \ \forall\, x \in [a, b] \text{ und } \varphi(a) = \varphi(b) = 0.$$

Dann gilt: $f(x) \ge 0 \ \forall\, x \in [a, b]$.

Beweis: Nehmen an, für ein $x_0 \in]a, b[$ wäre $f(x_0) < 0$. Dann gibt es ein ein $r > 0$, so daß

$$f(x) \le \frac{1}{2} f(x_0) \qquad \forall\, x \in [x_0 - r, x_0 + r] \subset]a, b[.$$

Wählen als zulässiges $\varphi \in C^1([a, b])$

$$\varphi(x) := \begin{cases} 0, & \text{für } |x - x_0| \ge r \\ (x - x_0 - r)^2(x - x_0 + r)^2, & \text{für } |x - x_0| \le r \end{cases}.$$

Nach Voraussetzung erhalten wir den Widerspruch:

$$0 \le \int_a^b f(x)\, \varphi(x)\, dx = \int_{x_0+r}^{x_0-r} f(x)\, \varphi(x)\, dx \le \frac{1}{2} f(x_0) \int_{x_0+r}^{x_0-r} \varphi(x)\, dx < 0$$

Folgerung 6. (**Fundamentallemma der Variationsrechnung** - Lagrange)

Sei $f \in C([a, b])$ und es gelte

$$\int_a^b f(x)\, \varphi(x)\, dx = 0 \qquad \forall\, \varphi \in C^1([a, b]) \text{ mit } \varphi(a) = \varphi(b) = 0.$$

Dann gilt: $f(x) = 0 \qquad \forall\, x \in [a, b]$.

Lemma 7. (Du Bois-Reymond) Sei $f \in C([a, b])$ und es gelte

$$\int_a^b f(x)\, \varphi'(x)\, dx = 0 \qquad \forall\, \varphi \in C^1([a, b]) \text{ mit } \varphi(a) = \varphi(b) = 0.$$

Dann gilt: $f(x) = \text{const.} \qquad \forall\, x \in [a, b]$.

Beweis: Wir bezeichnen mit

$$c := \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\, dx$$

den Mittelwert von f auf $[a, b]$ und erhalten

(9.5) $$\int_a^b (f(x) - c)\, dx = 0.$$

Die Funktion $\varphi(x) := \int_a^x (f(t) - c)\, dt$ erfüllt die Voraussetzungen des Lemmas und es gilt somit

(9.6) $$\int_a^b f(x)\,(f(x) - c)\, dx = 0.$$

Wegen (9.5) und (9.6) folgt leicht

$$\int_a^b (f(x) - c)^2\, dx = \int_a^b f(x)\,(f(x) - c)\, dx - \int_a^b c\,(f(x) - c)\, dx = 0.$$

Das ist aber nur für $f(x) = c$ auf $[a, b]$ möglich.

Lemma 8. Seien $f, g \in C([a, b])$ und es gelte

$$\int_a^b (f(x)\,\varphi(x) + g(x)\,\varphi'(x)\,)\, dx = 0 \qquad \forall\, \varphi \in C^1([a, b]) \text{ mit } \varphi(a) = \varphi(b) = 0.$$

Dann gilt: $g'(x) = f(x) \qquad \forall\, x \in [a, b].$

Beweis: Wir setzen $h(x) := \int_a^x f(t)\, dt$ und erhalten durch partielle Integration

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\, dx = -\int_a^b h(x)\,\varphi'(x)\, dx,$$

woraus nach Voraussetzung folgt

$$\int_a^b (g(x) - h(x)\,)\,\varphi'(x)\, dx = 0.$$

Dann sichert Lemma 7 $g(x) = h(x) + \text{const.}$, also $g'(x) = f(x)$ auf $[a, b]$.

Bemerkungen 9. (i) Die Aussagen der vorstehenden Lemmata bleiben gültig, wenn die zulässigen Funktionen (auch Testfunktionen genannt) aus $C_c^\infty([a, b])$ gewählt werden ($C_c^\infty([a, b])$:= unendlich oft differenzierbare Funktionen mit einem in $[a, b]$ kompakten Träger).
(ii) Eine zur Folgerung 6 analoge Aussage kann für Lebesgue-integrierbare Funktionen f getroffen werden. Dann versteht sich das Integral als Lebesgue-Integral und die Behauptung gilt im Sinne von "fast überall".

Wir wollen jetzt ein **notwendiges Kriterium** für die Existenz lokaler Extrema für Funktionale vom Typ (9.2) herleiten. Für die Behandlung **hinreichender Kriterien** müssen wir auf die Literatur verweisen.
Wir erinnern an die Bezeichnungen $E := [a, b]\times\Omega$ mit $-\infty < a < b < \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, sowie $M := \{ u \in C^1([a, b]) : (u(x), u'(x)) \in \Omega \ \forall x \in [a, b] \}$.
Weiter bezeichnen wir $C_0^1([a, b]) := \{ u \in C^1([a, b]) : u(a) = 0, u(b) = 0 \}$ und

(9.7) $$N := \{ u \in C^1([a, b]) : u(a) = \gamma_1, u(b) = \gamma_2 \},$$

wobei $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ beliebig gegeben und fixiert seien.
Als Definitionsbereich für das Funktional F in (9.2) wählen wir:

$$D := M \cap N$$

Es sei vorrausgesetzt, daß die Menge D innere Punkte von M (bezüglich der Metrik von $C^1([a, b])$) enthält.

Satz 10. Sei $f \in C(E)$ mit $D_2f, D_3f \in C(E)$. Die Funktion $u_0 \in D$ sei innerer Punkt von M und erteile dem Funktional

(9.2) $$F(u) := \int_a^b f(x, u(x), u'(x)\, dx$$

ein lokales Extremum gemäß Definition 2.
Dann gilt:

(9.8) $$\int_a^b \{ D_2f(x, u_0(x), u_0'(x)) \varphi(x) + D_3f(x, u_0(x), u_0'(x)) \varphi'(x) \}\, dx = 0 \qquad \forall \varphi \in C_0^1([a, b]).$$

Beweis: Sei $\varphi \in C_0^1([a, b])$ beliebig, fixiert. Da $u_0 \in D$ innerer Punkt von M, so existiert ein $r > 0$ so, daß $(u_0 + t\varphi) \in D \subset M$ für $|t| < r$. Nehmen an, u_0 erteile dem Funktional F ein lokales Minimum. Dann gilt o.B.d.A. für $|t| < r$

(9.9) $$F(u_0 + t\varphi) - F(u_0) \geq 0.$$

Nach den Voraussetzungen an f ist die Funktion $\rho(t) := F(u_0 + t\varphi)$ für $|t| < r$ stetig differenzierbar und es gilt $\rho'(0) = 0$ nach dem notwendigen Kriterium für lokale Extrema differenzierbarer skalarer Funktionen. Nach den Regeln für das Differenzieren parameterabhängiger Integrale gilt dann

$$\rho'(t) = \int_a^b \{ D_2f(x, u_0(x) + t\varphi, u_0'(x) + t\varphi') \varphi(x) + D_3f(x, u_0(x) + t\varphi, u_0'(x) + t\varphi') \varphi'(x) \}\, dx.$$

Also bedeutet $\rho'(0) = 0$ gerade die Behauptung (9.8), wobei wir bemerken, daß die obige Argumentation für jedes $\varphi \in C_0^1([a, b])$ gilt.
Für ein lokales Maximum von F wäre der Schluß völlig analog.

Definition 11. Die im Satz 10 auftretende Größe

$$\delta F(u_0, \varphi) := \int_a^b \{ D_2f(x, u_0(x), u_0'(x)) \varphi(x) + D_3f(x, u_0(x), u_0'(x)) \varphi'(x) \}\, dx$$

heißt "**erste Variation** des Funktionals F an der Stelle u_0 in Richtung φ".
(Im allgemeineren Kontext der nichtlinearen Funktionalanalysis wird auch vom **Gateaux-Differential** gesprochen)

Kurz ausgedrückt besagt somit Satz 10:
Unter entsprechenden Differenzierbarkeitsvoraussetzungen verschwindet die erste Variation des Funktionals an inneren Stellen lokaler Extrema nach allen Richtungen.

Die Anwendung von Lemma 8 auf die Beziehung (9.8) ergibt sofort

Folgerung 12 (**Eulersche Gleichung - erste Fassung**) Unter den Bedingungen von Satz 10 gilt die Eulersche Gleichung

(9.10) $$D_2f(x, u_0(x), u_0'(x)) - \frac{d}{dx}(D_3f(x, u_0(x), u_0'(x))) = 0 \text{ für } x \in [a, b].$$

Beispiel 13. Wir betrachten das Funktional für die Kurvenlänge

(9.1) $$F(u) := \int_a^b \sqrt{1 + u'^2(x)}\, dx.$$

Hierbei wählen wir $f(x, u, z) := \sqrt{1 + z^2}$, $\Omega := \mathbb{R}^2$, dann ist $M := C^1([a, b])$, und $D := \{ u \in C^1([a, b]) : u(a) = \gamma_1, u(a) = \gamma_2 \}$ besteht nur aus inneren Punkten von M.
Die Funktion $u_0 \in D$ erteile dem Funktional F ein lokales Extremum.
Nach Satz 10 muß an dieser Stelle die erste Variation verschwinden, also

$$\delta F(u_0, \varphi) = \int_a^b \frac{u_0'(x)}{\sqrt{1 + u_0'^2(x)}} \varphi'(x)\, dx = 0 \qquad \forall \varphi \in C_0^1([a, b]).$$

Nach Folgerung 12 lautet die Eulersche Gleichung

(9.11) $$- \frac{d}{dx}\left(\frac{u_0'(x)}{\sqrt{1 + u_0'^2(x)}} \right) = 0 \qquad \text{für } x \in [a, b].$$

Weil $u_0 \in D$, so muß u_0 die Randbedingungen $u(a) = \gamma_1$, $u(b) = \gamma_2$ erfüllen.

Aus (9.11) folgt natürlich $\frac{u_0'(x)}{\sqrt{1 + u_0'^2(x)}} = \text{const.}$

Also ist auch $u_0'(x) = \text{const.}$
Der Graph von u_0 ist eine Gerade, die durch die Randbedingungen eindeutig festgelegt ist. Andere lokale Extrema besitzt das Funktional F demnach nicht.
Genauere Untersuchungen zeigen, daß das Extremum sogar absolutes Minimum ist.

Die Eulersche Gleichung (9.10) hat einen Schönheitsfehler.
Wir wissen zwar, daß der Term

$$\frac{d}{dx}(D_3 f(x, u_0(x), u_0'(x)))$$

stetig ist, dürfen aber nicht nach der Kettenregel "ausdifferenzieren", ohne weitere Voraussetzungen an f und u_0 zu stellen.

Satz 14. (**Eulersche Gleichung - zweite Fassung**)
Sei $f \in C(E)$ mit $D_2 f \in C(E)$, $D_3 f \in C^1(E)$. Die Funktion $u_0 \in D \cap C^2([a, b])$ sei innerer Punkt von M und erteile dem Funktional

(9.2) $$F(u) := \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\, dx$$

ein lokales Extremum gemäß Definition 2.
Dann gilt neben (9.8) und (9.10) die Eulersche Gleichung in entwickelter Form:

(9.12) $$D_2 f(x, u_0(x), u_0'(x)) - D_1(D_3 f(x, u_0(x), u_0'(x))) - D_{23} f(x, u_0(x), u_0'(x)))\, u_0'(x) - D_{33} f(x, u_0(x), u_0'(x)))\, u_0''(x) = 0 \quad \text{für } x \in [a, b].$$

Die Differentialgleichung (9.12) ist 2. Ordnung und nichtlinear, da die Koeffizientenfunktion $D_{33} f(x, u_0(x), u_0'(x)))$ vor u_0'' nicht von u_0'' abhängt, so wird auch von einer quasi-linearen DG 2. Ordnung gesprochen.

Definition 15. Die Funktionen $u_0 \in C^2([a, b])$, die die Eulersche Gleichung (9.12) lösen, nennen wir **Extremalen** des Funktionals F.
Die Extremalen, die zu D gehören, also die Randbedingungen erfüllen, wollen wir **stationäre Punkte** des Funktionals F nennen.

In stationären Punkten können lokale Extrema vorliegen. Um stationäre Punkte zu bestimmen, müssen wir die inhomogene erste Randwertaufgabe für die nichtlineare Eulersche Gleichung (9.12) lösen. Hierzu gibt es keinen allgemeinen Lösungsalgorithmus. Falls

$$D_{33} f(x, u_0(x), u_0'(x))) \neq 0 \text{ auf } [a, b],$$

so kann die Gleichung nach der zweiten Ableitung umgestellt werden und ggf. lassen sich Satz 18 aus § 8 bzw. andere Resultate ($\rightarrow$ Kamke) anwenden.
Glücklicherweise vereinfachen sich bei wichtigen Anwendungsfällen die Verhältnisse etwas, wie wir bald sehen werden.

Bemerkung 16. Der Satz 14 setzt voraus, daß $u_0 \in C^2([a, b])$. Falls

$$D_{33}f(x, u_0(x), u_0'(x))) \neq 0 \text{ auf } [a, b],$$

so läßt sich $u_0 \in C^2([a, b])$ beweisen.
Insbesondere ist das der Fall, wenn

$$D_{33}f(x, u(x), u'(x))) \neq 0 \text{ auf } [a, b] \qquad \forall\, u \in D.$$

Im Beispiel 13 ist das gerade der Fall.

Wir wenden uns nun den sogenannten "integrierbaren Fällen" der Eulerschen Gleichung zu. Genauer müßte es heißen, den Fällen, in denen einmal "elementar" integriert werden kann, denn die verbleibenden DG 1. Ordnung können sich auch als schwer lösbar erweisen. Es seien die Voraussetzungen von Satz 10 gegeben.

1) Der Fall $f(x, u, z) := f(x, z)$. Aus der Eulerschen Gleichung (9.10) folgt sofort:

(9.13) $$\frac{\partial}{\partial z}f(x, u'(x)) = \text{const}.$$

Falls es gelingt, diese implizite DG 1.Ordnung nach u' aufzulösen, erscheint beim nochmaligen Integrieren eine zweite Konstante. Gelingt es den Randbedingungen diese Konstanten zu bestimmen, so erhalten wir die stationären Punktes des Funktionals F.
2) Der Fall $f(x, u, z) := f(u, z)$. Hier setzen wir zusätzlich $u \in C^2([a, b])$ voraus.
Aus Multiplikation von (9.10) mit u' folgt sofort:

$$D_2f(u(x), u'(x))\, u'(x) - u'(x)\, \frac{d}{dx}(D_3f(u(x), u'(x))) =$$
$$= D_2f(u(x), u'(x))\, u'(x) + D_3f(u(x), u'(x))\, u''(x) - D_3f(u(x), u'(x))\, u''(x) +$$
$$- u'(x)\, \frac{d}{dx}(D_3f(u(x), u'(x))) = 0 \text{ auf } [a, b].$$

Diese letzte Zeile ist

$$\frac{d}{dx}(\, f(u, u') - u'\, D_3f(u, u')\,) = 0.$$

Somit erhalten wir ein sogenanntes **erstes Integral**

(9.14) $$f(u, u') - u'\, \frac{\partial}{\partial z}f(u, u') = \text{const} \qquad \text{auf } [a, b].$$

Bei Anwendungen in der Mechanik drücken solche ersten Integrale oft Erhaltungssätze (z.B. Energie) aus.
Mit der impliziten DG (9.14) können wir weiter verfahren wie im Fall 1).
Beispiel 13 ist offenbar den Fällen 1) und 2) zuzuordnen.

Neben diesen für die Anwendung wichtigen Fällen gibt es noch einfache Fälle, die oft zu Nichtexistenz von stationären Punkten führen oder gar keine Variationsprobleme sind.

3) Der Fall $f(x, u, z) := f(x, u)$. Aus (9.10) folgt sofort

$$\frac{\partial}{\partial u}f(x, u) = 0.$$

Das ist eine algebraische Gleichung. Besitzt sie eine (oder mehrere) Lösung(en) $u = u(x)$, so erfüllen sie i.a. nicht die Randbedingungen. Falls doch, so sind es stationäre Punkte, die aber nicht in einem "Extremalenfeld" eingebettet sind.

4) Der Fall $f(x, u, z) := P(x, u) + Q(x, u)\, z$. In diesem Fall ergibt (9.10)

(9.15) $$\frac{\partial P}{\partial u} - \frac{\partial Q}{\partial u} = 0.$$

Wieder haben wir es mit einer algebraischen Gleichung zu tun.
Falls jedoch die Beziehung (9.15) in einem einfach zusammenhängenden Gebiet für (x, u) identisch erfüllt ist, so stellt das Funktional

$$F(u) = \int_a^b (P(x, u) + Q(x, u)\, u')\, dx = \int_a^b (P(x, u)\, dx + Q(x, u)\, du)$$

ein Kurvenintegral 2. Art dar, daß für alle in dem erwähnten Gebiet verlaufenden Kurven nur von den Randpunkten abhängt. Es liegt also keine echte Variationsaufgabe vor.

Beispiele 17. (i) Betrachten das Funktional

(9.16) $$F(u) = \int_1^2 u'(x)\, (1 + x^2\, u'(x))\, dx.$$

Dann ist $f(x, u, z) := z(1 + x^2 z)$, $[a, b] := [1, 2]$. Wählen
$\gamma_1 := 3$, $\gamma_2 := 5$, $\Omega := \mathbb{R}^2$, $M := C^1([1, 2])$, $D := \{ u \in C^1([1, 2]) : u(1) = 3, u(2) = 5 \}$.
D enthält nur innere Punkte von M.
Es trifft der Fall 1) zu, somit folgt aus (9.13)

$$\frac{\partial}{\partial z} f(x, u'(x)) = 1 + 2x^2\, u'(x) = \text{const}.$$

Hieraus ergibt sich

(9.17) $$u(x) = \frac{c_1}{x} + c_2 \qquad \text{für } x \in [1, 2] \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Die Extremalen in (9.17) sind eine zweiparametrige Schar von Hyperbeln.
Aus den Randbedingungen lassen sich die Konstanten c_1, c_2 eindeutig bestimmen und somit ist einziger stationärer Punkt des Funktionals (9.16)

$$u_0(x) = -\frac{4}{x} + 7 \qquad \text{für } x \in [1, 2].$$

Eine weitere Untersuchung - die wir hier nicht durchführen können - liefert, daß diese Funktion u_0 dem Funktional F ein lokales Minimum erteilt.
Für hinreichende Bedingungen verweisen wir auf die Literatur.
(ii) Betrachten das Funktional

(9.18) $$F(u) = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + u'^2(x)}}{u(x)}\, dx.$$

Dann ist $f(x, u, z) := \frac{\sqrt{1 + z^2}}{u}$. Wählen $\gamma_1, \gamma_2 > 0$, $\Omega := \{ (u, z) \in \mathbb{R}^2 : u > 0 \}$,
$M := \{ u \in C^1([a, b]) : u(x) > 0 \text{ auf } [a, b] \}$, $N := \{ u \in C^1([a, b]) : u(a) = \gamma_1, u(b) = \gamma_2 \}$.
Dann enthält $D := M \cap N$ nur innere Punkte von M (Ü).
Es trifft der Fall 2) zu. Ehe wir das erste Integral (9.14) aufschreiben, müssen wir uns davon überzeugen, daß die Extremalen aus $C^2([a, b])$ sind. Offenbar gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(u, z) = \frac{1}{u\, (\sqrt{1 + z^2})^3} > 0 \text{ in } \Omega$$

und die Bemerkung 16. sichert das Verlangte.
Wir schreiben also das erste Integral (9.14) für unsere Situation

(9.19) $$\frac{\sqrt{1 + u'^2(x)}}{u(x)} - u'(x)\, \frac{u'(x)}{u(x)\, \sqrt{1 + u'^2(x)}} = \text{const} \quad \text{auf } [a, b].$$

Hieraus folgt leicht

$$u(x)\sqrt{1 + u'^2(x)} = c_1 \qquad \text{oder} \quad u'^2(x) = \frac{c_1^2 - u^2(x)}{u^2(x)}.$$

Lösen dieser DG ergibt (Ü)

(9.20) $$u(x) = \sqrt{c_1^2 - (x + c_2)^2} \qquad \text{für } x \in [a, b].$$

Die Extremalen sind somit Halbkreislinien in der oberen Halbebene mit Zentrum auf der x-Achse. Die Randbedingungen führen zur eindeutigen Bestimmung der Konstanten c_1, c_2. Das Funktional besitzt genau einen stationären Punkt.
Wir bemerken noch, daß diese Variationsaufgabe eine Beziehung zur geometrischen Optik hat ($\rightarrow$ Smirnow, Trautman, ...)

(iii) (**Rotationsfläche minimalen Inhalts**) Eine glatte Kurve $u = u(x)$ verlaufe oberhalb der x-Achse und verbinde zwei gegebene Punkte der oberen Halbebene. Beim Rotieren dieser Kurve um die x-Achse entsteht eine Rotationsfläche, deren Flächeninhalt sich nach der Guldinschen Regel zu

(9. 21) $$F(u) := 2\pi \int_a^b u(x)\sqrt{1 + u'^2(x)}\, dx$$

berechnet. Die Aufgabe besteht also darin, für F Minima zu bestimmen.
Wir wählen $f(x, u, z) := 2\pi u \sqrt{1 + z^2}$, $\gamma_1, \gamma_2 > 0$, Ω, M, N, D wie im Beispiel (ii).
Wiederum trifft der Fall 2) zu, und wir erhalten als erstes Integral

(9.22) $$2\pi u(x)\sqrt{1 + u'^2(x)} - u'(x)\, 2\pi u(x) \frac{u'(x)}{\sqrt{1 + u'^2(x)}} = \text{const.}$$

Hieraus folgt die DG

$$u'^2(x) = \frac{u^2(x) - c_1^2}{c_1^2}$$

und Lösen dieser ergibt die Extremalen

(9.23) $$u(x) = c_1 \cosh\left(\frac{x}{c_1} + c_2\right) \qquad \text{für } x \in [a, b].$$

Die Frage nach stationären Punkten ist hier komplizierter. In Abhängigkeit von den Werten für a, b, γ_1, γ_2 können genau ein, zwei verschiedene oder auch gar kein stationärer Punkt vorliegen. Falls zwei vorliegen, so ist es möglich, daß nur einer ein lokales Minimum erteilt. Wir verweisen auf die Literatur (z.B. Schilow, Mathematische Analysis, Spezialkurs, [russ]).