Algorithmische Bioinformatik

Suffixarrays

Ulf Leser

Wissensmanagement in der Bioinformatik

Ziele heute

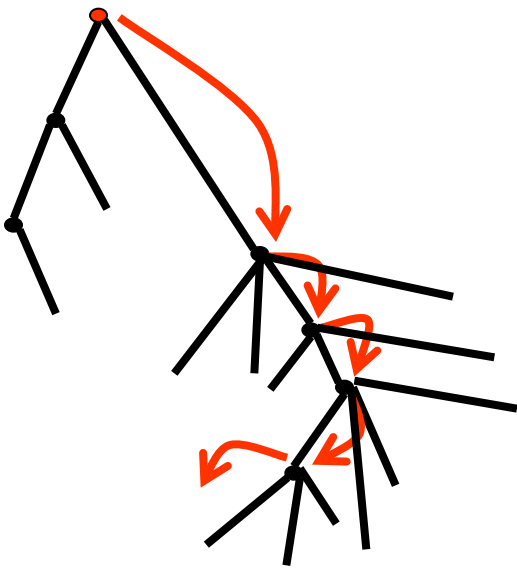
- Einblick in die Suffix-* Familie von Datenstrukturen
- Trade-Offs Platz, Konstruktionszeit, Suchzeit, Ausdrucksstärke

Inhalt dieser Vorlesung

- Suffixarrays
  - Idee und Suche
  - Konstruktionsalgorithmus nach Manber / Myers
- Enhanced Suffix Arrays (Sketch)

Suche in Suffixbäumen

- Matche Pattern bis Erfolg oder Mismatch
  - An jedem Knoten Entscheidung basierend auf erstem Zeichen des Kantenlabels
- Wie findet man die richtige Kante?
  - Array in der Größe des Alphabets Σ
    - Zelle x mit Pointer auf Kante: $O(1)$
  - Verkettete Liste
    - Pointer auf Kinder sind verkettet: $O(|\Sigma|)$
  - Sortiertes (wachsendes) Array
    - Pointer auf Kinder alphabetisch sortiert: $O(\log(|\Sigma|))$
    - Und mehr Arbeit beim Einfügen



Verbesserungsbedarf

- Nachteile von Suffixbäumen
  - Sehr hoher Platzverbrauch
    - Viele Pointer, Arrays in Knoten etc.
  - Schlechte Lokalität / Ausnutzung Cache
  - Richtig schnell nur, wenn Kantenwahl in konstanter Zeit erfolgt
- DNA: $|\Sigma|=4$, Proteine: 20, Englisch: 23, Deutsch: 28
- Suffixbaum für humanes Genom: ~40GB Hauptspeicher

Suffixarrays

- Definition
  - *Das Suffixarray A für String S ist ein Integerarray der Länge |S|, in dem A[i] die Startposition des i-ten Suffix von S enthält, sortiert nach lexikographischer Ordnung*
- Beispiel

```
12345678901
mississippi
```

mississippi	i	A[1]=11
ississippi	ippi	A[2]=8
ssissippi	issippi	A[3]=5
sissippi	ississippi	A[4]=2
issippi	mississippi	A[5]=1
ssippi	pi	A[6]=10
sippi	ppi	A[7]=9
ippi	sippi	A[8]=7
ppi	sissippi	A[9]=4
pi	ssippi	A[10]=6
i	ssissippi	A[11]=3

Suche mit Suffixarrays

- Finde alle Vorkommen eines Pattern P im Suffixarray A für String S
- Idee?
- Suche alle Vorkommen von P=„ssi“ in „mississippi“
  - Wenn P in S, dann muss P Präfix mindestens eines Suffix sein
  - Suffixe sind in A sortiert
  - ➢ Binäre Suche in A

a[1]=11	**i**
a[2]=8	**ippi**
a[3]=5	**issippi**
a[4]=2	**ississippi**
a[5]=1	**mississippi**
a[6]=10	**pi**
a[7]=9	**ppi**
a[8]=7	**sippi**
a[9]=4	**sissippi**
a[10]=6	**ssippi**
a[11]=3	**ssissippi**

Beispiel

- Suche alle Vorkommen von P=„ssi“

```
a[1]=11      i
a[2]=8       ippi
a[3]=5       issippi
a[4]=2       ississippi
a[5]=1       mississippi
a[6]=10      pi
a[7]=9       ppi
a[8]=7       sippi
a[9]=4       sissippi
a[10]=6      ssippi
a[11]=3      ssissippi
```

Suchalgorithmus

```
l:=1; r:=m; n=|P|; suffixarray A von S;
deffunc f(i):=S[A[i]..A[i]+n-1];
while l<r do
    z := floor((r-l)/2);                // Middle of interval
    if (f(z) > P) then r := z-1;        // Go up
    else if f(z) < P then l := z+1;     // Go down
    else                                // Found one occurrence
        z‘:=z;
        while (f(z‘)=P & z‘>0) do       // Search smaller occ’s
            report a[z‘];
            z‘ := z‘-1;
        end while;
        z‘:=z+1;
        while (f(z‘)=P & z‘<=m) do      // Search larger occ’s
            report a[z‘];
            z‘ := z‘+1;
        end while;
        break;
    end if;
end while;
```

Komplexität

- Wir machen O(log(m)) Sprünge im Array
- Jeder Test kostet im Worst-Case n Zeichenvergleiche
- Zusammen: O(n*log(m)) (für ein Vorkommen)
  - Pessimistisch – jeder Vergleich müsste n Zeichenbergleiche brauchen
- Finden aller Vorkommen
  - O(n*log(m) + k*n)
  - k: Anzahl Vorkommen von P in T

Beschleunigung

- Man muss nicht immer 1..n Zeichen vergleichen
- Fortlaufend zwei Informationen merken
  - p_l: Länge des längsten gemeinsamen Präfix von P und A[l]
  - p_r: Länge des längsten gemeinsamen Präfix von P und A[r]
- Beim Vergleich mit dem mittleren Element des Intervalls
  - Sei $p=\min(p_r, p_l)$
  - String [1..p] ist gemeinsames Präfix aller Suffixe im Intervall
  - Vergleiche Zeichen erst ab Position p+1
- Gewinn
  - Keine veränderte Worst-Case Komplexität
  - Aber sehr gute Ergebnisse (quasi-linear) im Average Case
- Suche geht auch in O(n+log(m)) (Gusfield, p. 152-154)

Inhalt dieser Vorlesung

- Suffixarrays
  - Idee und Suche
  - Konstruktionsalgorithmus nach Manber / Myers
- Enhanced Suffix Arrays (Sketch)

Konstruktion von Suffixarrays

- Erste Möglichkeit: Alle Suffixe aufzählen und sortieren
  - Braucht O(m*log(m)) String-Vergleiche, die jeweils bis zu m Zeichen vergleichen – schlecht
- Zweite Möglichkeit: Aus dem Suffixbaum
  - Konstruktion des Suffixbaums
  - Lexikographisches Depth-First: Kinder in lexikographischer Reihenfolge der Kantenlabel ablaufen
    - „$“ gilt als kleiner als alle anderen Zeichen
  - Blatt i wird als k-tes Blatt erreicht $\Rightarrow$ A[k] = i
  - Komplexität: O(m)
  - Aber: Wir haben unser ursprüngliches Platzproblem nicht gelöst

Konstruktion von Suffixarrays

- Wir besprechen den originalen O(m*log(m)) Algorithmus
  - Manber, U. and Myers, G. (1993). "Suffix arrays: a new method for on-line string searches." *SIAM Journal of Computing* **22**(5)
- Erste direkte, lineare Konstruktionsalgorithmen seit 2003
  - Z.B. Kärkkäinen and Sanders: Simple Linear Work Suffix Array Construction". 30th Int. Col. on Automata, Languages and Programming (ICALP'03)

Grundkenntnisse

- Aufgabe: Sortiere Menge von Strings nach erstem Zeichen
  - Bucketsort macht das in O(m)
    - Durch alle Strings iterieren
    - Funktion mapped erstes Zeichen auf Bucket
    - Die Buckets sind nach dem ersten Zeichen sortiert
    - Vorsicht vor Platzbedarf
      - Naiv: $|\Sigma|$ leere Buckets der Größe m erzeugen
      - Braucht $O(m*|\Sigma|)$ Platz; geht aber besser (siehe Alg&DS)
- Stabiles sortieren
  - Sei S die Eingabemenge, S‘ die sortierte Menge
  - Ein Sortierverfahren ist stabil, wenn $\forall a,b$ mit $a=b$ und $pos(a)<pos(b)$ in S, auch $pos(a)<pos(b)$ in S‘
  - Bucketsort ist stabil

Grundaufbau 1

- Erzeugen Array A mit Startpositionen aller Suffixe der Länge nach absteigend sortiert (1,2,3,4...)
- Sortiere A (stabil) mit Bucketsort nach erstem Zeichen
- Wir müssen noch innerhalb jedes Buckets sortieren
- Sortieren nach den zweiten Zeichen in einem Bucket B
  - Jedes zweite Zeichen ist natürlich das erste Zeichen des nächstkürzeren Suffix
  - Nach denen haben wir schon sortiert (im ersten Vorlauf)
  - Ausnutzen – erste Sortierung nachschlagen statt neu vergleichen

Grundaufbau 2

- Damit haben wir neue (kleinere) Buckets, die nach den ersten zwei Zeichen sortiert sind
- Im nächsten Schritt sortieren wir nach dem 3. und 4. Zeichen unter Benutzung der vorhandenen Sortierung
- Dann nach dem 5-8, 9-16 ...
- Ende, wenn alle Buckets nur noch ein Suffix enthalten
- Komplexität
  - Es kann maximal log(m) Durchläufe geben
  - In jedem Durchlauf läuft man im Worst-Case durch ganz A
  - Damit: O(m*log(m))
    - [MM93] zeigen O(m*log(log(m)) im Average Case

Details

- Array mit allen Suffixen von S der Länge nach absteigend initialisieren: A[i] = i
- Nach dem ersten Zeichen stabil sortieren
- Sortierung nach dem nächsten Zeichen
  - Seien S[i..] = s_i ... s_m\$ und S[j..] = s_j ... s_m\$ in einem Bucket (s_i=s_j)
  - Man müsste nun s_{i+1} mit s_{j+1} vergleichen
  - Das muss dasselbe Ergebnis haben wie der Vergleich von S[i+1..] = s_{i+1} ... s_m\$ mit S[j+1..] = s_{j+1} ... s_m\$
  - Den Vergleich haben wir schon gemacht (S[i+1], S[j+1] sind ja erste Zeichen eines Suffix), müssen aber das Ergebnis in A „finden“
  - Besser: Wir laufen einmal durch A, womit wir an jedem zweiten Zeichen in richtiger Reihenfolge vorbeikommen, und erledigen dabei alle Sortierungen nach dem zweiten Zeichen

Verfahren

```
123456789012
MISSISSIPPI$
```

$	12: $
I	2: ISSISSIPPI$ 5: ISSIPPI$ 8: IPPI$ 11: I$
M	1: MISSISSIPPI$
P	9: PPI$ 10: PI$
S	3: SSISSIPPI$ 4: SISSIPPI$ 6: SSIPPI$ 7: SIPPI$

- Setze in jedem Bucket B einen Pointer P^B auf das erste Element
- Wir gehen einmal durch A (Variable i)
  - Sei A[i] = j. Dann ist S[j] das zweite Zeichen von dem Suffix an Position j-1
  - Sei j-1 in Bucket B mit aktuellem Pointer P^B
    - B müssen wir finden – man braucht eine zusätzliche „Backpointer-“Liste
  - Da wir A sortiert durchlaufen, ist das Suffix ab Position j-1 das nächst größere in B
  - Also schieben wir j an die Stelle P^B in seinem Bucket und inkrementieren P^B

Beispiel

```
12345678
CBCZCABZ...
```

A	6: ABZ
B	2: BCZCABZ 7: BZ
C	1: CBCZCABZ 3: CZCABZ 5: CABZ
...	...

A	6: ABZ
B	2: BCZCABZ 7: BZ
C	5: CABZ 1: CBCZCABZ 3: CZCABZ
...	...

i=1; A[1]=6; S[5..6]=CA
Innerhalb des C-Buckets ist das Suffix S[5...] also das kleinste, denn seine Verlängerung ‚A' haben wir als erstes gefunden, wenn wir alle Suffixe lexikographisch durchlaufen (i)

S[5...] in seinem Bucket nach vorne schieben

Beispiel

12345678
CBCZCABZ…

A	6: ABZ	A	6: ABZ	A	6: ABZ
B	2: BCZCABZ 7: BZ	B	2: BCZCABZ 7: BZ	B	2: BCZCABZ 7: BZ
C	1: CBCZCABZ 3: CZCABZ 5: CABZ	C	5: CABZ 1: CBCZCABZ 3: CZCABZ	C	5: CABZ 1: CBCZCABZ 3: CZCABZ
…	…	…	…	…	…

i=2; A[2]=2;
S[1..6]=CBCZCABZ
Keine Verschiebung,
Pointer wandert

Beispiel 2

```
123456789012
MISSISSIPPI$
```

$	12: $
I	2: ISSISSIPPI$ 5: ISSIPPI$ 8: IPPI$ 11: I$
M	1: MISSISSIPPI$
P	9: PPI$ 10: PI$
S	3: SSISSIPPI$ 4: SISSIPPI$ 6: SSIPPI$ 7: SIPPI$

Beispiel 2

- In jedem Bucket wird nach dem zweiten Zeichen sortiert
- Durch das Array laufen. Sei A[i]=j. Dann schiebe den Index j-1 an den Anfang in seinem Bucket
- Alle Buckets werden in einem Durchlauf nach dem 2ten Zeichen sortiert
- Oftmals entstehen neue Buckets

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	12	2	5	8	11	1	9	10	3	4	6	7
12		11										
2						1						
5									4			
8									4	7		
11							10					
1												
9		11	8									
10							10	9				
3		11	8	2								
4									4	7	3	
6		11	8	2	5							
7									4	7	3	6
	12	11	8	2	5	1	10	9	4	7	3	6
	$	I	I	I	I	M	P	P	S	S	S	S
		$	P	S	S	I	I	P	I	I	S	S
			P	S	S	S	$	I	S	P	I	I

Sortierung nach 3. und 4. Zeichen

- Alle Elemente eines B haben dasselbe 2-buchstabige Präfix
- Nächster Schritt
  - Seien S[i..] = s_i ... s_m\$ und S[j..] = s_j ... s_m\$ wie vorher
  - Man müsste nun s_{i+2} mit s_{j+2} vergleichen
  - Das ist das gleiche wie S[i+2..] = s_{i+2}.. s_m\$ mit S[j+2..] = s_{j+2}.. s_m\$
  - Die S[i+2..] und S[j+2..] haben wir schon sortiert, und zwar nach den ersten beiden Zeichen
- Wir sortieren simultan nach dem 3. und 4. Zeichen
  - Wir gehen wieder durch das Array
  - Sei A[i] = j. Dann ist S[j] das dritte Zeichen von S[j-2 ...]
  - Schiebe j-2 an Start seines Buckets und verschiebe Pointer um eins
- Dann nach 5-8. Zeichen etc.

Beispiel

- Wert j-2 verschieben
- Ob neue Buckets entstehen, kann man zur Laufzeit bemerken
- Aufhören, wenn alle Buckets nur noch ein Suffix enthalten

A	1 12	2 11	3 8	4 2	5 5	6 1	7 10	8 9	9 4	10 7	11 3	12 6
12 11 8 2 5 1 10 9 4 7 3 6			 8	 2 2	 5	 1	10	 9	 7	 7	 6 6	 3
	12	11	8	2	5	1	10	9	7	4	6	3
	$	I $	I P P I $	I S S I S	I S S I P	M I S S I	P I $	P P I $	S I P P I	S I S S I	S S I P P	S S I S S

Andere Konstruktionsalgorithmen

- Puglisi, Smyth, Turpin (2007). "A taxonomy of suffix array construction algorithms." *ACM Computing Surveys* **39**(2).
- In der Praxis schnellste Algorithmen haben keinen linearen WC
  - „in practise, the behaviour of all the algorithms is linear“
- Platzverbrauch weniger als halb so groß als für Suffix-Trees
- Indexierung von ~100MB möglich in ~50-60 sec

Algorithm	Worst Case	Time	Memory
Prefix-Doubling			
MM [Manber and Myers 1993]	$O(n \log n)$	30	$8n$
LS [Larsson and Sadakane 1999]	$O(n \log n)$	3	$8n$
Recursive			
KA [Ko and Aluru 2003]	$O(n)$	2.5	$7-10n$
KS [Kärkkäinen and Sanders 2003]	$O(n)$	4.7	10-13n
KSPP [Kim et al. 2003]	$O(n)$	–	–
HSS [Hon et al. 2003]	$O(n)$	–	–
KJP [Kim et al. 2004]	$O(n \log \log n)$	3.5	13-16n
N [Na 2005]	$O(n)$	–	–
Induced Copying			
IT [Itoh and Tanaka 1999]	$O(n^2 \log n)$	6.5	$5n$
S [Seward 2000]	$O(n^2 \log n)$	3.5	$5n$
BK [Burkhardt and Kärkkäinen 2003]	$O(n \log n)$	3.5	5-6n
MF [Manzini and Ferragina 2004]	$O(n^2 \log n)$	1.7	$5n$
SS [Schürmann and Stoye 2005]	$O(n^2)$	1.8	9-10n
BB [Baron and Bresler 2005]	$O(n\sqrt{\log n})$	2.1	$18n$
M [Maniscalco and Puglisi 2006a]	$O(n^2 \log n)$	1.3	5-6n
MP [Maniscalco and Puglisi 2006b]	$O(n^2 \log n)$	1	5-6n
Hybrid			
IT+KA	$O(n^2 \log n)$	4.8	$5n$
BK+IT+KA	$O(n \log n)$	2.3	5-6n
BK+S	$O(n \log n)$	2.8	5-6n
Suffix Tree			
K [Kurtz 1999]	$O(n \log \sigma)$	6.3	13-15n

Zusammenfassung

- Suffixarrays
  - Relativ wenig Speicher: ~4m Bytes
  - In der Praxis lineare Konstruktion
  - Schnelle Suche (aber nicht linear; auch ist das bin-search nicht wirklich schnell, viel Arithmetik)
- Aber: Keine Informationen zu „Least common ancestors“
  - Längste gemeinsame Präfixe verschiedener Suffixe
  - Das sind innere Knoten im Baum – gibt‘s nicht im Suffixarray
  - Viele Anwendungen von Suffixbäumen nicht übertragbar (z.B. longest common substring)
- Möglichkeit: Enhanced Suffixarrays

Inhalt dieser Vorlesung

- Suffixarrays
  - Idee und Suche
  - Konstruktionsalgorithmus nach Manber / Myers
- Enhanced Suffix Arrays (Sketch)

Enhanced Suffixarrays

- Abouelhoda, Kurtz, Ohlebusch (2004). "Replacing suffix trees with enhanced suffix arrays." *Journal of Discrete Algorithms* **2**(1): 53-86
  - Auch: Enno Ohlebusch: „Bioinformatics Algorithms“, Olhebusch Verlag, 2015
- Suche in $O(n*|\Sigma|)\sim O(n)$
- Platzverbrauch: 8m
- Genauso mächtig wie Suffixbäume
- Nicht unkompliziert – wir kratzen nur die Oberfläche

Begriffe

- Definition
  Gegeben ein Suffixarray S. Ein Intervall [i,j] heißt lcp-Intervall mit lcp-Wert α wenn gilt:
  - *Alle Suffixe, die zwischen den Indexpositionen i bis j in A liegen, haben ein gemeinsames Präfix der Länge α*
  - *i und j sind die maximalen Werte, für die das gilt*
    - *Also: $A[i][1..\alpha] \neq A[i+1][1..\alpha]$ und $A[j][1..\alpha] \neq A[j+1][1..\alpha]$*
  - *α lässt sich nicht vergrößern, ohne die Bedingung zu verletzen*
    - *Also: $\exists k,\ i+1<k<j$: $A[k][1..\alpha+1] \neq A[k-1][1..\alpha+1]$*
- Bemerkungen
  - Kodieren die längsten gemeinsamen Präfixe zweier oder mehrerer Suffixe – also die inneren Knoten im Suffixbaum
  - Wir schreiben das als α-[i,j]

Beispiel

$A[0]$	$=$	08	$\widehat{=}$	IPPI$
$A[1]$	$=$	05	$\widehat{=}$	ISSIPPI$
$A[2]$	$=$	02	$\widehat{=}$	ISSISSIPPI$
$A[3]$	$=$	11	$\widehat{=}$	I$
$A[4]$	$=$	01	$\widehat{=}$	MISSISSIPPI$
$A[5]$	$=$	10	$\widehat{=}$	PI$
$A[6]$	$=$	09	$\widehat{=}$	PPI$
$A[7]$	$=$	07	$\widehat{=}$	SIPPI$
$A[8]$	$=$	04	$\widehat{=}$	SISSIPPI$
$A[9]$	$=$	06	$\widehat{=}$	SSIPPI$
$A[10]$	$=$	03	$\widehat{=}$	SSISSIPPI$
$A[11]$	$=$	12	$\widehat{=}$	$

4-[1 : 2]

1-[0 : 3]

1-[5 : 6]

2-[7 : 8]

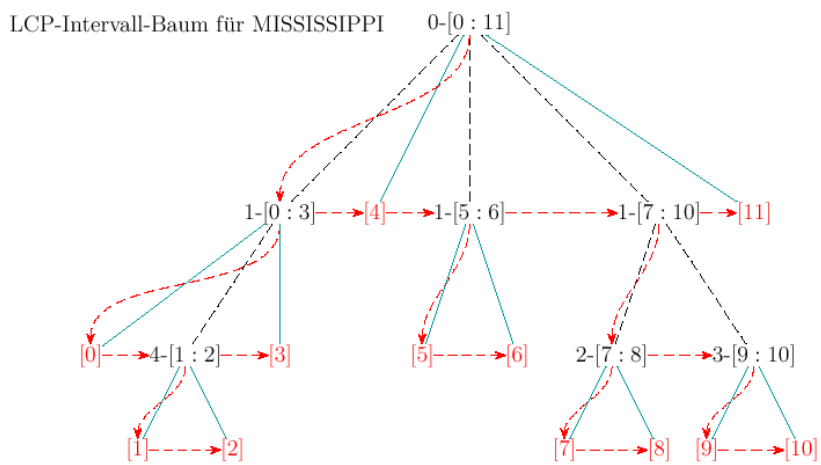
1-[7 : 10]

3-[9 : 10]

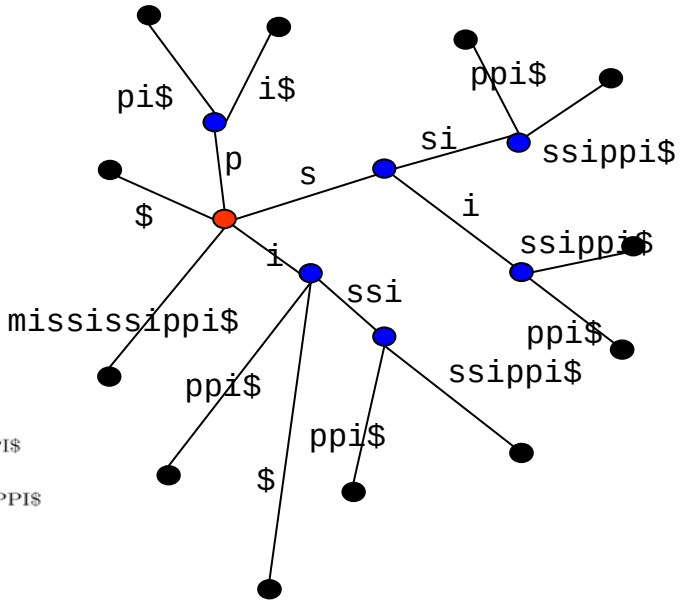
Quelle: [AKO04]

lcp-Baum

- Offensichtlich enthalten sich lcp-Intervalle gegenseitig
  - Innere Intervalle haben größere α-Werte
- Gemeinsam bilden alle lcp-Intervalle einen Baum
  - Entspricht dem Suffixbaum ohne Blätter



$A[0] = 08 \mathrel{\widehat{=}}$ IPPI$
$A[1] = 05 \mathrel{\widehat{=}}$ ISSIPPI$
$A[2] = 02 \mathrel{\widehat{=}}$ ISSISSIPPI$
$A[3] = 11 \mathrel{\widehat{=}}$ I$
$A[4] = 01 \mathrel{\widehat{=}}$ MISSISSIPPI$
$A[5] = 10 \mathrel{\widehat{=}}$ PI$
$A[6] = 09 \mathrel{\widehat{=}}$ PPI$
$A[7] = 07 \mathrel{\widehat{=}}$ SIPPI$
$A[8] = 04 \mathrel{\widehat{=}}$ SISSIPPI$
$A[9] = 06 \mathrel{\widehat{=}}$ SSIPPI$
$A[10] = 03 \mathrel{\widehat{=}}$ SSISSIPPI$
$A[11] = 12 \mathrel{\widehat{=}}$ $



Noch ein Array

- Den lcp-Baum muss man nicht explizit bauen
  - Zu viele Pointer, zu viel Platz
- ESA verwenden stattdessen ein Array: child[1…m]
  - Sei α-[i,j] das längste lcp-Intervall, das an Position j endet
  - In child[j].down merken wir uns die Position des ersten Kind-Intervalls
  - … und von jedem Kind-Interval in child[…].next die Position seines lexikographisch nächsten Geschwisters
- Folgerung: Über child[…].down und child[…].next können wir alle Kindintervalle eines lcp-Intervals traversieren
  - Beachte: Da die ersten Suffixe eines Kindintervalls nur einen Präfix der Länge α mit ihrem Vorgänger gemeinsam haben, beginnen die Suffixe (nach α) aller Kindintervalle mit einem anderen Zeichen

Child-Array

- Klar ist: Es gibt wenig als m lcp Intervalle
  - Jedes entspricht einem inneren Knoten im Suffixbaum
  - Jeder Baum mit Grad>=2 hat höchstens so viele innere Knoten wie Blätter
- Alle child-Infos passen also in ein |m| Array nur wie?
  - Man muss child.down und child.next in konstanter Zeit finden
  - An einer Position können mehrere Kindintervalle beginnen, aber wir wollen nicht mehrere next-Werte speichern
  - Das Child-Array muss in linearer Zeit gebaut werden
  - ...
- Details: Siehe [AKO04]

Pattern-Matching mit ESA (|P|=m)

$c := 0$
$queryFound := True$
$(i, j) := getInterval(0, n, P[c])$
while $(i, j) \neq \perp$ *and* $c < m$ *and* $queryFound = True$
  if $i \neq j$ **then**
    $\ell := getlcp(i, j)$
    $min := \min\{\ell, m\}$
    $queryFound := S[\text{suftab}[i] + c..\text{suftab}[i] + min - 1] = P[c..min - 1]$
    $c := min$
    $(i, j) := getInterval(i, j, P[c])$
  else $queryFound := S[\text{suftab}[i] + c..\text{suftab}[i] + m - 1] = P[c..m - 1]$
if $queryFound$ **then**
  $Report(i, j)$ /* the P-interval */
else print "pattern P not found"

Springt Kinder entlang

O(|P|) (nicht |S|)

Vergleicht nur „neue“ Zeichen

„Implizite Antwort“: Alle Matches liegen A zw i und j

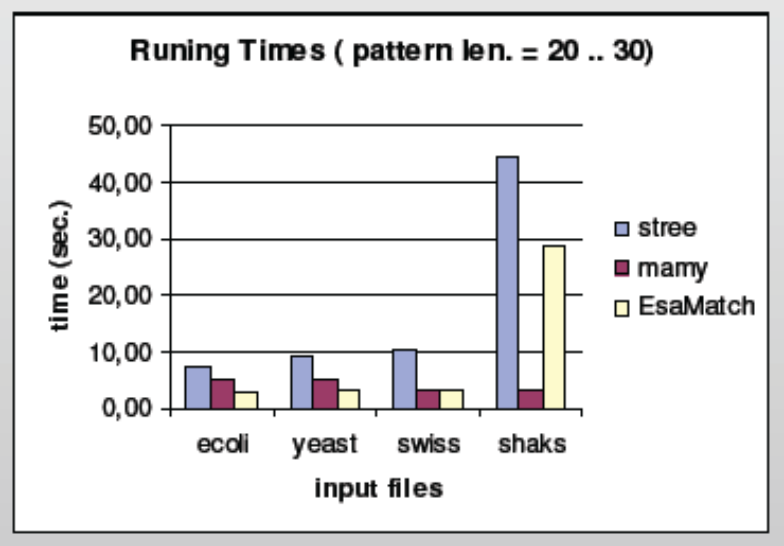
- getInterval(i,j,c): Finde das Kindintervall von α-[i,j], dass an Position α+1 mit Zeichen c fortsetzt
- getlcp(i,j): Finde den α-Wert für das Interval α-[i,j]

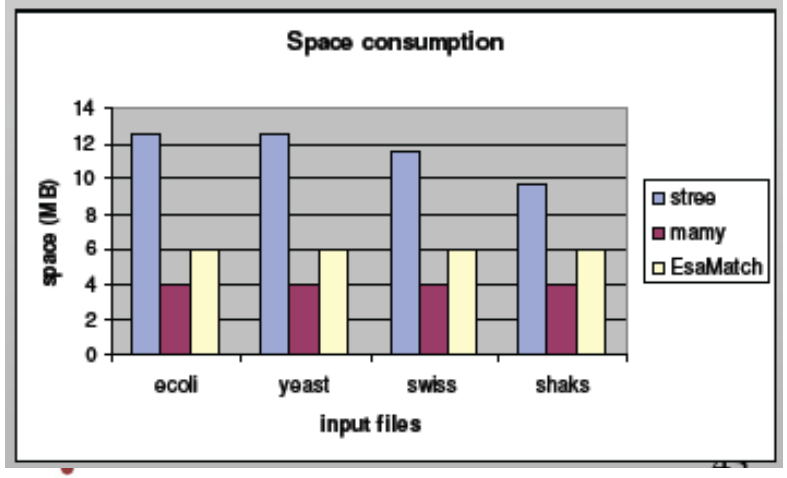
Komplexität

$(i, j) := getInterval(0, n, P[c])$
while $(i, j) \neq \perp$ *and* $c < m$ *and* $queryFound = True$
  if $i \neq j$ **then**
    $\ell := getlcp(i, j)$
    $min := \min\{\ell, m\}$
    $queryFound := S[\text{suftab}[i] + c..\text{suftab}[i] + min - 1] = P[c..min - 1]$
    $c := min$
    $(i, j) := getInterval(i, j, P[c])$
  else $queryFound := S[\text{suftab}[i] + c..\text{suftab}[i] + m - 1] = P[c..m - 1]$
if $queryFound$ **then**

- Man muss höchstens |P|-mal im Intervallbaum absteigen
  - Bei jedem Abstieg (getInterval) matched man ≥1 Zeichen von P
- getInterval() muss höchstens $|\Sigma|$ mal child[].next aufrufen
  - Start: Aufruf von child[].down
  - Traversiere alle weiteren Kinder
  - Jedes „beginnt“ mit einem anderen Zeichen (nach Position α)
- Zusammen: $O(|P|*|\Sigma|) = O(|P|)$ (bzw. O(|P|+k))

Experimente [AKO04]





- Eine Million Anfragen, zufällige Query der Länge 30-40, Laufzeit in Sekunden
- ESA schlechter als stree/mamy für große Alphabete
- ESA schneller als Suffixarray/-baum für kurze Alphabete
- Deutlich besserer Platzverbrauch

Selbsttest

- Wie viel Platz braucht ein Suffixarray?
- Suchkomplexität im Suffixarray?
- Warum ist es beim Manber/Mayr Algorithmus wichtig, dass Bucket-Sort ein stabiles Suchverfahren ist?
- Was macht das child-Array im Enhanced Suffixarray?
- Wie kann ein O(n*log(n)) Algorithmus in der Praxis schneller als ein O(n) sein?
- Kann man Suffixarrays in-place bauen? Wie?