Das $\mathcal{O}$-Tutorial

1 Definition von $\mathcal{O}$, Ω, Θ, o und ω

Seien f und g zwei Funktionen von $\mathbb{R}_{\geq 0}$ nach $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Hierbei bezeichne $\mathbb{R}_{\geq 0}$ die nicht-negativen reellen Zahlen. Die Funktionsmengen $\mathcal{O}$, Ω, Θ, o und ω sind wie folgt definiert:

Definition 1.

$$\mathcal{O}(g) = \{f \mid \exists c > 0 \quad \exists n_0 > 0 \quad \forall n \geq n_0 : \quad f(n) \leq c \cdot g(n)\}$$

Definition 2.

$$\Omega(g) = \{f \mid \exists c > 0 \quad \exists n_0 > 0 \quad \forall n \geq n_0 : \quad f(n) \geq c \cdot g(n)\}$$

Definition 3.

$$\begin{aligned}\Theta(g) &= \{f \mid f \in \mathcal{O}(g) \text{ } \textit{und } f \in \Omega(g)\} \\ &= \{f \mid \exists c_1 > 0 \quad \exists c_2 > 0 \quad \exists n_0 > 0 \quad \forall n \geq n_0 : \quad f(n) \leq c_1 \cdot g(n) \text{ } \textit{und } f(n) \geq c_2 \cdot g(n)\}\end{aligned}$$

Definition 4.

$$o(g) = \{f \mid \forall c > 0 \quad \exists n_0 > 0 \quad \forall n \geq n_0 : \quad f(n) < c \cdot g(n)\}$$

Definition 5.

$$\omega(g) = \{f \mid \forall c > 0 \quad \exists n_0 > 0 \quad \forall n \geq n_0 : \quad f(n) > c \cdot g(n)\}$$

Wir interessieren uns in der Vorlesung nur für Funktionen mit nicht-negativen Argumenten und Funktionswerten, da wir die $\mathcal{O}$-Notation nur für die Abschätzung von Laufzeiten und des Speicherplatzbedarfs einsetzen werden. Auf beliebige Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ können die obigen Definitionen leicht erweitert werden.

Beispiele

- $f(n) = k$, wobei $k > 0$, und $g(n) = 1$: Wähle $c = k$, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $f(n) \leq c \cdot g(n)$ und somit folgt $k \in \mathcal{O}(1)$. Außerdem gilt für das selbe c für alle $n \in \mathbb{N}$: $f(n) \geq c \cdot g(n)$ und somit gilt $k \in \Omega(1)$. Beides zusammen ergibt $k \in \Theta(1)$. Konstante Funktionen wachsen alle asymptotisch gleich schnell (nämlich gar nicht).
- $f(n) = 3n^5 + 4n^3 + 15$ und $g(n) = n^5$:

  Wenn wir z.B. $c = 3 + 4 + 15 = 22$ wählen, dann gilt für alle $n \geq 1$: $3n^5 + 4n^3 + 15 \leq 22n^5$ und somit folgt $3n^5 + 4n^3 + 15 \in \mathcal{O}(n^5)$.

  Wählen wir z.B. $c = 1$, so gilt $3n^5 + 4n^3 + 15 \geq n^5$ für alle $n \geq 1$. Es folgt $3n^5 + 4n^3 + 15 \in \Omega(n^5)$ und somit gilt $3n^5 + 4n^3 + 15 \in \Theta(n^5)$.

  Dies gilt für alle Polynome. D.h. wir müssen bei Polynomen nur den Exponent des größten Terms betrachten. Allgemein gilt: $f(n) = a_0 + a_1 n + \cdots + a_k n^k \in \Theta(n^k)$, für $a_0, \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{R}$ und $a_k > 0$.

  Achtung: Es gilt $3n^5 + 4n^3 + 15 \notin o(n^5)$ und $3n^5 + 4n^3 + 15 \notin \omega(n^5)$. Die erste Aussage folgt aus der Wahl von $c = 1$ für alle $n \geq 1$, die zweite Aussage folgt aus der Wahl $c = 22$ und $n \geq 1$. Genau diese Werte haben wir für den Beweis von $\mathcal{O}$ bzw. Ω benutzt. Gleich sehen wir, dass dies kein Zufall ist.

2 Zusammenhänge zwischen $\mathcal{O}$, Ω, Θ, o und ω

Es gilt:

$$f \in \mathcal{O}(g) \iff g \in \Omega(f).$$

Beweis: Wenn $f \in \mathcal{O}(g)$, dann gibt es ein $c > 0$ und ein $n_0 > 0$, so dass für alle $n \geq n_0$: $f(n) \leq c \cdot g(n)$ gilt. Folglich gilt aber für $c' = \frac{1}{c}$ und dasselbe n_0 für alle $n \geq n_0$: $g(n) \geq c' \cdot f(n)$ und somit haben wir $g \in \Omega(f)$. Der Beweis der anderen Richtung ist analog. □

Mit einem analogen Beweis kann man Folgendes zeigen:

$$f \in o(g) \iff g \in \omega(f).$$

Weiterhin gilt:

$$f \in o(g) \Rightarrow f \notin \Omega(g).$$

Beweis: Da $f \in o(g)$, gilt für alle $c > 0$, dass es ein $n_0 > 0$ gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $f(n) < c \cdot g(n)$. Daraus folgt, dass es keine Konstante $c' > 0$ gibt, so dass ab irgendeinem $n_0 > 0$ für alle $n \geq n_0$ gilt: $f(n) \geq c' \cdot g(n)$. Damit $f \in \Omega(g)$ gilt, muss allerdings so eine Konstante $c' > 0$ existieren. Folglich haben wir $f \notin \Omega(g)$. □

Mit analogem Beweis gilt:

$$f \in \omega(g) \Rightarrow f \notin \mathcal{O}(g).$$

Hier noch eine kleine Zusammenfassung:

	$\mathcal{O}$	Ω	Θ	o	ω
$f \in o(g)$	X	—	—	X	—
$f \in \Theta(g)$	X	X	X	—	—
$f \in \omega(g)$	—	X	—	—	X

3 Hinreichende Kriterien für $\mathcal{O}$ und o

Sehr nützlich ist die folgende Aussage, welche wir hier ohne Beweis verwenden:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty \Rightarrow f \in \mathcal{O}(g).$$

Intuitiv bedeutet ein endlicher Grenzwert, dass die Funktion im Nenner mindestens so schnell wächst, wie die im Zähler und genau solche Funktionen befinden sich in der entsprechenden $\mathcal{O}$-Menge.

Beispiel

- Betrachte $f(n) = 23$ und $g(n) = \log\log n$. Da $\log\log n$ für $n \to \infty$ divergiert, gilt: $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{23}{\log\log n} = 0 < \infty$ und somit folgt $23 \in O(\log\log n)$.

Außerdem gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \Rightarrow f \in o(g).$$

Somit folgt, dass $23 \in o(\log\log n)$.

4 “Transitivität” von $\mathcal{O}$

Diese Eigenschaft wird auf Übungsblatt 1 bewiesen, aber ein Beispiel kann nicht schaden.

Beispiel

- Sei $f(n) = a_0 + a_1 n + \cdots + a_k n^k$ wobei $a_k > 0$, sei $g(n) = n^k$ und sei $h(n) = b_0 + b_1 n + \cdots + b_l n^l$, mit $k \leq l$ und $b_i > 0$ für $0 \leq i \leq l$. Mit Hilfe der Transitivität können wir ganz leicht zeigen, dass $f \in \mathcal{O}(h)$ gilt.

  Wir haben bereits oben gezeigt, dass $f \in \mathcal{O}(g)$ gilt. Wenn wir jetzt noch zeigen, dass auch $g \in \mathcal{O}(h)$ wahr ist, dann folgt mit Hilfe der Transitivität die gewünschte Aussage.

  Wir wählen $c = \frac{1}{b_l}$ und somit folgt für alle $n \in \mathbb{N}$: $g(n) \leq c \cdot h(n)$. Folglich gilt $g \in \mathcal{O}(h)$ und somit ergibt sich $f \in \mathcal{O}(h)$.

5 Logarithmen

Logarithmen zu verschiedenen Basen können alle mit einem zusätzlichen konstanten Faktor ineinander umgerechnet werden. Dies ist oft sehr nützlich.
Betrachten wir die beiden Funktionen $\log_a n$ und $\log_b n$, wobei $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$. Es gilt $a^{\log_a n} = n$. Weiterhin gilt:

$$\frac{\log_b n}{\log_b a} = \frac{\log_b(a^{\log_a n})}{\log_b a} = \frac{\log_a n \cdot \log_b a}{\log_b a} = \log_a n$$

Somit gilt mit $c = \frac{1}{\log_b a}$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$: $\log_a n \leq c \cdot \log_b n$ und damit folgt $\log_a n \in \mathcal{O}(\log_b n)$. Beachtenswert ist hierbei, dass $\log_b a$ eine Konstante ist und somit c auch konstant ist.
Mit $c = \frac{1}{\log_b a}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$: $\log_a n \geq c \cdot \log_b n$ und somit $\log_a n \in \Omega(\log_b n)$. Beide Aussagen zusammen ergeben $\log_a n \in \Theta(\log_b n)$.

6 Abschätzungen mit Hilfe des Satzes von L'Hospital

Für zwei differenzierbare Funktionen f und g, mit $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} g(n) = \infty$ besagt der Satz von L'Hospital, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)},$$

falls der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}$ existiert.
Dies ist extrem hilfreich, wenn wir das hinreichende Kriterium aus Abschnitt 3 anwenden wollen.

Beispiel

- Wir betrachten $f(n) = \log n$ und $g(n) = \sqrt{n}$. Wir betrachten den Grenzwert: $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{\sqrt{n}}$ und wollen zeigen, dass dieser endlich ist. Beide Funktionen gehen für wachsendes n gegen ∞. Wir können somit den Satz von L'Hospital anwenden, doch dafür müssen wir die beiden Funktionen ableiten. Um uns dies zu erleichtern, wandeln wir zuerst die Basis des Logarithmus im Zähler in die Basis e um, denn die Funktion $\ln n$ können wir ganz leicht ableiten. Es gilt $\frac{1}{\ln 2} \cdot \ln n = \log n$. Somit gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\ln 2} \ln n}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln 2 \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \ln 2 \cdot \frac{1}{2} n^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\ln 2 \sqrt{n}} = 0 < \infty.$$

  Wir haben also gezeigt, dass $\log n \in o(\sqrt{n})$ gilt.

7 Ausnutzen der Monotonie

Seien f, g und h Funktionen von $\mathbb{R}_{\geq 0}$ nach $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Die Funktion f sei streng monoton wachsend. Es bezeichne $k \circ l$ die Komposition der Funktionen k und l, d.h. $k \circ l(x) = k(l(x))$. Es gilt:

$$\exists n_0 > 0 \quad \forall n \geq n_0 : g(n) \leq h(n) \iff \exists n_0' > 0 \quad \forall n \geq n_0' : f(g(n)) \leq f(h(n)).$$

Beweis: Die Richtung von links nach rechts folgt aus der Monotonie von f, wobei $n_0 = n_0'$. Für die andere Richtung sei $f(g(n)) \leq f(h(n))$ für alle $n \geq n_0'$ für ein $n_0' > 0$. Angenommen es gibt ein $n'' \geq n_0'$ so dass $g(n'') > h(n'')$, dann muss aufgrund der strengen Monotonie von f gelten, dass $f(g(n'')) > f(h(n''))$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass für alle $n \geq n_0'$ $f(g(n)) \leq f(h(n))$ gilt. Für $n_0 = n_0'$ folgt, dass $g(n) \leq h(n)$ für alle $n \geq n_0$ gilt. □

Beispiel

- Wir wollen die Funktionen $2^{\log n}$ und $2^{\sqrt{n}}$ vergleichen. Hier ist $f(n) = 2^n$, $g(n) = \log n$ und $h(n) = \sqrt{n}$. Wir haben bereits in Abschnitt 6 gezeigt, dass $g \in o(h)$. D.h. für jedes $c > 0$ gibt es ein $n_0 > 0$ so dass für alle $n \geq n_0$ gilt, dass $g(n) < c \cdot h(n)$. Folglich gibt es auch für $c' = 1$ ein solches $n_0 > 0$ für das gilt: $\forall n \geq n_0 : g(n) \leq h(n)$. Somit gilt für dieses n_0 auch $\forall n \geq n_0 : f(g(n)) \leq c' \cdot f(h(n))$. Wir haben damit gezeigt, dass $2^{\log n} \in \mathcal{O}(2^{\sqrt{n}})$.