Landau-Notation

Definitionen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}(g) &= \{f \mid \exists c > 0 \quad \exists n_0 > 0 \quad \forall n \geq n_0 : \quad f(n) \leq c \cdot g(n)\} \\
\Omega(g) &= \{f \mid \exists c > 0 \quad \exists n_0 > 0 \quad \forall n \geq n_0 : \quad f(n) \geq c \cdot g(n)\} \\
\Theta(g) &= \{f \mid f \in \mathcal{O}(g) \text{ und } f \in \Omega(g)\} \\
o(g) &= \{f \mid \forall c > 0 \quad \exists n_0 > 0 \quad \forall n \geq n_0 : \quad f(n) < c \cdot g(n)\} \\
\omega(g) &= \{f \mid \forall c > 0 \quad \exists n_0 > 0 \quad \forall n \geq n_0 : \quad f(n) > c \cdot g(n)\}
\end{aligned}$$

Zusammenhänge:

A) $f \in o(g) \implies f \in \mathcal{O}(g)$
$f \in \omega(g) \implies f \in \Omega(g)$

B) $f \in \mathcal{O}(g) \iff g \in \Omega(f)$
$f \in o(g) \iff g \in \omega(f)$

C) $f \in o(g) \implies f \notin \Omega(g)$
$f \in \omega(g) \implies f \notin \mathcal{O}(g)$

Hinreichende Kriterien:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty \implies f \in \mathcal{O}(g)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \implies f \in o(g)$$

Satz von l'Hôpital:

Für zwei differenzierbare Funktionen f und g, mit $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} g(n) = \infty$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}, \text{ falls der Grenzwert } \lim_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)} \text{ existiert.}$$

Aufgabe (Rekursive Algorithmen, Korrektheit)

Gegeben sei der folgende Algorithmus:

Algorithmus M(n)

Input: natürliche Zahl n

Output: Zahl x

if $n = 0$ **then**
    return n;
else
    return $n \cdot$ **M**$(n-1)$;
end if

1. Was berechnet der Algorithmus **M**(n)?
2. Welche Laufzeit hat der Algorithmus?
3. Beweisen Sie die Korrektheit des Algorithmus.