Grundlagen der Objektmodellierung

Daniel Göhring

30.10.2006

Gliederung

- Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung
- Begriffe zur Umweltmodellierung
- Bayesfilter
- Zusammenfassung

Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

- In der probabilistischen Robotik werden Objektzustände, Sensor- sowie Kontrolldaten in Form von Zufallsvariablen beschrieben
- Probabilistische Inferenz: wie kann der Wert einer Zufallsvariable aus einer anderen Zufallsvariable abgeleitet werden?

Grundlagen

- Sei X eine Zufallsvariable mit einem Wert x
- Beispiel Münzwurf:
  - $p(X=\text{Kopf}) = 0.5$, $p(X=\text{Zahl}) = 0.5$
- Diskrete Wahrscheinlichkeiten summieren sich zu 1 auf: $\sum p(X = x) = 1$

Grundlagen - PDFs

- Wahrscheinlichkeiten sind stets positiv oder gleich null
- Sehr oft werden Zustände im kontinuierlichen Raum abgeschätzt
- Variablen können dabei alle Werte innerhalb eines Kontinuums annehmen
- Alle Variablen solchen Var. besitzen eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (PDF)

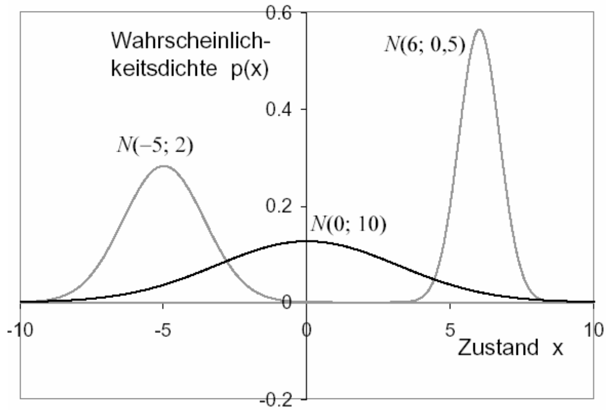
Grundlagen - Normalverteilungen

- Eine gebräuchliche Funktion zur Darstellung der Wahrscheinlichk.-verteilung ist die Gaussfunktion, mit Mittelwert μ und Varianz σ

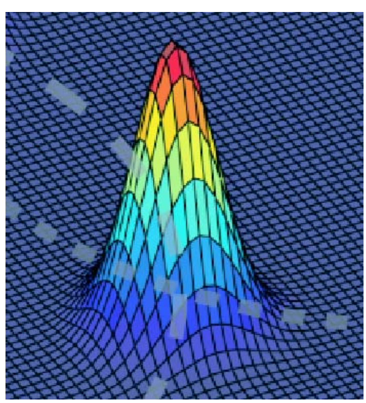
- Multivariate Verteilung

$$P(X) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n * det(\Sigma)}} exp^{-\frac{1}{2}(X-\mu)^T(\Sigma)^{-1}(X-\mu)}$$

Eindimensionale Gaussfunktionen



2D-Gaußfunktionen



Varianzen, Kovarianzen

- Analog zur Varianz bei eindimensionalen Zustandsräumen können bei mehreren Dimensionen Kovarianzmatrizen S berechnet werden

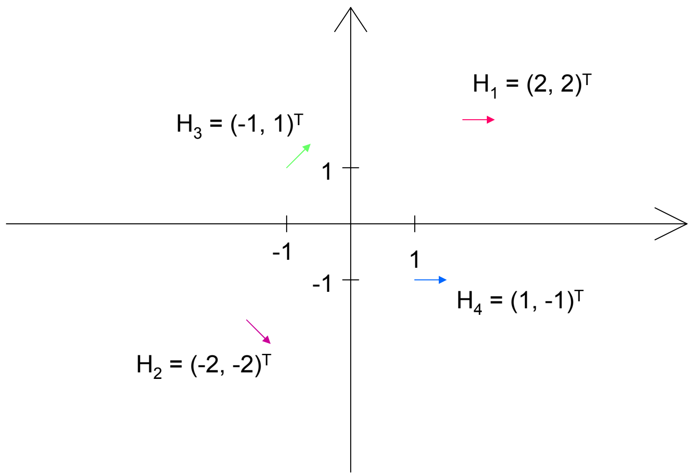
$$S = 1/n \Sigma V_i * V^{-1}_i$$

Beispiel

- 4 Messungen

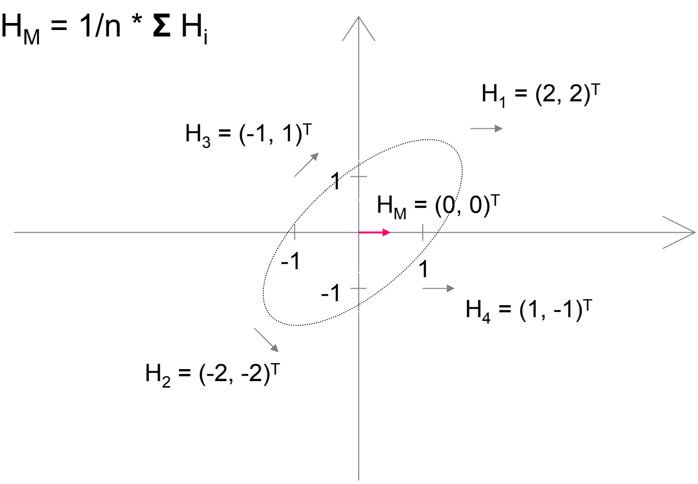
- zwei Dimensionen: Position: x,y
- die einzelnen Messungen haben unterschiedliche Werte

Beispielverteilung



Mittelwert

$H_M = 1/n * \mathbf{\Sigma}\ H_i$



Kovarianzmatrix

$S = 1/n * \mathbf{\Sigma}\ \mathbf{(}H_M - H_i) * \mathbf{(}H_M - H_i)^T$

- Auf der Hauptdiagonale befinden sich die Varianzen von x und y, auf Nebendiagonale die Kovarianzen.

$$S = \begin{pmatrix} 2.5 & 1.5 \\ 1.5 & 2.5 \end{pmatrix}$$

Werte der Kovarianzmatrix können nicht direkt in Werte der Ellipse (Rotation, Halbachsenausdehnung) umgerechnet werden. Kovarianzmatrix ist immer symmetrisch (positiv demindefinite Matrix).

Zur Vollständigkeit: Korrelationsmatrix R

- jedes Element $r_{i,j}$ aus R berechnet sich bei gegebenen Elementen $c_{i,j}$ aus S als:

$r_{i,j} = c_{i,j} * c_{i,j} / (c_{i,i} * c_{j,j})$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0.36 \\ 0.36 & 1 \end{pmatrix}$$

Bedingte Unabhängigkeiten

- $p(x,y)$
- $p(x|y) = p(X = x \mid Y = y)$
- $p(x|y) = p(x,y) / p(y)$
- $p(x|y) = p(x) * p(y) / p(y) = p(x)$

- Wenn X und Y unabhängig sind, kann man aus Y nichts über X sagen

Theorem der Totalen Wahrscheinlichkeiten

- $p(x) = \sum \; p(x|y)p(y)$ Diskret

- $p(x) = \int p(x|y)p(y)\, dy$ Kontinuierlich

Satz von Bayes

- $$p(x|y) = \frac{p(y|x)\, p(x)}{p(y)}$$

- $$p(x|y) = \frac{p(y|x)\, p(x)}{\int p(y|x)\, p(x)\, dx}$$

Satz von Bayes

Da p(y) für alle Werte von x gleich ist, kan eine verkürzte Schreibweise eingeführt werden,

$$p(x|y) = \eta\, p(y|x)\, p(x)$$

η besagt, dass das Resultat noch normiert werden muss.

Satz von der bedingten Unabhängigkeit

- Analog zum Satz der Unabhängigkeit, kann der Satz der Bedingten Unabhängigkeit formuliert werden als:

$$p(x,y|z) = p(x|z)*p(y|z), \text{ äquivalent zu}$$
$$p(x|z) = p(x|z,y)$$
$$p(y|z) = p(y|z,x)$$

Begriffe zur Umweltmodellierung

- Zustand: Umwelt wird als Zustand repräsentiert
- Zustandsvariablen, die sich nicht über die Zeit ändern werden als statisch, sonst als dynamisch bezeichnet
- Bezeichnung im allgemeinen als *x,* Zustand zur Zeit *t*: x_t

- Position
  – kann durch bis zu 6 Koordinaten dargestellt werden: 3 für die Position und 3 für die Orientierung im Raum
  - Bei Bewegung in der Ebene reichen hingegen meist 3 Koordinaten aus, 2 für die Position, 1 für die Ausrichtung

- Landmarken – eine Möglichkeit der Lokalisierung ist die Einführung von Landmarken

- Stationäre, Unterscheidbare, gut erkennbare Objekte der Umwelt

- Vollständiger Zustand
  - Ein Zustand x_t wird als vollständig bezeichnet, wenn er die Zukunft maximal genau vorhersagen kann, d.h. Wissen über seine Vergangenheit auch keine zusätzliche Genauigkeit mehr einbringen würde
  - Verwendung bei Markovketten
  - Praktisch unmöglich, weil nie alle Variablen bekannt sind
  - Oft erfolgt Auswahl von Variablen – unvollständiger Zustand

- Diskrete, kontinuierliche Zustände:
  - Beispiele: Kontinuierlich: Roboterposition
  - Diskret: Sensorindikator (funktioniert/defekt)

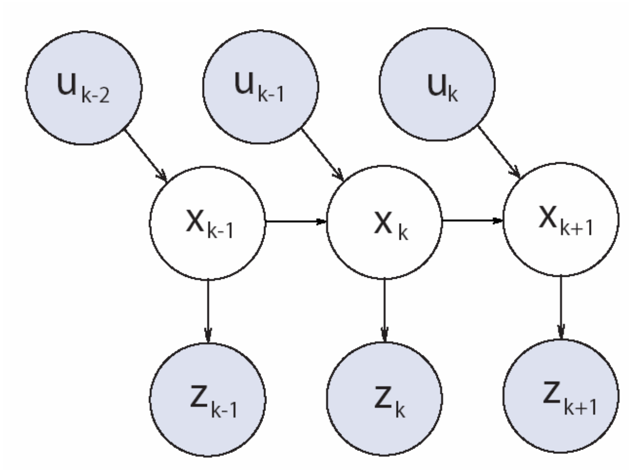
Interaktion mit der Umwelt

- Messung:
  – Resultat einer Interaktion/Beobachtung der Umwelt durch Sensoren
  – Sensordaten treffen i.d.R. mit einer gewissen Verzögerung ein
  – Schreibweise $z_{t1:t2 =}\ z_{t1}, \ldots, z_{t2}$

- Kontrollaktionen:
  – ändern den Zustand der Welt
  – Auch wenn Roboter keine Aktionen intendiert, ändert sich die Welt – daher immer mitmodelliert
  – $u_{t1:t2} = u_{t1}, \ldots, u_{t2}$

- Odometer: Misst den Effekt einer Kontrollaktion, eigentlich Sensordaten, werden aber wie Kontrolldaten behandelt

Bayesnetzwerk/Hidden Markov Modell



- Zustandsübergangswahrscheinlichkeit

$$p(x_t|x_{t-1}, u_t)$$

- Messungswahrscheinlichkeit

$$p(z_t|x_t)$$

Beispiel

- Glaube, Tür Offen:
  - bel(X = open) = 0.5
  - bel(X = closed) = 0.5

  Sensormodell:
  - p(Z = sens offen|X = ist offen) = 0.6
  - p(Z = sens geschl.|X = ist offen) = 0.4
  - p(Z = sens offen|X = ist geschl.) = 0.2
  - p(Z = sens geschl.|X = ist geschl.) = 0.8

Beispiel Fortsetzung

p(X = ist offen |U = öffne, X = ist off.) = 1
p(X = ist geschl. |U = öffne, X = ist off.) = 0
p(X = ist offen |U = öffne, X = ist gesch.)= 0.8
p(X = ist geschl. |U = öffne, X = ist gesch.) = 0.2

Oder

p(X = ist offen |U = Do noth., X = ist off.) = 1
p(X = ist geschl. |U = Do noth., X = ist off.) = 0
p(X = ist offen |U = Do noth., X = ist off.)= 0
p(X = ist geschl. |U = Do noth., X = ist off.) = 1

Beispiel Fortsetz.

- Wir können nun berechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Tür offen ist, wenn wir sie öffnen wollten und der Sensor sagt, Tür geschlossen.

Monte Carlo Lokalisierung

Iterative Bayesian Updating/Filtering:

$$\underbrace{Bel^{-}(s_t)}_{\text{prior}} \longleftarrow \int \underbrace{p(s_t|s_{t-1},u_{t-1})}_{\text{motion model}} \underbrace{Bel(s_{t-1})}_{\text{posterior at previous time step}} ds_{t-1}$$

$$\underbrace{Bel(s_t)}_{\text{posterior}} \longleftarrow \eta \underbrace{p(z_t|s_t)}_{\text{sensor model}} Bel^{-}(s_t)$$

Bel = belief, s = state, p = probability, u = action,
z = observation, η = normalization factor, t = discrete time

Taxonomie von Lokalisierungsproblemen

- Lokale vs. Globale Lokalisierung
  - Frage des Roboterkoordinatensystems
- Lokal: Keine Lokalisierung/Umrechnung notwendig
- Global: Kommuniktion mit anderen Robotern möglich

Taxonomie von Lokalisierungsproblemen

- Position Tracking/Lokalisierung
  - Objektverfolgung, wenn Anfangsposition bekannt,
  - Lokalisierung, wenn Anfangsposition unbekannt

Taxonomie von Lokalisierungsproblemen

- Kidnapped Robot Problem
  - Anfangsposition unbekannt,
  - Roboter muss seine Position in Umgebung ohne Vorwissen ermitteln

Taxonomie von Lokalisierungsproblemen

- Statische Umwelt, Dynamische Umwelt

Taxonomie von Lokalisierungsproblemen

- Passive Lokalisierung, Aktive Lokalisierung
  - Passiv: Warten auf bestimmte Sensordaten,die der Lokalisierung dienen könnten und dabei andere Aufgaben verfolgen
  - Aktive Lokalisierung: gezieltes Einsetzen der Sensoren zur Erfassung von Lokalisierungsdaten (active Vision)
    - Minimierung des Lokalisierungsfehlers

Taxonomie von Lokalisierungsproblemen

- Single Roboterlokalisierung
  - Weitgehend Untersucht,
  - Alle Daten kommen von derselben Plattform
- Multiroboterlokalisierung
  - In Gruppen von Robotern, in denen sich die Roboter gegenseitig erkennen können, bietet sich eine interessante Möglichkeit, die Lokalisierungsgenauigkeit zu verbessern
    - Viele interessante Algorithmen für Kommunikation, Inferenz