Einführung in die KI

Prof. Dr. sc. Hans-Dieter Burkhard
Vorlesung Winter-Semester 2005/06

Suchverfahren, Teil1:

- Grundbegriffe
- Problemlösen
- Zustandsraumsuche
- Evolutionäre Algorithmen

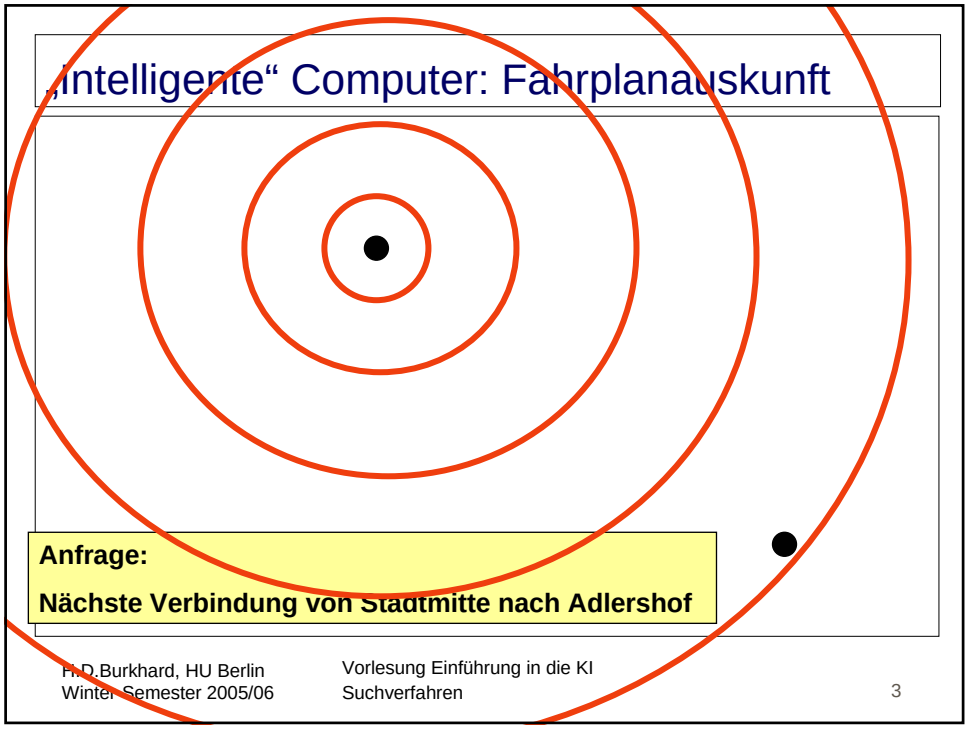
Durch Suche (vielleicht) lösbare Probleme

Suche nach einem günstigen Schachzug

Edgar Allan Poe:
Maelzel's Chess-Playing Machine,
Southern Literary Messenger, April 1836.

Arithmetical or algebraical calculations are, from their very nature,fixed and determinate. Certain data being given, certain results necessarily and inevitably follow. These results have dependence upon nothing, and are influenced by nothing but the data originally given...
But the case is widely different with the Chess-Player. With him there is no determinate progression. No one move in chess necessarily follows upon any one other...
It is quite certain that the operations of the Automaton are regulated by mind and by nothing else. Indeed this matter is susceptible of a mathematical demonstration, a priori.

„Intelligente“ Computer: Fahrplanauskunft



Anfrage:

Nächste Verbindung von Stadtmitte nach Adlershof

„Intelligente“ Computer: Fahrplanauskunft

Problem:
Was genau möchte der Kunde?

Nächste Verbindung?

Kürzeste Verbindung?

Billigste Verbindung?

Wenig Umsteigen?

Durch Suche (vielleicht) lösbare Probleme

Suche nach dem (optimalen) Weg zu einem Ziel
Suche nach einem günstigen Spielzug
Suche nach optimalen Parametern
Suche nach einem Fehler (Diagnose)
Suche nach einem Dokument
Suche nach einer Antwort, einem Beweis, ...

Suche als Methodik in der Informatik

Suche als Wiederfinden

- Datenbank
- Suchmaschine

Suche als Problemlösen

- Existiert eine Lösung?
- Finde eine Lösung.
- Was ist die beste Lösung? (Optimierung)

Suche als Wiederfinden

Indexstrukturen
- – Suchbäume
- – Hashtabellen
- – ....

- Datenbanken
- Suchmaschinen
- Textsammlungen
- Knowledge-Management

Weiterführende Fragen

Suche nach ähnlichen Begriffen

Suche nach Inhalten

Erinnern als Wiederfinden oder
Erinnern als Rekonstruktion?

Suche als Problemlösen

Theoretische Informatik:

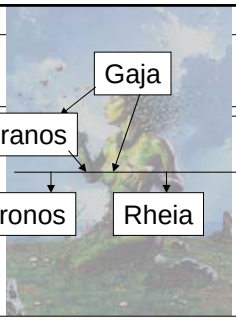
- Prinzipielle Lösbarkeit (Berechenbarkeit)
- Komplexitätsabschätzungen

Praktische Informatik, z.B.

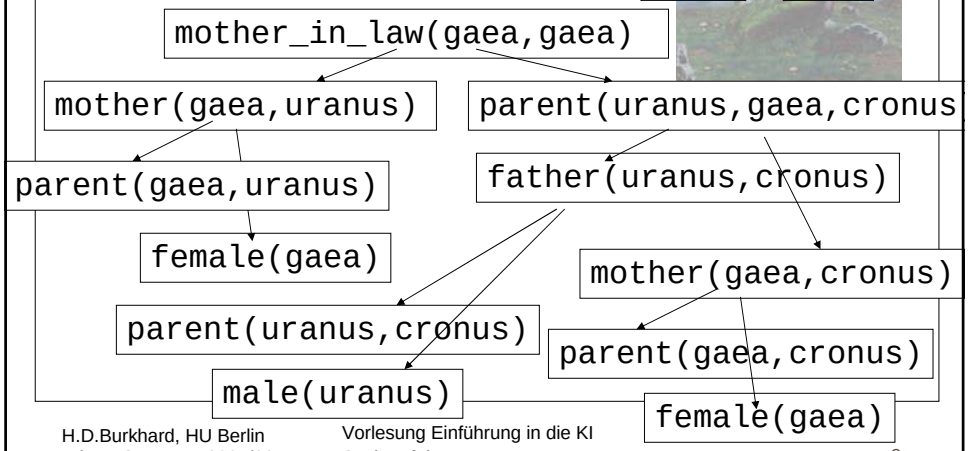
- Compilerbau
- Optimierung
- Theorembeweiser, PROLOG

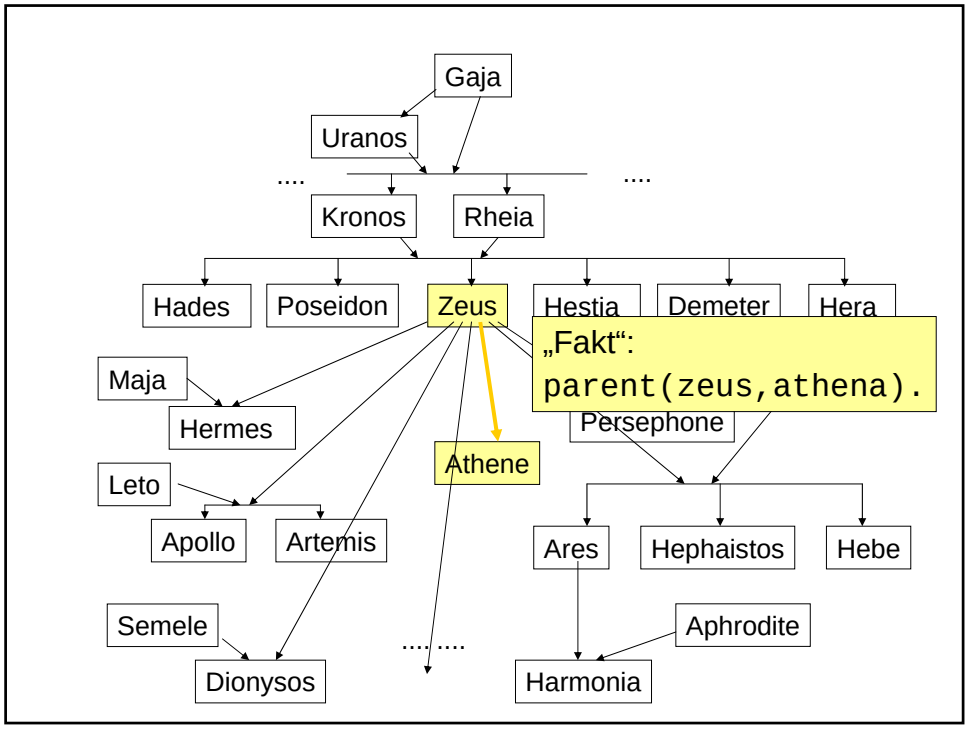
z.B. Suche in Graphen
- Wege,
- Rundreise,
- Zyklen
- spannende Bäume
- ....

Beweis in Prolog




```
?- mother_in_law(gaea,gaea).
Yes.
```





Prolog-Programm:Fakten

```
parent(uranus, cronus).
parent(gaea,   cronus).
parent(gaea,   rhea).
parent(rhea,   zeus).
parent(cronus, zeus).
parent(rhea,   hera).
parent(cronus, hera).
parent(cronus, hades).
parent(rhea,   hades).
parent(cronus, hestia).
parent(rhea,   hestia).
parent(zeus,   hermes).
parent(maia,   hermes).
...
```

```
male(uranus).
male(cronus).
male(zeus).
male(hades).
male(hermes).
male(apollo).
male(dionysius).
male(hephaestus).
male(poseidon).
```

```
female(gaea).
female(rhea).
female(hera).
female(hestia).
female(demeter).
female(athena).
female(metis).
female(maia).
female(persephone).
female(aphrodite).
female(artemis).
female(leto).
```


Prolog-Programm: Regeln

```
father(X,Y):-parent(X,Y),male(X).
mother(X,Y):-parent(X,Y),female(X).
```

```
parent(X,Y,Z) :-father(X,Z),mother(Y,Z).
```

```
son(X,Y):-parent(X,Y),male(Y).
```

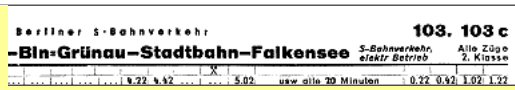
```
grandfather(X,Z):-father(X,Y),parent(Y,Z).
grandmother(X,Z):-mother(X,Y),parent(Y,Z).
```

```
grandchild(X,Y):-grandfather(Y,X).
grandchild(X,Y):-grandmother(Y,Z).
```

```
mother_in_low(X,Y):- mother(X,Z),parent(Z,Y,_).
```

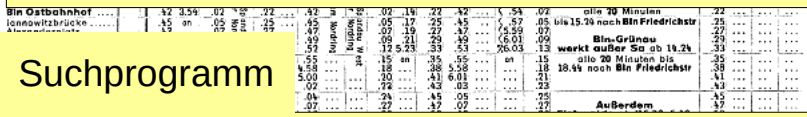
Prolog-Programm

Fahrplan-Fakten


Berliner S-Bahnverkehr 103. 103 c
–Bln-Grünau–Stadtbahn–Falkensee S-Bahnverkehr, elektr. Betrieb Alle Züge 2. Klasse
usw alle 20 Minuten

```
s_bahn(alexanderplatz,jannowitzbrücke,6:09,6:11, 103).
s_bahn(jannowitzbrücke,ostbahnhof,    6:11,6:13, 103).
...
```

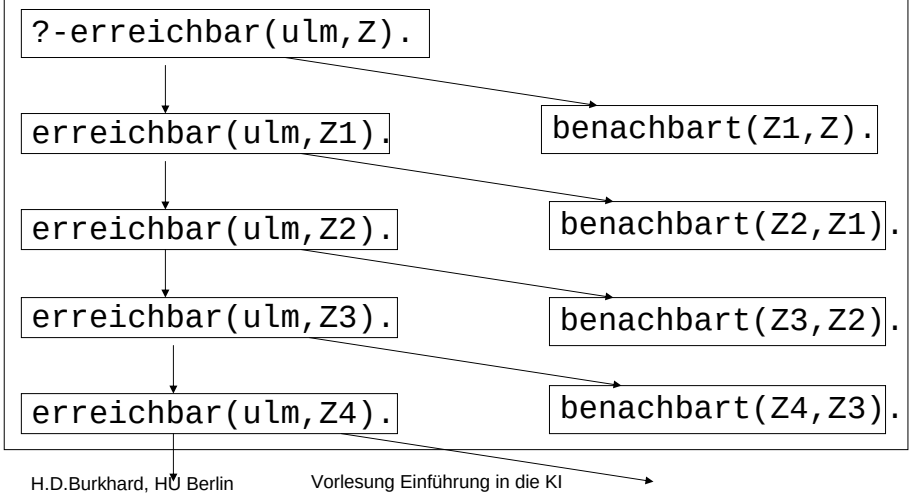
Suchprogramm


Bln Ostbahnhof
Jannowitzbrücke
alle 20 Minuten bis 15.24 nach Bln Friedrichstr
Bln-Grünau werkt außer Sa ab 14.24
alle 20 Minuten bis 18.44 nach Bln Friedrichstr
Außerdem

```
erreichbar(Start,Ziel,Zeit)
:- s_bahn(Start,Zwischenziel,Abfahrt,Ankunft,_),
   erreichbar(Zwischenziel,Ziel,Zeit1),
   addiereZeit(Zeit1,Ankunft,Abfahrt,Zeit).
...
```

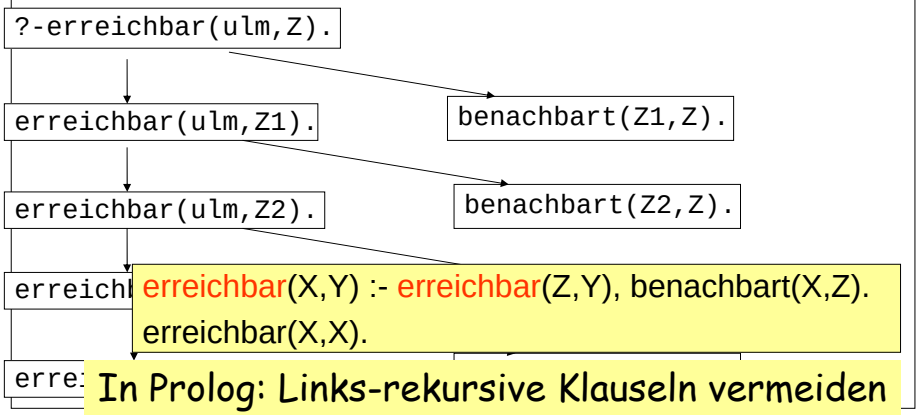

Unendliche Beweisversuche

```
erreichbar(X,Y):-erreichbar(X,Z),benachbart(Z,Y).
```



Prolog: Deklarative vs.prozedurale Semantik

Unterschiedliche Resultate bei
deklarativer und prozeduraler Semantik



1.1 Problemlösen

Gegeben ein Problem p

Varianten:

(L): Finde Lösung(en) l des Problems p

(O): Finde Optimale Lösung(en) l_{opt} des Problems p

(E): Existieren Lösungen des Problems p ?

Menge aller Probleme: P (Problemraum)

Menge aller Lösungskandidaten: M (Lösungsraum)

Entwurfsproblem:
Repräsentation von Problemen und Lösungen

Parameter-Räume

Problembeschreibung

Parameter-Raum $W_1 \times W_2 \times \ldots \times W_n$

Bewertungskriterium $\beta: W_1 \times W_2 \times \ldots \times W_n \rightarrow B$

Lösung: $[w_1, ..., w_n] \in W_1 \times W_2 \times \ldots \times W_n$

– Muss Bewertungskriterium $\beta(w_1, ..., w_n)$ erfüllen

Beispiel: Laufparameter bei Roboter

Zustandsräume

Problembeschreibung

Graphen, Bäume $[Z, Op, z_{initial} , Z_{final}]$

mit Zuständen Z

Operatoren $Op \subseteq Z \times Z$

Anfangszustand $z_{initial} \in Z$

Zielzuständen $Z_{final} \subseteq Z$

evtl. Kostenfunktion für Operatoren

Lösung z.B.

– Zielzustand $z \in Z_{final}$

– (kürzester) Weg zu einem Zielzustand

Entwurfsproblem:
Repräsentation als Graph (Zustände, Operatoren, ...)

Spiele, Problemzerlegungen

Transformationen zwischen den Repräsentationen sind möglich

Problembeschreibung:

Und-Oder-Bäume, Spielbäume

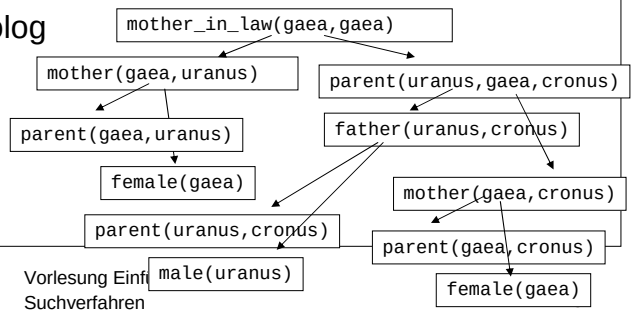
Prologprogramm und -anfrage

Lösung z.B.

– Gewinnsituation bzw. maximaler Gewinn

– Gewinnstrategie

– Beweis in Prolog



Problemlösen: Lösungsmengen

Lösungen bzgl. (L) : $L : P \rightarrow 2^M$

Menge aller Lösungen für p : $L(p) \subseteq M$

Kriterium ϕ_p für Lösungen: $\phi_p(m) = true$ gdw. $m \in L(p)$

$L(p) = \{ m \mid \phi_p(m) = true \}$

Lösungen bzgl. (E) : $E: P \rightarrow \{ ja,nein \}$

$E(p) = ja \Leftrightarrow L(p) \neq \emptyset$

Problemlösen: Lösungsmengen

Lösungen bzgl. (O) : $O: P \rightarrow 2^M$

Menge der optimalen Lösungen für p : $O(p) \subseteq M$

Vergleichskriterium:

(Halb)Ordnung bzgl. Optimalität: $R_> \subseteq M \times M$

mit $R_>(m_1,m_2)$ gdw. m_1 echt besser als m_2

$O(p) = \{ m \mid \phi_p(m) = true$

$\& \neg \exists m' \in M (\phi_p(m') = true \& R_>(m',m)) \}$

Problemlösen: Lösungsverfahren

Lösungsverfahren: $V: P \rightarrow 2^M$

Durch V für p ermittelte Lösungen: $V(p) \subseteq M$

Algorithmen

- Berechnen
- Manipulation von Ausdrücken
- zufälliges Probieren
- systematisches Probieren: Suchen

Vollständigkeit, Korrektheit

Für beliebige Lösungsverfahren $V: P \rightarrow 2^M$ bzgl. (L) gilt:

V ist *vollständig*, falls $L(p) \subseteq V(p)$

V ist *korrekt*, falls $V(p) \subseteq L(p)$

Für beliebige Lösungsverfahren $V: P \rightarrow 2^M$ bzgl. (O) gilt :

V ist *vollständig*, falls $O(p) \subseteq V(p)$

V ist *korrekt*, falls $V(p) \subseteq O(p)$

Ein Lösungsverfahren $V: P \rightarrow \{ ja,nein \}$ bzgl. (E) ist

korrekt, falls $V(p) = E(p)$

Abgeschwächte Vollständigkeit

Man ist mit einer Lösung zufrieden

Für beliebige Lösungsverfahren $V: P \rightarrow 2^M$ bzgl. (L) gilt:

V ist *vollständig*, falls $L(p) \neq \emptyset \rightarrow L(p) \cap V(p) \neq \emptyset$

Für beliebige Lösungsverfahren $V: P \rightarrow 2^M$ bzgl. (O) gilt :

V ist *vollständig*, falls $O(p) \neq \emptyset \rightarrow O(p) \cap V(p) \neq \emptyset$

Evtl. weiter abschwächen: suboptimale Lösung

Systematisches Suchen

Alle Lösungskandidaten prüfen
(Lösungsraum M durchmustern)

Parameter-Räume
- *Parametersatz* $[w_1, ..., w_n] \in W_1 \times W_2 \times . . . \times W_n$

Zustandsräume
- *Zielzustand* $z \in Z_{final} \subseteq Z$
- (*kürzester) Weg* zu einem Zielzustand

Spiele, Problemzerlegungen:
- *Gewinnsituation* bzw. maximaler Gewinn
- *Gewinnstrategie*

Probierverfahren: „*British-Museum-Procedure*“

Generate and Test für (L): korrekt

```
for all m∈M do
    if  φp(m) = true then stop( m )
stop( „no solution“ )
```

Komplexität abhängig von card(M) , compl(ϕ_p)
Verfahren ist *korrekt.*
Vollständiges Verfahren durch leichte Modifikation.

Generate and Test für (E) analog .

Probierverfahren: „*British-Museum-Procedure*“

Generate and Test für (O):

```
best-found := ∗          //  ∗ ∉M,   R>(m, ∗)  f.a.  m ∈ M
for all m ∈ M do
            if  ϕP(m) = true  & R>(m, best-found)
            then  best-found := m
if  best-found = { ∗ }
then stop( „no solution“ ) else stop( best-found )
```

NP-Probleme

Komplexität abhängig von card(M), compl(ϕ_p), compl($R_>$)
Verfahren ist *korrekt.*
Vollständiges Verfahren durch leichte Modifikation.

Lösungsraum M als Suchraum

- Systematik bzgl. „Generate“
  - Reihenfolge
  - Vollständigkeit der Erfassung
  - Wiederholungen vermeiden
- Heuristiken
  - Steuerung der Reihenfolge
    - Problem lokaler Kriterien
  - Beschränken (Abschneiden) des Suchraums
    - Problem Vollständigkeit/Korrektheit

1.2 Zustandsraum-Suche

Graph: $G = [Z, Op, z_{initial} , Z_{final}]$

Knoten Z („Zustände“)

Kanten $Op \subseteq Z \times Z$ („Operatoren“)

$card(Op(z,.))$ endlich f.a. $z \in Z$

= Suche in Graphen

Suche in Graphen

Beispiele:
- –Routenplanung
- –Fahrplanauskunft
- –Suche nach einem Beweis
- –Suche nach Gewinnstrategie
- –Planung

Modell für Problemlösen:
- Gegeben:
  - –Graph $G = [V,E]$
  - –„Anfangszustand“ $z_0 \in V$
  - –Menge von „Zielzuständen“ $Z_f \subseteq V$
- Aufgaben:
  - –Existiert ein Weg von z_0 zu einem $z_f \in Z_f$
  - –Konstruiere einen Weg von z_0 zu einem $z_f \in Z$
  - –Konstruiere optimalen Weg von z_0 zu einem $z_f \in Z_f$

    (bzgl. eines gegebenen Optimalitätskriteriums)

Planung: Modellierung als Graph

Mögliche Aktionen: $A = \{a_1,...,a_n\}$

Zustände (Knoten im Graphen):

V = durch Aktionen entstehende Situationen

Ausgangsituation: Anfangszustand z_0

Situationen, in denen Planungsziel erreicht ist: Zielzustände Z_f

Zustandsübergänge (Kanten im Graphen):

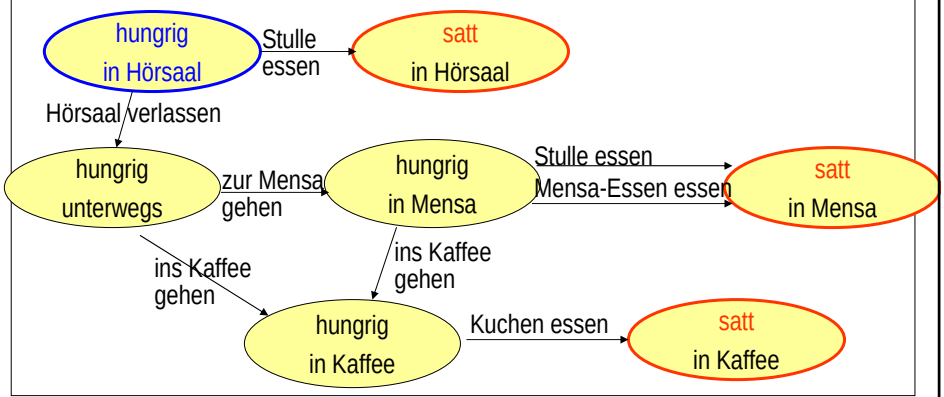
E = Übergänge zwischen Situationen durch Aktionen

G ist ein Kanten-beschrifteter Graph mit Mehrfachkanten

Planung: Modellierung als Graph

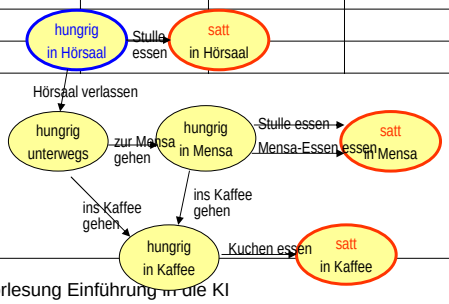
Ausgangszustand: *hungrig, im Hörsaal*

Bedingung an Zielzustände: *satt*



Übergangsmatrix

	Stulle essen	Hörsaal verlassen	zur Mensa gehen	Mensa-Essen essen	ins Kaffee gehen	Kuchen essen
hungrig, in Hörsaal	s., i.H.	h., u.				
hungrig, unterwegs			h., i.M.		h., i.K	
satt, in Hörsaal						
hungrig, in Mensa	s., i.M.			s., i.M.	h., i.K.	
hungrig, in Kaffee						s., i.K.
satt, in Mensa						
satt, in Kaffee						



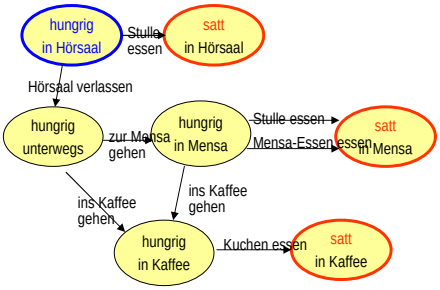
Übergangsmatrix

	Stulle essen	Hörsaal verlassen	zur Mensa gehen	Mensa-Essen essen	ins Kaffee gehen	Kuchen essen
hungrig, in Hörsaal	s., i.H.	h., u.				
hungrig, unterwegs			h., i.M.		h., i.K	
satt, in Hörsaal						
hungrig, in Mensa	s., i.M.			s., i.M.	h., i.K.	
hungrig, in Kaffee						s., i.K.
satt, in Mensa						
satt, in Kaffee						

Zeilen: Zustände z

Spalten: Aktionen a

Matrix-Element: von z durch a erreichter Zustand z´



- Graph
- Transitionssystem
- Automat
- Akzeptor

Komplexität (Anzahl der Zustände/Knoten)

8-er Puzzle: 9! Zustände
davon 9!/2 = 181.440 erreichbar

15-er Puzzle: 16! Zustände
davon 16!/2 erreichbar

ungarischer Würfel: $12 \cdot 4{,}3 \cdot 10^{19}$ Zustände
1/12 davon erreichbar: $4{,}3 \cdot 10^{19}$

Türme von Hanoi: 3^n Zustände für n Scheiben
lösbar in $(2^n) - 1$ Zügen

Dame: ca 10^{40} Spiele durchschnittlicher Länge

Schach: ca 10^{120} Spiele durchschnittlicher Länge

Go: 3^{361} Stellungen

Exponentielle vs. polynomiale Komplexität

n	n^2	n^3	2^n
10	100	1000	1024
100	10000	1000000	~ 10000000000
1000	1000000	1000000000	~ 10^{100}

bei Komplexität 2^n:

Steigerung der Rechenleistung um Faktor 1000

ermöglicht Steigerung der Problemgröße von n auf $n+10$

Komplexitäts-Probleme

Speicher zu klein für Zustandsraum

Aufwand für Erkennen von Wiederholungen

Lösungsmethode:

„Expansion des Zustandsraumes“:

Schrittweise Konstruktion und Untersuchung von Zuständen

„konstruieren – testen – vergessen“

Expansionsstrategien

- **Richtung**
  - Vorwärts, beginnend mit z_0
    (forward chaining, data driven, bottom up)
  - Rückwärts, beginnend mit Z_f
    (backward chaining, goal driven, top down)
  - Bidirektional
- **Ausdehnung**
  - Tiefe zuerst
  - Breite zuerst
- **Zusatzinformation**
  - blinde Suche („uninformiert“)
  - heuristische Suche („informiert“)

Güte von Suchalgorithmen

- bzgl. Komplexität des Verfahrens:
  - Zahl der Zustände insgesamt
  - Zahl der erreichbaren Zustände
  - Zahl der untersuchten Zustände
  - Suchtiefe
- bzgl. gefundener Lösungskandidat(en)
  - **Korrektheit:**
    - alle Antworten sind korrekt
  - **Vollständigkeit:**
    - Algorithmus liefert (mind.) alle korrekten Antworten (schwächer: bei Existenz wird eine Lösung gefunden)
  - **Optimalität:**
    - Algorithmus liefert optimale Lösung(en)

Zyklen, Maschen im Suchraum

Zustände werden mehrmals erreicht und expandiert.

Prolog:

```
erreichbar(X,Y) :- erreichbar(X,Z), nachbar(Z,Y).
erreichbar(X,X).

symmetrisch(X,Y):- symmetrisch(Y,X).
```

Trade-Off:

Test auf Wiederholungen: Zeit-, Speicher-aufwändig

(widerspricht „konstruieren – testen –vergessen“)

Beschränkung der Suchtiefe: unendliche Zyklen vermeiden

Suche nach einem Weg

Expansion: Schrittweise Konstruktion des Zustandsraums

Datenstrukturen :

- Liste OPEN:

Ein Zustand (Knoten) heißt "offen" , falls er bereits konstruiert, aber noch nicht expandiert wurde (Nachfolger nicht berechnet)

- Liste CLOSED:

Ein Zustand (Knoten) heißt "abgeschlossen" , falls er bereits vollständig expandiert wurde (Nachfolger alle bekannt)

Zusätzliche Informationen:
z.B. Nachfolger/Vorgänger der Knoten
(für Rekonstruktion gefundener Wege)

Schema S (Suche nach irgendeinem Weg)

S0: (Start) Falls Anfangszustand z_0 ein Zielzustand: EXIT(„yes:“ z_0).
OPEN := [z_0] , CLOSED := [ ] .

S1: (negative Abbruchbedingung) Falls OPEN = [ ] : EXIT(„no“).

S2: (expandieren)
Sei z der erste Zustand aus OPEN.
OPEN := OPEN – {z} . CLOSED := CLOSED ∪{z} .
Bilde die Menge Succ(z) der Nachfolger von z.
Falls Succ(z) = {} : Goto S1.

S3: (positive Abbruchbedingung)
Falls ein Zustand z_1 aus Succ(z) ein Zielknoten ist: EXIT(„yes:“ z_1).

S4: (Organisation von OPEN)
Reduziere die Menge Succ(z) zu einer Menge NEW(z)
durch Streichen von nicht weiter zu betrachtenden Zuständen.
Bilde neue Liste OPEN durch Einfügen der Elemente aus NEW(z) .
Goto S1.

Variable Komponenten in Schema S :

(Re-)Organisation von OPEN in S4

- **V1. Bildung der Menge NEW(z) aus Succ(z)**
  (Auswahl der weiter zu betrachtenden Zustände)
  - alle Zustände aus Succ(z)
  - einige (aussichtsreiche)
  - nur die, die noch nicht in OPEN
  - nur die, die nicht in CLOSED
- **V2. Sortierung von OPEN**
  (bestimmt nächsten zu expandierenden Zustand in S2)
  - NEW(z) sortieren
  - NEW(z) einfügen, z.B. an Anfang oder Ende,
  - OPEN (gesamte Liste) neu sortieren
- **V3. Weitere Bedingungen**
  - Beschränkung der Suchtiefe
  - Reduzierte Menge CLOSED

Blinde Suche: Tiefensuche/Breitensuche

Tiefe-Zuerst: **Keller**

- V2: NEW(z) an den Anfang von OPEN

Breite-Zuerst:

- V2: NEW(z) an das Ende von OPEN

Warteschlange

Speicheraufwand für OPEN
für b= Verzweigungszahl(fan-out), d=Tiefe

- Tiefe-Zuerst: linear $d \cdot b$
- Breite-Zuerst: exponentiell b^d

Tiefen-/Breiten-Suche mit Test auf Wiederholungen:

V1: NEW(z) = Succ(z)-(OPEN ∪CLOSED)

Für endliche Graphen:
korrekt und vollständig

Vollständig im Sinne:
findet (eine) Lösung im Fall der Existenz

Hoher Speicheraufwand für Liste CLOSED
(evtl. gesamter Graph)

Tiefen-/Breiten-Suche ohne Test auf Wiederholungen:

Statt Graph wird „Abgewickelter Baum“ untersucht

V1: NEW(z) = Succ(z)

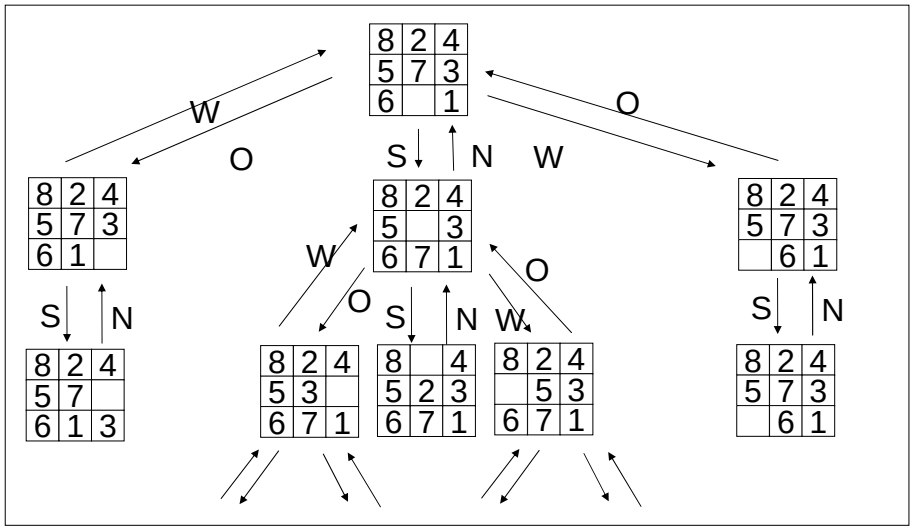
Für endliche Graphen:
Tiefe-Zuerst: korrekt, aber nicht immer vollständig
Breite-Zuerst: korrekt und vollständig

Hoher Zeitaufwand bei Zyklen/Maschen

Speicher-/Zeit-Trade-Off

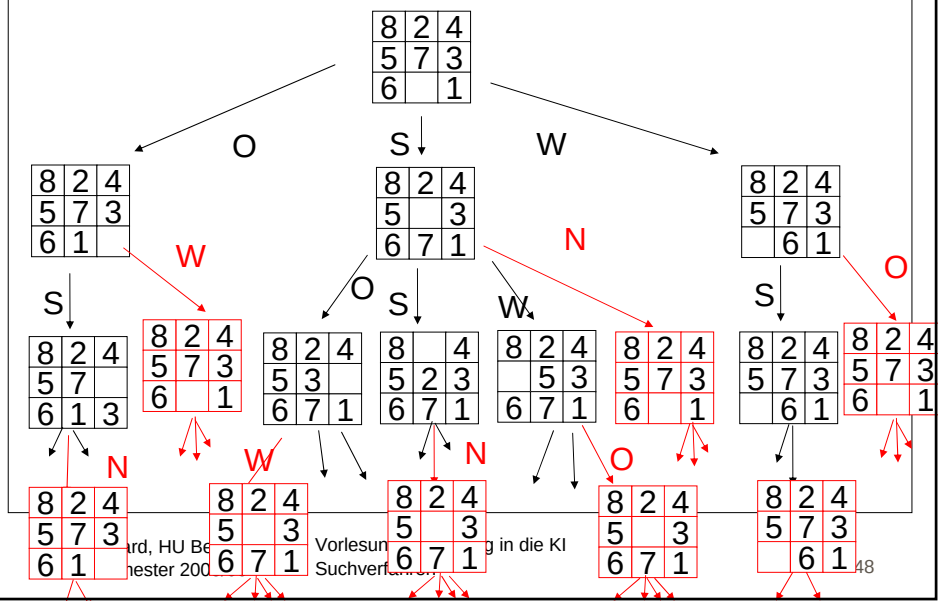
Abwicklung

Ursprünglicher Graph



Abwicklung

Durch Abwicklung entstandener Baum



Abwicklung

Durch Abwicklung aus $G=[V,E]$ entstandener Baum

- hängt ab vom Startknoten v_0
- enthält für jeden in v_0 beginnenden Weg genau einen Knoten/eigenen Zweig
- ist endlich gdw. der mit v_0 zusammenhängende Teilgraph von G keine Zyklen enthält

$T(G,v_0) = [K,B,v_0]$

Knotenmenge: $K:= \{ p \mid p \in V^* \text{ ist in } v_0 \text{ beginnender Weg von } G\}$

Kantenmenge: $B:= \{ [p,pv] \mid p, pv \in K, v \in V \}$

(zusätzlich: entsprechende Beschriftungen der Knoten/Kanten)

Backtracking

Eine Implementierung von Tiefe-zuerst-Verfahren

Spezielle Organisation der Liste OPEN:

Referenz auf jeweils nächsten zu expandierenden Zustand in jeder Schicht

Nach Abarbeiten aller Zustände einer Schicht zurücksetzen (backtracking) auf davor liegende Schicht

Möglichkeit für Zyklenvermeidung mit reduzierter Menge CLOSED (nur für aktuellen Zweig):

- Beim Backtracking Rücksetzen von CLOSED auf früheren Stand

Tiefenbegrenzung

Tiefensuche in Schema S modifizieren:

- Maximal bis vorgegebene Tiefe d suchen
- Zusätzliches negatives Abbruchergebnis:
  „es existiert keine Lösung bis zur Tiefe d“

Für endliche Graphen:

- korrekt, aber nicht immer vollständig
- Hinreichende Bedingung:
  Falls Durchmesser kleiner d: vollständig

Iterative Tiefensuche

Stufenweise begrenzte Tiefensuche

- Stufe 1: begrenzte Tiefensuche bis zur Tiefe 1
- Stufe 2: begrenzte Tiefensuche bis zur Tiefe 2
- Stufe 3: begrenzte Tiefensuche bis zur Tiefe 3
- ...

„Depth-first-iterative deepening (DFID)“

DFID bis Tiefe d bei fan-out b erfordert insgesamt

$b^d + 2 \cdot b^{d-1} + 3 \cdot b^{d-2} + ... + d \cdot b$ Schritte

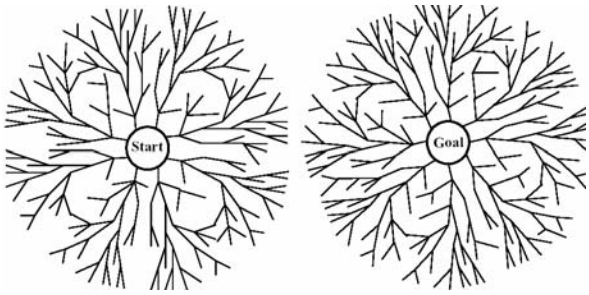
Vergleich mit Tiefe-Zuerst/ Breite-Zuerst bis Tiefe d :

$b^d + b^{d-1} + b^{d-2} + ... + b$ Schritte

DFID hat Speicherbedarf für OPEN wie Tiefe-zuerst
DFID findet Lösung wie Breite-zuerst

Bidirektionale Breitensuche

Ausgehend von Start und Ziel „parallel“ suchen bis zum Zusammentreffen.



- Aufwand: Von beiden Seiten nur halbe Tiefe
- Benötigt Kenntnis der „Vorgänger“
- Bei vielen Zielzuständen problematisch

Heuristische Suche

Schätzfunktion $\sigma(z)$: geschätzter Konstruktions-Aufwand für Erreichen eines Zielzustandes von z aus
(dabei $\sigma(z) = 0$ für Zielzustände z)

Heuristik: Zustände mit optimaler Schätzung bevorzugen

Bergsteigen/“hill climbing“ (ohne Test):

- V1: NEW(z) = Succ(z)
- V2: NEW(z) nach Aufwand sortiert an Anfang von OPEN

„Lokale Optimierung“

Für endliche Graphen:
korrekt, aber nicht immer vollständig
(ähnlich Tiefensuche)

Heuristische Suche

Schätzfunktion $\sigma(z)$: geschätzter Konstruktions-Aufwand für Erreichen eines Zielzustandes von z aus

Heuristik: Zustände mit optimaler Schätzung bevorzugen

Strahlensuche (ohne Test):

- V1: NEW(z) = „Gute“ Auswahl aus Succ(z)
- V2: NEW(z) nach Aufwand sortiert an Ende von OPEN

Für endliche Graphen:
korrekt, aber nicht immer vollständig
(analog eingeschränkter Breitensuche)

Heuristische Suche

Schätzfunktion $\sigma(z)$: geschätzter Konstruktions-Aufwand für Erreichen eines Zielzustandes von z aus

Heuristik: Zustände mit optimaler Schätzung bevorzugen

Bestensuche/“Greedy Search“ (ohne Test):

- V1: NEW(z) = Succ(z)
- V2: OPEN $\cup$ NEW(z) nach Aufwand sortieren

Für endliche Graphen:
korrekt, aber nicht immer vollständig

Typische Probleme lokaler Optimierung

Vorgebirgsproblem:
steilster Anstieg führt auf
lokales Optimum ("Nebengipfel")

Plateau-Problem:
keine Unterschiede in der
Bewertung

Grat-Problem:
vorgegebene Richtungen
erlauben keinen Anstieg

Konsequenz:
zwischenzeitliche Verschlechterungen zulassen

Schätzfunktionen

Beste Schätzung: Weist korrekten Weg.
Gleichwertig: Kenntnis des gesuchten Weges.

Trade-Off
bzgl. Aufwand zur Berechnung der Schätzung

1.3 Suche nach "bestem Weg“

Bester/optimaler Weg:
Minimale Kosten

Graph: $G = [V,E]$ mit
– Anfangszustand $z_0 \in V$
– Zielzuständen $Z_f \subseteq V$

Kosten für Zustandsübergang (Kante)
$c: E \rightarrow R^+$ (Kosten stets positiv!)
mit $c(e)$ = Kosten der Kante $e \in E$
bzw. $c(z,z')$ = Kosten der Kante $e=[z,z']$

Weg-Kosten als Summe von Kosten der Kanten.

Kosten eines Weges $s = e_1 \ldots e_n \in E^*$:

$$c(e_1 \ldots e_n) = \Sigma_{i=1,\ldots,n}\, c(e_i)$$

Kosten eines Weges $s = z_0\, z_1 \ldots z_n \in Z^*$

$$c(z_0\, z_1 \ldots z_n) = \Sigma_{i=1,\ldots,n}\, c(z_{i-1}, z_i)$$

Suche nach "bestem Weg“

Kosten für Erreichen des Zustandes z' von z aus:
– Falls z' von z erreichbar:
$g(z,z') := \text{Min}\{ c(s) / s$ Weg von z nach $z' \}$,
– Andernfalls: $g(z,z') := \infty$

Vorläufigkeit der Kostenberechnung während Expansion:
$G' = [V', E']$ sei (bekannter) Teilgraph von G
$g'(z, z', G') := \text{Min}\ \{ c(s) / s$ Weg in G' von z nach $z' \}$

$$g'(z,z',G') \geq g(z,z')$$

Suche nach "bestem Weg“

Verfahren “Generate and Test”:
Alle Wege im Graphen untersuchen.

$L(z_0)$
= Menge der in z_0 beginnenden Wege $p= v_0 \ldots v_n$

$L(z_0,Z_f)$
= Menge der in z_0 beginnenden Wege $p= v_0 \ldots v_n$ mit $v_n \in Z_f$

Kürzesten Weg in $L(z_0,Z_f)$ bestimmen.

Suche nach "bestem Weg“

S0: (Start) Falls Anfangszustand z_0 ein Zielzustand: EXIT(„yes:“ z_0).
OPEN := $[z_0]$, CLOSED := [ ] .

Schema S (Suche nach irgendeinem Weg)
findet eventuell zuerst teure Wege

OPEN := OPEN - {z} . CLOSED := CLOSED ∪{z} .
Bilde die Menge Succ(z) der Nachfolger von z.
Falls Succ(z) = {} : Goto S1.
S3: (positive Abbruchbedingung)
Falls ein Zustand z_1 aus Succ(z) ein Zielknoten ist: EXIT(„yes:“ z_1).

Lösungsidee:

Abbrechen, wenn alle offenen Wege teurer sind
als aktuell gefundene Lösung

nden.
s NEW(z) .
Goto S1.

dafür:

- Positive Abbruchbedingung von Schema S verändern
- Umstellung der Schritte in Schema S

Schema S‘ für Suche nach "bestem Weg“

S‘0: (Start) Falls Anfangszustand z_0 ein Zielzustand: EXIT(„yes:“ z_0).
OPEN := $[z_0]$, CLOSED := [ ] .

S‘1: (negative Abbruchbedingung) Falls OPEN = [ ] : EXIT(„no“).

S‘2: **(positive Abbruchbedingung)**
Sei z der erste Zustand aus OPEN.
Falls z ein Zielknoten ist: EXIT(„yes:“ z).

S‘3: (expandieren)
OPEN := OPEN - {z} . CLOSED := CLOSED ∪{z} .
Bilde die Menge Succ(z) der Nachfolger von z.
Falls Succ(z) = {} : Goto S‘1.

S‘4: (Organisation von OPEN)
– $g´(z_0 ,z´,G´)$ für alle $z´ \in$Succ(z) berechnen (im aktuellen G´) .
– Neue Liste OPEN durch Einfügen der Elemente aus Succ(z):
OPEN ∪ Succ(z) sortieren nach aufsteigendem $g´(z_0 ,z´,G´)$

Goto S‘1.

Schema S‘ für Suche nach "bestem Weg“

Satz :
Vor.: Es existiert $\delta > 0$ mit $c(z,z´) > \delta$ für alle z,z´
Beh.: Falls Lösung existiert, findet Schema S‘, d.h.
•„Verzweigen und Begrenzen“ (Branch and bound),
•„Uniform cost“ (bei Nilsson),
•„Dijkstra's Algorithmus“ (1959)
einen optimalen Weg

Verbesserungsmöglichkeiten:
Streichen aus OPEN (bzw. Succ(z)):
– Zustände aus CLOSED
– mehrmaliges Auftreten von Zuständen

Algorithmus A

Prinzip der Dynamischen Optimierung/Programmierung

A1- A3 : wie in Schema S‘

A4: (Organisation von OPEN)

– NEW(z):=Succ(z)-CLOSED

–$g'(z_0, z', G')$ für alle $z' \in$ NEW(z) berechnen (im aktuellen G´) .

–Neue Liste OPEN durch Einfügen der Elemente aus New(z):

OPEN $\cup$ NEW(z) sortieren nach aufsteigenden $g'(z_0, z', G')$

– Streichen von Wiederholungen in OPEN.

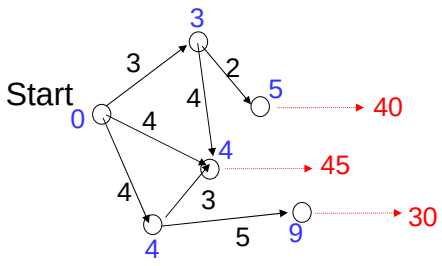
Goto S‘1.

Satz :

Vor.: Ex. $\delta > 0$ mit $c(z,z') > \delta$ f.a. z,z‘.

Beh.: Falls Lösung existiert, findet A einen optimalen Weg.

Heuristische Suche nach bestem Weg



$g'(z_0, z', G')$: bisher bekannte Kosten zum Erreichen von z´

$\sigma(z')$: geschätzte Kosten zum Erreichen des Ziels von z´ aus

Schema S“(heur.Suche nach „bestem Weg“)

Heuristische Suche mittels Bewertungsfunktion $\sigma(z)$

Erfolgsaussichten offener Zustände z

(bzw. $\sigma(z,G')$ bei Abhängigkeit vom konstruierten G')

(Es gilt stets $\sigma(z) = 0$ für Zielzustände z.)

Schema S“:

S“1- S“3 : wie in Schema S‘

S“4: (Organisation von OPEN)

$g'(z_0, z', G') + \sigma(z')$ für alle $z' \in Succ(z)$ berechnen

Neue Liste OPEN durch Einfügen der Elemente aus $Succ(z)$:

$OPEN \cup Succ(z)$ sortieren nach aufsteigendem $g'(z_0,z',G') + \sigma(z')$

Goto S“1.

Problem: Reihenfolge in OPEN abhängig von σ

Definition: $f(z) := Min \{ g(z, z_{final}) \mid z_{final} \in Z_{final} \}$

= tatsächliche minimale Kosten von z zu Zielzustand

($f(z_0)$ = Kosten des gesuchten optimalen Weges)

Schätzfunktion σ heisst *optimistisch* oder *Unterschätzung*,

falls $\sigma(z) \leq f(z)$ für alle $z \in Z$.

Satz :

Vor.: Ex. $\delta > 0$ mit $c(z,z') > \delta$ für alle z,z' .

σ ist optimistische Schätzfunktion

Beh.: Falls Lösung existiert, findet S“ einen optimalen Weg.

Bemerkungen:

Bedingung „Unterschätzung“ für σ nicht notwendig:

gleiche Reihenfolge wie $g' + \sigma$ liefern z.B. auch

$c_1 \cdot (g' + \sigma) + c_2$ für beliebige Konstanten c_1, c_2 .

$\sigma = 0$ ist ebenfalls Unterschätzung (vgl. Algorithmus A)

Optimale Reihenfolge bei $\sigma = f$

σ_2 *effektiver* als σ_1 falls $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq f$

(Hierarchien für Schätzfunktionen)

$g' = 0$: Suche nach irgendeinem Weg mit Heuristik σ

g' = Suchtiefe , $\sigma = 0$: Breitensuche

Bemerkungen

Verbesserungen analog Übergang von S“ nach A?

Verbesserungsmöglichkeiten:

Streichen aus OPEN (bzw. Succ(z)):

- Zustände aus CLOSED
- mehrmaliges Auftreten von Zuständen

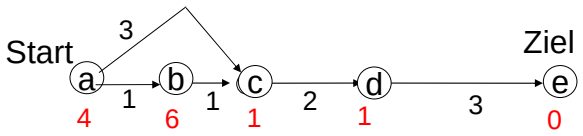
?

Solches Verfahren ist im allg. nicht korrekt!

Problem: **NEW(z):=Succ(z)-CLOSED**

Optimistisch (nicht konsistent – s.u.)

Streichen von Zuständen aus CLOSED führt evtl. zu falschem Ergebnis



$\sigma(z')$: geschätzte Kosten zum Erreichen des Ziels von z' aus

Algorithmus A* („weiche Form“)

A*0: (Start) Falls Anfangszustand z_0 ein Zielzustand: EXIT(„yes:“ z_0).
OPEN := $\{z_0\}$, CLOSED := {} .

A*1: (negative Abbruchbedingung) Falls OPEN = {} : EXIT(„no“).

A*2: (positive Abbruchbedingung)
Sei z erster Zustand aus OPEN. Falls z Zielknoten: EXIT(„yes:“ z).

A*3: (expandieren)
OPEN := OPEN - {z} . CLOSED := CLOSED $\cup\{z\}$.
Succ(z):= Menge der Nachfolger von z. Falls Succ(z)= {} : Goto A*1.

A*4: (Organisation von OPEN)

- $g'(z_0\, z',G')$, $\sigma(z')$ für alle $z' \in$ Succ(z) berechnen im aktuellen G'
- NEW(z) ergibt sich aus Succ(z) durch Streichen aller $z' \in$ CLOSED mit $g'(z_0, z',G') \geq g'(z_0\, z',G'_{alt})$
- Neue Liste OPEN durch Sortieren von OPEN$\cup$ New(z) nach aufsteigendem $g'(z_0, z',G')+ \sigma(z')$
- Bei mehrmaligem Auftreten eines z' in OPEN: alleVorkommen bis auf das mit minimalem $g'(z',G')$ streichen.

Goto A*1.

Algorithmus A* („weiche Form“)

A*0 - A*3 aus Algorithmus A übernommen.
Modifikation in A*4 (aber nicht bzgl. CLOSED).

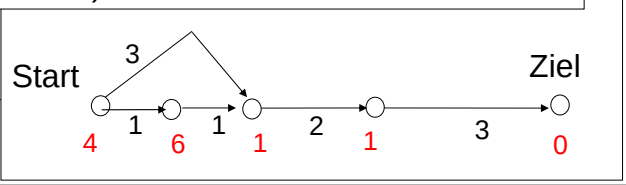
Satz :
Vor.: Ex. $\delta > 0$ mit $c(z,z') > \delta$ für alle z,z' .
σ ist optimistische Schätzfunktion
Beh.: Falls Lösung existiert, findet A* (weiche Form)
einen optimalen Weg.

Algorithmus A* („harte Form“)

Ziel: A4 ohne Modifikation übernehmen
(speziell: **NEW(z):=Succ(z)-CLOSED**)

Definition:
Die Schätzfunktion σ heißt *konsistent*,
falls für beliebige Zustände z', z'' gilt:
$\sigma(z') \leq g(z', z'') + \sigma(z'')$

Lemma: Wenn σ konsistent ist, so ist σ optimistisch.
(Umkehrung gilt i.a. nicht)



Algorithmus A* („harte Form“)

A*0: (Start) Falls Anfangszustand z_0 ein Zielzustand: EXIT(„yes:“ z_0).
OPEN := $\{z_0\}$, CLOSED := {} .
A*1: (negative Abbruchbedingung) Falls OPEN = {} : EXIT(„no“).
A*2: (positive Abbruchbedingung)
Sei z erster Zustand aus OPEN. Falls z Zielknoten: EXIT(„yes:“ z).
A*3: (expandieren)
OPEN := OPEN - {z} . CLOSED := CLOSED $\cup${z} .
Succ(z):= Menge der Nachfolger von z. Falls Succ(z)= {} : Goto A*1.
A*4: (Organisation von OPEN)

- NEW(z):=Succ(z)-CLOSED
- $g'(z_0, z', G')$, $f'(z')$ für alle $z' \in$NEW(z) berechnen (im aktuellen G') .
- Neue Liste OPEN durch Sortieren von OPEN$\cup$New(z) nach aufsteigendem $g'(z_0, z', G') + \sigma(z)$
- Bei mehrmaligem Auftreten eines z' in OPEN: alleVorkommen bis auf das mit minimalem $g'(z_0, z', G')$ streichen.

Goto A*1.

Algorithmus A* („harte Form“)

A*0 - A*4 analog Algorithmus A

Satz :
Vor.: Ex. $\delta > 0$ mit $c(z,z') > \delta$ für alle z,z' .
σ ist konsistente Schätzfunktion
Beh.: Falls Lösung existiert, findet A* (harte Form) einen optimalen Weg.

Eigentlicher Vorteil der „harten Form“:
Bessere Sortierung der Liste OPEN
– dadurch weniger Aufwand.
Ermöglicht durch bessere Schätzfunktion

Algorithmus A* („harte Form“)

Zum Beweis:

Lemma:

Vor.: σ ist konsistente Schätzfunktion.

Beh.: Für jedes $z' \in$ CLOSED ist bei A* (harte Form):
der optimale Weg konstruiert.

Lemma:

Vor.: σ ist konsistente Schätzfunktion.

Beh.: Solange A* noch nicht gestoppt hat, gilt für jeden optimalen Weg $z_0 \rightarrow z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow ... \rightarrow z_n = z$ zu einem Zielzustand z:

$\exists\, i \in \{1,..., n\}: \quad z_i \in$ OPEN $\wedge\ g'(z_i, G') + \sigma(z_i) \leq f(z_0)$

Algorithmus A*

Spezialfälle:

- $\sigma = 0$: Algorithmus A
- $g' = 0$: Suche nach irgendeinem Weg mit Heuristik σ
- $g' =$ Suchtiefe , $\sigma = 0$: Breitensuche
  (weitere Verfahren für andere σ)

Optimale Reihenfolge bei $\sigma = f$

σ_2 *effektiver* als σ_1 falls $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq f$
Hierarchien für (konsistente) Schätzfunktionen

Wichtungen für Einfluss von σ und g'
z.B. $c \cdot \sigma + (1 - c) \cdot g'$ mit $0 \leq c \leq 1$.

Algorithmus A*

Suchkosten ~ Zahl expandierter Zustände,
~ Berechnungskosten von σ und g'

Suchkosten vs. Lösungskosten
(optimale/suboptimale Lösungen)
Maß: „Penetranz“ := Weglänge/expandierte Knoten

Kombination von A* mit Tiefe-Zuerst (backtracking):
Iterative Deepening A* (IDA*)
mit Tiefenschranke gemäß $g'(z_0, z', G') + \sigma(z)$

Verwandt: Dynamische Optimierung/Programmierung

- Zustandsraum Z nicht notwendig diskret
- Diskreter Prozess als mehrstufiger Übergang:
  Anfangszustand z_1 zu Zielzustand z_n
- Kosten $g(z_1, z_2)$ für (gesamte) Überführung $z_1 \rightarrow z_2$ minimieren
- gesucht optimale „Strategie“ π
  - Strategie: Auswahl eines Operators (Zustandsübergang) abhängig vom Zustand
- Markov-Bedingung: Kosten lokal berechenbar
- Bellmannsches Prinzip:
  Wenn $z_1 \rightarrow_{op1} z_2 \rightarrow_{op2} z_3 \ldots \rightarrow_{opn} z_n$ optimal ist,
  so ist $z_2 \rightarrow_{op2} z_3 \ldots \rightarrow_{opn} z_n$ optimal

Suche in Parameter-Räumen

Parameter: n Variable $x_1,...,x_n$ mit Wertebereichen $W_1,...,W_n$
Optimalitätsfunktion $c(x_1,...,x_n)$
Gesucht:
$w = [w_1,...,w_n] \in W_1 \times ... \times W_n$ mit $c(w)$ minimal (bzw. maximal)
Verfahren:

- Gradienten-Verfahren/Steilster Abstieg (bzw. Anstieg)
- Evolutionäre/Genetische Algorithmen

Schrittweises Modifizieren von Parametersätzen

„Bergsteigen“- Probleme

- Vorgebirgsproblem
- Plateau-Problem
- Grat-Problem

Simulated Annealing:
Zunächst große Schritte, später kleine

Gradienten-Verfahren/Steilster Abstieg

- Als Suchverfahren:
  - Iteration mit geeigneten Schrittlängen $l > 0$
  - jeweils in Richtung steilster Abstieg (Gradient)
- Schrittlänge l abhängig von Entfernung zum Minimum

Evolutionäre/Genetische Algorithmen

Idee aus der Natur:

Vermehrung „aussichtsreicher“ Lösungskandidaten

Kombination:
- Kreuzung
- Mutation

– Bewertung:
- Fitness

– Auslese:
- gemäß Wahrscheinlichkeit ~ Fitness

Genetische Algorithmen:
Parameter-Raum = $\{0,1\}^n$

Evolutionäre Algorithmen:
Parameter-Raum = R^n

Charakteristika als Suchverfahren:
unterschiedliche Bereiche des Suchraums erfassen

Bionik

TU Berlin (Ingo Rechenberg)

http://lautaro.bionik.tu-berlin.de/institut/s2foshow/

Population, Individuum

Population: Menge von Individuen

Individuum: Durch Parametersatz beschrieben.

Genetische Algorithmen:
Parameter-Raum = $\{0,1\}^n$

Evolutionäre Algorithmen:
Parameter-Raum = R^n

Beschreibungsproblem:
Wahl geeigneter Parameter

Evolutionäre/Genetische Algorithmen

Mutation:
Veränderung von Werten im Individuum $w \in Population(t)$

Kombination („cross-over“): neues Individuum („Kind“) w'
aus mehreren Individuen („Eltern“) $w \in Population(t)$

Fitness: Nähe zu Optimalitätskriterium

Auswahl: Wahrscheinlichkeit gemäß Fitness

Viel Probieren (Problembeschreibung, Parameter, ...)

Evolutionäre/Genetische Algorithmen

„Artificial Life“: Golem-Projekt Cornell University

Evolutionäre/Genetische Algorithmen

Grundschema:

E1: (Start) t:=0, Population(0) := { $w_1(0)$,.., $w_k(0)$ }
Fitness(Population(t)) := { Fitness($w_1(t)$) ,.., Fitness($w_k(t)$) }

E2: (Abbruch)
Falls Fitness(Population(t)) „gut“: EXIT(Population(t))

E3: (Kombination, Mutation)
Population‘(t) = {$w'_1(t)$,.., $w'_{k'}(t)$ }
:= mutate (recombine (Population(t))

E4: (Bewertung)
Fitness(Population‘(t)) := { Fitness($w'_1(t)$) ,.., Fitness($w'_{k'}(t)$) }

E5: (Auswahl)
Population(t+1) = {$w_1(t+1)$,.., $w_k(t+1)$ }
:= select(Population‘(t), Fitness(Population‘(t)))
t := t+1 . Goto E2 .

Evolutionäre/Genetische Algorithmen

Karl Sims -- Virtual Creatures

Golem-Projekt Cornell University

Humboldt-Universität:
RoboCup-Projekt, z.B.
Omnidirektionales Laufen für AIBO