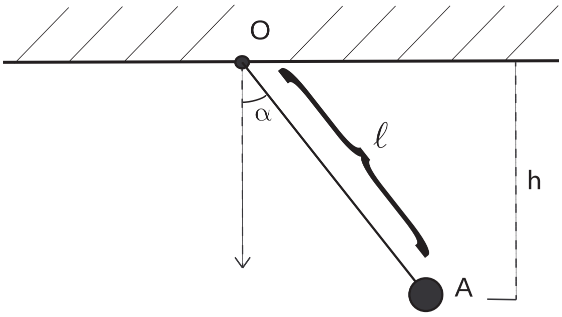
Simulation eines mathematischen Pendulums

Wir betrachten das folgende Modell eines Pendulums



- im Punkt A ist eine Punktmasse m angebracht;
- für die Höhe h gilt

$$h = l(1 - \cos(\alpha))$$

(vgl. „Potentielle Energie“);
- die Verbindung idt masselos, und die Reibung wird vernachlässigt;

Verallgemeinerte Koordinaten

Die Position des Pendulums läst sich eindeutig durch die Angabe des Winkels $\alpha(t)$ beschreiben.

Ebenenkoordinaten

Für die Position des Punktes A in Kartesischen Koordinaten gilt:

$$r_a(\alpha, t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \cdot \sin(\alpha) \\ l \cdot \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Potentielle Energie

$$E_{pot}(\alpha, t) = h \cdot F_g = h \cdot m \cdot g = l \cdot (1 - \cos(\alpha) \cdot m \cdot g)$$

denn

$$h = -\cos(\alpha)l + l = l(1 - \cos(\alpha))$$

Geschwindigkeitsvektoren

Der Geschwindigkeitsvektor des Punktes A beschreibt die Geschwindigkeit und die Bewegungsrichtung von A, und ist gegeben durch:

$$v(\dot{\alpha}, \alpha, t) = \frac{d}{dt}(r_a(\alpha, t)) = l \cdot \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} \cdot \sin(\alpha(t)) \\ \frac{d}{dt} \cdot \cos(\alpha(t)) \end{pmatrix} = l \cdot \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \cdot \cos(\alpha) \\ -\dot{\alpha} \cdot \sin(\alpha) \end{pmatrix} = l \cdot \dot{\alpha} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha) \end{pmatrix}}_{u(\alpha,t)}$$

Kinetische Energie

$$E_{kin}(\dot{\alpha}, \alpha, t) = \frac{1}{2}\left(m \cdot ||v(\dot{\alpha}, \alpha, t)||^2\right) = \frac{1}{2}\left(m \cdot l^2 \cdot \dot{\alpha}^2 \underbrace{||u(\alpha, t)||^2}_{1}\right) = \frac{1}{2} m \cdot l^2 \dot{\alpha}^2$$

Lagrange-Funktion

$$L(\dot{\alpha}, \alpha, t) = E_{kin}(\dot{\alpha}, \alpha, t) - E_{pot}(\alpha, t) = \frac{1}{2} m \cdot l^2 \dot{\alpha}^2 - l \cdot (1 - \cos(\alpha) \cdot m \cdot g)$$

Euler-Lagrange

Nun stellen wir die Euler-Lagrange Gleichung:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

In unserem Fall gilt:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} = m \cdot l^2 \cdot 2\dot{\alpha} \cdot \frac{1}{2} = m \cdot l^2 \cdot \dot{\alpha}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{\partial L}{\partial \alpha} = -\sin(\alpha) \cdot l \cdot m \cdot g$$

und damit

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = \frac{d}{dt}\left(m \cdot l^2 \cdot \dot{\alpha}\right) = m \cdot l^2 \cdot \ddot{\alpha}$$

Mit Euler-Lagrange-Gleichung folgt dann

$$m \cdot l^2 \cdot \ddot{\alpha}(t) + \sin(\alpha(t)) \cdot l \cdot m \cdot g = 0$$

$$\Leftrightarrow l \cdot \ddot{\alpha}(t) = -g \cdot \sin(\alpha(t))$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\alpha}(t) = -\frac{g}{l} \cdot \sin(\alpha(t))$$

GDGL 1-ter Ordnung aufstellen

Nun haben ein GDGL 2-ter Ordnung erhalten. Setze also

$$y_0(t) := \alpha(t)$$
$$y_1(t) := \dot{\alpha}(t)$$

dann ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \dot{y}_0(t) &= y_1(t) \\ \dot{y}_1(t) &= -\frac{g}{l} \cdot \sin(y_0(t)) \end{aligned}$$