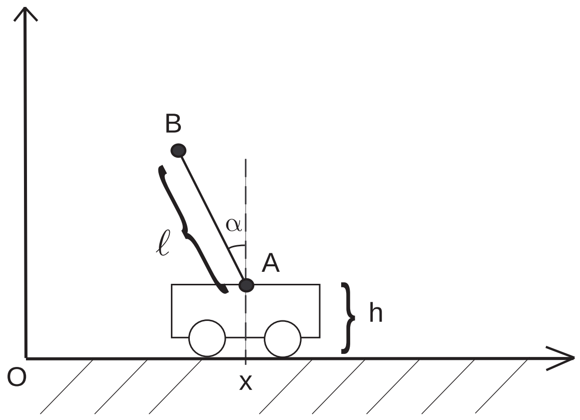
Simulation eines invertierten Pendulums

Wir betrachten das folgende Modell eines invertierten Pendulums



- in den Punkten A und B sind jeweils Punktmassen m und M angebracht (m ist die Masse des Pendel-Kopfs, und M des Waagens);
- die Höhe h (sowie die Höhe des Masseschwehrpunktes des Waagens) ist für unsere Betrachtungen irrelevant (warum?) daher oBdA. $h = 0$;
- die Verbindung ist masselos, und die Reibung wird vernachlässigt;

Verallgemeinerte Koordinaten

Der Zustand des invertierten Pendels lässt sich durch die Angaben der Position $x(t)$ und des Winkels $\alpha(t)$ vollständig beschreiben. Setze also

$$q := (x, \alpha).$$

Ebenenkoordinaten

Für die Position des Punktes A in Kartesischen Koordinaten gilt:

$$r_a(q,t) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

für den Punkt B gilt:

$$r_b(q,t) = r_a(q,t) + \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ l \end{pmatrix} = r_a(q,t) + l \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Potentielle Energie

$$E_{pot}(q,t) = g \cdot M \cdot 0 + g \cdot ml \cdot \cos(\alpha) = g \cdot ml \cdot \cos(\alpha)$$

Geschwindigkeitsvektoren

Der Geschwindigkeitsvektor des Punktes A beschreibt die Geschwindigkeit und die Bewegungsrichtung von A, und ist gegeben durch:

$$v_a(\dot{q}, q, t) = \frac{d}{dt}(r_a(q,t)) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

und analog dazu

$$v_b(\dot{q}, q, t) = \frac{d}{dt}(r_b(q,t)) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \end{pmatrix} + l \cdot \dot{\alpha} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -\cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha) \end{pmatrix}}_{-u(q,t)}$$

Kinetische Energie

$$E_{kin}(\dot{q},q,t) = \frac{1}{2}\left(M\cdot||v_a(\dot{q},q,t)||^2\right)+\frac{1}{2}\left(m\cdot||v_b(\dot{q},q,t)||^2\right) = \frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\cdot||v_a(\dot{q},q,t)-l\cdot\dot{\alpha}\cdot u(q,t)||^2 =$$

$$= \frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}m||v_a(\dot{q},q,t)||^2+l^2\cdot\dot{\alpha}^2\underbrace{||u(q,t)||^2}_{1}-2l\cdot\dot{\alpha}\cdot\langle r_a(\alpha,t),u(q,t)\rangle$$

$$= \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2+\frac{1}{2}m(l^2\cdot\dot{\alpha}^2-2l\cdot\dot{\alpha}\cdot\dot{x}\cos(\alpha))$$

Lagrange-Funktion

$$L(\dot{q},q,t) = E_{kin}(\dot{q},q,t)-E_{pot}(q,t) = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2+\frac{1}{2}m(l^2\cdot\dot{\alpha}^2-2l\cdot\dot{\alpha}\cdot\dot{x}\cos(\alpha))-g\cdot ml\cdot\cos(\alpha)$$

Euler-Lagrange

Nun stellen wir die Euler-Lagrange Gleichungen:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0$$

Betrachte zunächst den Fall $q_j = x$:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{x}} = (M+m)\dot{x}-ml\cdot\dot{\alpha}\cdot\cos(\alpha)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=0$$

und schließlich

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right) = (M+m)\ddot{x}-ml\cdot\ddot{\alpha}\cdot\cos(\alpha)+ml\cdot\dot{\alpha}^2\cdot\sin(\alpha)$$

Mit Euler-Lagrange-Gleichung folgt dann

$$(M+m)\ddot{x}-ml\cdot\ddot{\alpha}\cdot\cos(\alpha)+ml\cdot\dot{\alpha}^2\cdot\sin(\alpha)=0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} = \underbrace{\frac{m}{M+m}}_{\kappa}l(\ddot{\alpha}\cdot\cos(\alpha)-\dot{\alpha}^2\cdot\sin(\alpha))$$

Betrachte nun den Fall $q_j = \alpha$:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\alpha}} = m(l^2\cdot\dot{\alpha}-l\cdot\dot{x}\cos(\alpha))$$

$$\frac{\partial L}{\partial\alpha} = ml\cdot\dot{\alpha}\cdot\dot{x}\sin(\alpha)+g\cdot ml\cdot\sin(\alpha)$$

und damit

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\alpha}}\right) = m(l^2\cdot\ddot{\alpha}-l\cdot\ddot{x}\cos(\alpha)+l\cdot\dot{x}\dot{\alpha}\sin(\alpha))$$

Mit Euler-Lagrange-Gleichung folgt auch hier:

$$m(l^2\cdot\ddot{\alpha}-l\cdot\ddot{x}\cos(\alpha)+l\cdot\dot{x}\dot{\alpha}\sin(\alpha)) = ml\cdot\dot{\alpha}\cdot\dot{x}\sin(\alpha)+g\cdot ml\cdot\sin(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow ml^2\cdot\ddot{\alpha} = ml\cdot\dot{\alpha}\cdot\dot{x}\sin(\alpha)-ml\cdot\dot{x}\dot{\alpha}\sin(\alpha)+ml\cdot\ddot{x}\cos(\alpha)+g\cdot ml\cdot\sin(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\alpha} = \frac{1}{l}\ddot{x}\cos(\alpha)+\frac{g}{l}\cdot\sin(\alpha)$$

GDGL 1-ter Ordnung aufstellen

Dazu lösen wir zunächst das Gleichungssystem nach $\ddot{x}$ und $\ddot{\alpha}$ so auf, dass keine Ableitung zweiter Ordnung auf der rechten Seite vorkommt. Einsätzen der Formel für $\ddot{\alpha}$ in die Formel für $\ddot{x}$ ergibt zunächst:

$$\ddot{x} = \kappa l \left(\left(\frac{1}{l} \ddot{x} \cos(\alpha) + \frac{g}{l} \cdot \sin(\alpha) \right) \cdot \cos(\alpha) - \dot{\alpha}^2 \cdot \sin(\alpha) \right)$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x}(1 - \kappa \cos^2(\alpha)) = \kappa(g \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - \dot{\alpha}^2 \cdot \sin(\alpha))$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} = \frac{\kappa(g \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - \dot{\alpha}^2 \cdot \sin(\alpha))}{(1 - \kappa \cos^2(\alpha))}$$

Nun setzen wir diesen Thern in die Formel für $\ddot{\alpha}$ ein und erhalten

$$\ddot{\alpha} = \frac{\cos(\alpha)\sin(\alpha)\kappa(g \cdot \cos(\alpha) - \dot{\alpha}^2)}{l(1 - \kappa \cos^2(\alpha))} + \frac{g}{l} \cdot \sin(\alpha)$$

Nun haben ein GDGL 2-ter Ordnung erhalten. Setze also

$$\begin{aligned} y_0(t) &:= x(t) \\ y_1(t) &:= \dot{x}(t) \\ y_2(t) &:= \alpha(t) \\ y_3(t) &:= \dot{\alpha}(t) \end{aligned}$$

dann ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \dot{y}_0(t) &= y_1(t) \\ \dot{y}_1(t) &= \frac{\kappa \sin(y_2(t)) \cdot (g \cdot \cos(y_2(t)) - y_3(t)^2)}{(1 - \kappa \cos^2(y_2(t)))} \\ \dot{y}_2(t) &= y_3(t) \\ \dot{y}_3(t) &= \frac{\cos(y_2(t))\sin(y_2(t))\kappa \cdot (g \cdot \cos(y_2(t)) - y_3(t)^2)}{l(1 - \kappa \cos^2(y_2(t)))} + \frac{g}{l} \cdot \sin(y_2(t)) \end{aligned}$$