Grundlagen (Mathematik)

Abbildung:

$$f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x = (x_1, ..., x_m)^T \longmapsto \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_n(x) \end{pmatrix} =: f(x)$$

Partielle Ableitung:

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f_j(x + t \cdot e_i)$$

Beispiel:

$$f(x, y) := \begin{pmatrix} x + y \\ x^2 \cdot y \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f_1((x, y)^T + t \cdot (1, 0)^T) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f_1((x+t, y)^T) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (x+t+y) = [1]|_{t=0} = 1$$

analog folgt

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = 1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f_1((x+t, y)^T) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} ((x+t)^2 y) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (yx^2+2yxt+yt^2) = [2yx + 2yt]|_{t=0} = 2yx$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) = x^2.$$

Intuition: man leitet nach einer Variablen ab, die restlichen Variablen werden wie Konstanten behandelt;

Totale Ableitung:

$$Df(x) = J_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

Gewöhnliche Differentialgleichungen (GDGL)

$$\dot{x}(t) = F(x(t), t) \tag{1}$$

wobei

$$x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$$

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Bem.: für unsere Zwecke können wir annehmen, dass eine solche Gleichung immer eine Lösung besitzt
(im Allgemeinen muss die Funktion zusetzliche Bedingungen erfüllen).

Beispiel:

1. $\dot{x} = c \cdot x, \quad c = const;$
   $\Rightarrow x(t) = d \cdot e^{c \cdot t}, \quad d = const;$
2. $\dot{x} = c, \quad c = const;$

$$\int_0^t \dot{x}(s)ds = \int_0^t cds$$
$$[x(s)]_0^t = c \cdot [s]_0^t$$
$$x(t) = c \cdot t + x(0)$$

Bem.: die Lösung einer GDGL ist also nicht eindeutig, denn die Konstanten d bzw. $x(0)$ können beliebig gewählt werden, dadurch ergibt sich also eine Schar von Lösungen;

Anfangswertaufgaben (AWA)

Wir betrachten eine GDGL, und legen den Anfangswert $x(0)$ fest:

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x,t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Dieses Problem besizt also eine eindeutig bestimmte Lösung (vgl. GDGL).

Satz

Ein GDGL n-ter Ordnung, der Form

$$x^{(n)} = F(x^{(n-1)}, ..., \dot{x}, x, t)$$

lässt sich überführen in ein GDGL 1-ter Ordnung.

Bew.:

Setze

$$y_i := x^{(i)}, \quad i = 0, ..., n-1$$

dann gilt

$$\begin{aligned} \dot{y}_0 &= y_1 \\ \dot{y}_1 &= y_2 \\ &\vdots \\ \dot{y}_{n-2} &= y_{n-1} \\ \dot{y}_{n-1} &= F(y_{n-2}, y_{n-3}, ..., y_0, t) \end{aligned}$$

Wir erhalten also eine äquivalente GDGL

$$\dot{y} = \mathcal{F}(y,t),$$

mit

$$y = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

und

$$\mathcal{F}(y,t) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ F(y_{n-2}, y_{n-3}, ..., y_0, t) \end{pmatrix}$$

Beispiel

Betrachte die GDGL

$$\ddot{x} = c \cdot \sin(x(t))$$

Setze

$$\begin{aligned} y_0 &= x \\ x_1 &= \dot{x} \end{aligned}$$

dann gilt

$$\begin{aligned} \dot{y}_0 &= y_1 \\ y_1 &= c \cdot \sin(y_0) \end{aligned} \; .$$

Es ergibt sich also die GDGL

$$\dot{y} = F(y, t)$$

mit

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_0(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}, \quad F(y, t) = \begin{pmatrix} y_1 \\ c \cdot \sin(y_0) \end{pmatrix}$$

Identität von Euler

$$e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$$

Additionstheoreme

Schreibe

$$e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$$

und

$$e^{-it} = \cos(-t) + i \sin(-t) = \cos(t) - i \sin(t)$$

Addiere beide Gleichungen:

$$e^{it} + e^{-it} = 2\cos(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{it} + e^{-it}}{=} \cos(t)$$

Nun könne wir schreiben

$$e^{i(x+y)} = e^{ix} \cdot e^{iy} = (\cos(x) + i \sin(x)) \cdot (\cos(y) + i \sin(y))$$

$$= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) + i \cos(x)\sin(y) + i \sin(x)\cos(y)$$

und

$$e^{-i(x+y)} = e^{-ix} \cdot e^{-iy} = (\cos(x) - i \sin(x)) \cdot (\cos(y) - i \sin(y))$$

$$= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) - i \cos(x)\sin(y) - i \sin(x)\cos(y)$$

Addiere nun beide Gleichungen:

$$\Rightarrow e^{i(x+y)} + e^{-i(x+y)} = 2\cos(x)\cos(y) - 2\sin(x)\sin(y)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\cos(x+y)} = \frac{e^{i(x+y)} + e^{-i(x+y)}}{2} = \underline{\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)}$$

Analog dazu ergeben sich noch weitere Additionstheoreme:

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$

Norm

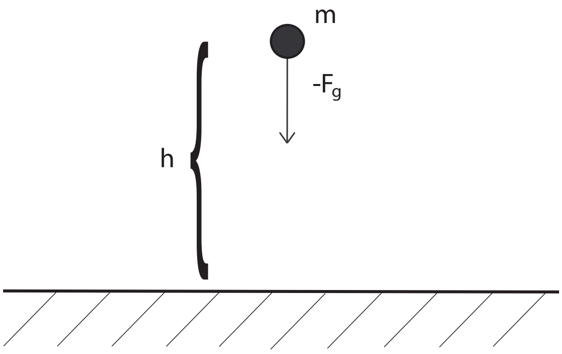
Bei allen unseren Betrachtungen benutzen wir die *Euklidische Norm*, oder die 2-Norm. Für ein $x \in \mathbb{R}^n$ ist die 2-Norm definiert durch:

$$||x|| := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$$

Grundlagen (Physik)

Größen:	
Masse:	m
Weg:	$s(t)$
Zeit:	t
Geschwindigleit:	$v(t) := \frac{ts}{dt}(t) = \dot{s}(t)$
Beschleunigung:	$a(t) := \frac{tv}{dt}(t) = \dot{v}(t)$
Kraft:(2-tes Newtonsche Gesetz)	$F(t) = m \cdot a(t)$
Erdbeschleunigung:	$g := 9,81 m/s^2$

Bsp.: (Freier Fall eines Massepunktes)



- $F_g = m \cdot g$;
- $\ddot{h}(t) = -g$;

  $$\Rightarrow h(t) = -gt^2 + \dot{h}(0)t + h(0)$$

  wobei $h(0)$ ist die Anfangshöhe, und $\dot{h}(0)$ die Anfangsgeschwindigeit;
- Übung: löse die GDGL $\ddot{h}(t) = -g$ und leite die oben beschriebene Formel für $h(t)$ her;

Potentielle Energie

Für potentielle Energie eines Massepunktes gilt:

$$E_{pot} = m \cdot g \cdot h \cdot \underbrace{\frac{R_p}{R_p + h}}_{\approx 1} \approx m \cdot g \cdot h.$$

Kinetische Energie (klassisch)

Für die kinetische Energie eines Massepunktes gilt

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Energieerhaltungssatz

In einem abgeschlossenen System gilt:

$$E_{kin} + E_{pot} = const$$

Lagrange-Funktion

Die Lagrange-Funktion ist definiert durch

$$L(\dot{q}, q, t) := E_{kin}(\dot{q}, q, t) - E_{pot}$$

wobei

$$E_{kin}(\dot{q}, q, t) := \frac{1}{2} \sum_{\lambda} m_\lambda \cdot ||v_\lambda(\dot{q}, q, t)||^2.$$

ist die kinetische Energie des gesamten Systems von Massepunktes.

$$v_\lambda(\dot{q}, q, t) := \frac{d}{dt}\left(r_\lambda(q,t)\right) = \frac{\partial r_\lambda}{\partial t} + \sum_{j=1}^{k} \dot{q}_j \frac{\partial r_\lambda}{\partial q_j}$$

ist der Geschwindigkeitsvekor am Punkt λ, wobei $r_\lambda(q,t)$ ist der Positionsvektor des Punktes λ (in kartesischen Koordinaten).
Bem.: es gilt

$$\frac{d}{dt}\left(r_\lambda(q,t)\right) = \left(\frac{\partial r_\lambda}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial r_\lambda}{\partial q_k}, \frac{\partial r_\lambda}{\partial t}\right) \cdot \begin{pmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{q}_k(t) \\ 1 \end{pmatrix} =: v_\lambda(\dot{q}, q, t)$$

zu beachten ist, dass die Einträge $\frac{\partial r_\lambda}{\partial q_j}$ vektoren sind, denn es gilt:

$$\frac{\partial r_\lambda}{\partial q_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r_\lambda^1}{\partial q_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial r_\lambda^n}{\partial q_j} \end{pmatrix}$$

wobei n ist die Dimension des Raumes in dem das System betrachtet wird (meisttens ist $n = 2$ oder $n = 3$).

Euler-Lagrange-Gleichung

Für die Lagrange-Funktion gilt die sogenante Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$