

# Einführung in die KI

Prof. Dr. sc. Hans-Dieter Burkhard  
Vorlesung Winter-Semester 2004/05

Ungenaues/Unsicheres/Unscharfes Wissen  
Probabilistisches Schließen  
Fuzzy-Theorie

## Ungenaues/Unsicheres/Unscharfes Wissen

- Ungenau (impräzise):
  - genau (präzise): *Blau.* 39,635 km.
  - ungenau (impräzise): *Blau oder grün.* Zwischen 39 und 40 km.
- Unsicher
  - sicher: *Bestimmt blau.* Ganz sicher 20 km.
  - unsicher: *Möglicherweise blau.* Vielleicht 50 km.
- Unscharf (vage)
  - scharf: *RGB=[20,5,230].* 130 277 km.
  - unscharf (vage): *Blau.* Ziemlich weit entfernt.

## Ungenaues/Unsicheres/Unscharfes Wissen

3 mögliche Dimensionen bei Aussagen:  
Genauigkeit - Sicherheit – Schärfe

Auch in Kombinationen:

- „vielleicht blau oder grün“
- „wahrscheinlich nicht teuer“

Weitere Begriffe:

- Zuverlässigkeit
- Vertrauenswürdigkeit
- Vermutung

Maßzahlen oft in Prozent:

- „70%ig vertrauenswürdig“
- „99%ig sicher“

## Ungenaues/Unsicheres/Unscharfes Wissen

Formalismen:

–Klassische Logik • wahr – falsch , {0,1}

–Mehrwertige Logiken • Werte zwischen 0 und 1 , z.B. {0, 1/2, 1} oder [0,1]

–Modale Logik: • unmöglich - möglich - sicher (notwendig)

–Wahrscheinlichkeitsrechnung • in 30% aller Fälle. • mit 90%er Sicherheit.

–Fuzzy-Logik • ziemlich richtig. • halb wahr. • stimmt zu 60%.

## Ungenaues Wissen

- genau (präzise): „Blau.“ „39,635 km.“
- ungenau (impräzise): „Blau oder grün.“ „Zwischen 39 und 40 km.“

Ungenaues Wissen beschreibbar durch Angabe aller Möglichkeiten, z.B.:

- Alternative: Farbe = blau  $\vee$  Farbe = grün
- Intervall: Entfernung  $\in$  [39,40]
- Vergleichsprädikate: Entfernung  $\geq$  39  $\wedge$  Entfernung  $\leq$  40

Behandlung mit Mitteln einer genauen Beschreibung.

Unsicherheit, Möglichkeit, Vertrauenswürdigkeit, ...

## Unsicheres Wissen

- sicher: „Bestimmt blau.“ „Ganz sicher 20 km.“
- unsicher: „Möglicherweise blau.“ „Vielleicht 50 km.“

Unterschied zu „ungenau“ :  
Nicht alle Möglichkeiten angegeben.

Formalisierungen:

- Modale Logik Unmöglich - möglich - sicher (notwendig)
- Quantifizierbare Möglichkeits-/Vertrauensgrade, Wahrscheinlichkeiten
  - Wahrscheinlichkeit eines Gewinns
  - „Regen mit 75%er Wahrscheinlichkeit“

## Unschärfes Wissen

Unschärfe, Vagheit, Unexaktheit

- scharf: „[0,0,255].“ „130 277 km.“
- unscharf (vage): „Blau.“ „Ziemlich weit entfernt.“

Formalismen mit scharfen Begriffen:

Klassische Logik: „wahr“/„falsch“.

Mengezugehörigkeit: „ja“/„nein“

Wahrscheinlichkeit: wie wahrscheinlich ist „Aussage H ist wahr“

Problem scharfer Grenzen:

- nah = 0...99 ?
- weit = 100...9999 ?
- sehr weit = 10000... ?

Wieviele Streichhölzer bilden einen Haufen?

H.D.Burkhard, HU Berlin Winter-Semester 2004/05 Vorlesung Einführung in die KI Ungenaues/Unsicheres/Unschärfes Wissen 7

## Behandlung von Unsicherheit

### Form des Umgangs mit unvollständigem Wissen

- Beschränkung auf bekannte Einflüsse
- Beschränkung auf (meistens) relevante Einflüsse
  - Effizienz
  - Rationalität
- Vergleich von Varianten

Beispiel: Medizinische Diagnose

Genauer betrachten:

- Konsequenzen aus unvollständigem Wissen
- Inkonsistente Verwendung im Alltag
- Probleme mit Statistiken

H.D.Burkhard, HU Berlin Winter-Semester 2004/05 Vorlesung Einführung in die KI Ungenaues/Unsicheres/Unschärfes Wissen 8

## Problematik subjektiver Angaben

*Linda ist 31 Jahre alt, sie lebt allein, ist offen, sehr begabt und Magister der Philosophie. Während ihres Studiums hat sie sich intensiv mit Fragen sozialer Gerechtigkeit und Diskriminierung befasst und auch an Anti-Atom-Demonstrationen teilgenommen.*

Wie glaubhaft (wie wahrscheinlich) sind die folgenden Aussagen:

1. Linda ist Kassiererin bei einer Bank.
2. Linda hat zwei Kinder.
3. Linda ist Kassiererin bei einer Bank und aktiv in der Frauenbewegung.
4. Linda ist geschieden.

H.D.Burkhard, HU Berlin Winter-Semester 2004/05 Vorlesung Einführung in die KI Ungenaues/Unsicheres/Unschärfes Wissen 9

## Problematik subjektiver Angaben

### Test von 2 Medikamenten A und B für Männer bzw. Frauen.

A M-besser als B bedeutet:  
Für Männer gilt: Die prozentuale Erfolgsquote von A ist grösser als die prozentuale Erfolgsquote von B.

A F-besser als B bedeutet:  
Für Frauen gilt: Die prozentuale Erfolgsquote von A ist grösser als die prozentuale Erfolgsquote von B.

A besser als B bedeutet:  
Insgesamt gilt: Die prozentuale Erfolgsquote von A ist grösser als die prozentuale Erfolgsquote von B.

Gilt die folgende Regel:

Wenn A M-besser als B und A F-besser als B, so A besser als B.

H.D.Burkhard, HU Berlin Winter-Semester 2004/05 Vorlesung Einführung in die KI Ungenaues/Unsicheres/Unschärfes Wissen 10

## Problematik subjektiver Angaben

### „Simpsons Paradox“

(Beispiel aus Richter: „Prinzipien der KI“, S. 198f)

	Medikament	Gesamt	Erfolg	Erfolg %
A M-besser als B :	A	200	20	<b>10</b>
	B	100	4	4
A F-besser als B :	A	40	20	<b>50</b>
	B	100	37	37
Nicht A besser als B:	A	240	40	16,6
	B	200	41	<b>20,5</b>

H.D.Burkhard, HU Berlin Winter-Semester 2004/05 Vorlesung Einführung in die KI Ungenaues/Unsicheres/Unschärfes Wissen 11

## Schließen in unsicheren Bereichen

- nicht alle Regeln sind absolut gültig
- nicht alle Fakten sind absolut verlässlich

Resultat: Unsicherheit von Schlussfolgerungen

(Un-)Sicherheits-, Vertrauens-, Evidenz-Werte für

- Fakten
  - Der Patient zeigt mit 90% Sicherheit das Symptom S.
- Regeln
  - Bei Symptom S hat der Patient mit 85% Wahrscheinlichkeit die Krankheit K.
  - Die Erfolgs-Chancen von Therapie T bei Krankheit K betragen 80% .

Was ist die Erfolgs-Wahrscheinlichkeit für Therapie T?

H.D.Burkhard, HU Berlin Winter-Semester 2004/05 Vorlesung Einführung in die KI Ungenaues/Unsicheres/Unschärfes Wissen 12

## Beispiel: Experten-System MYCIN

- Kombination von „measure of belief“ und „measure of disbelief“ (bzgl. eines Symptoms, einer Krankheit, einer Therapie)
- Veränderungen als Folge entsprechender Regelanwendungen

Regeln haben z.B. Form:

Bei Symptomen A und B

ist mit 70% Wahrscheinlichkeit auf Krankheit K zu schließen.

Bedeutet nicht: ... 30% Wahrscheinlichkeit für „nicht K“.

Die „70%“ beschreiben keinen absoluten Vertrauensgrad, sondern den „Zuwachs an Vertrauen“ in die Hypothese.

Probleme bei Interpretation und Abarbeitung (siehe Literatur)

## Schließen in unsicheren Bereichen

Der Patient zeigt mit 90% Sicherheit das Symptom S.

Bei Symptomen A und B

ist mit 70% Wahrscheinlichkeit auf Krankheit K zu schließen.

Die Erfolgs-Chancen von Therapie T bei Krankheit K betragen 80%, sofern keine Allergie auftritt.

Problem:

Propagierung/Verknüpfung unsicherer Werte.

Addition, Multiplikation, Maximum, Minimum, ... ?

Insgesamt 3 Quellen für unsichere Resultate:  
Fakten, Regeln, Inferenz.

## Wahrscheinlichkeiten

- Wahrscheinlichkeit, eine 6 zu würfeln: 16,7% bzw. 0,167
- Wahrscheinlichkeit für Niederschlag: 60 % bzw. 0,6

Zuverlässigkeit, Nützlichkeit, ...

Interpretationen:

- Statistische Deutung als Quotient:  
– Anzahl der günstigen Ereignisse / Anzahl aller Ereignisse
- Subjektive Unsicherheit  
– Maß für Überzeugtheit (Wettbereitschaft!)
- Physikalisch begründete Unsicherheit

## Wahrscheinlichkeiten als Zahlen aus [0,1]

- Wahrscheinlichkeit  $P(H)$  als Maßzahl für Sicherheit des Zutreffens einer Annahme H

Normierung:  $P(H) + P(\neg H) = 1$

H ist wahr oder falsch  
(klass.Logik)

- Wahrscheinlichkeiten  $P(X=x)$  als Maßzahl,

dass eine Zufallsvariable X einen Wert  $x \in W = \{x_1, \dots, x_n\}$  annimmt

Normierung:  $P(x_1) + \dots + P(x_n) = 1$

Konvention:  
X Variable, x Wert

- Wahrscheinlichkeiten  $P(X=x)$  als Maßzahl, dass ein Zufallsvektor

$\mathbf{x} = [X^{(1)}, \dots, X^{(N)}]$  einen Wert  $\mathbf{x} = [x^{(1)}, \dots, x^{(N)}] \in W^{(1)} \times \dots \times W^{(N)}$  annimmt

Normierung:  $\sum P(\mathbf{x}) = 1$

(hier: Diskrete Wahrscheinlichkeiten)

## Wahrscheinlichkeiten

- Wahrscheinlichkeiten ermitteln anhand von
  - Häufigkeitsabschätzungen
  - statistischen Auswertungen
  - anderen Wahrscheinlichkeiten (Bayessche Formel, Bayessche Netze)
- Wahrscheinlichkeitsberechnung verändert sich bei
  - zusätzlicher Information
  - weiteren Ereignissen

3-Türen-Beispiel

## Wahrscheinlichkeiten: Ereignis-Algebra

- $\Omega$ : Grundmenge der Elementarereignisse (Ereignis-Raum)
- $S$ : System von Ereignissen (Mengen) über  $\Omega$ .

S heißt Ereignis-Algebra, falls

- (1) S enthält  $\Omega$  (das sichere Ereignis) und  $\emptyset$  (das unmögliche Ereignis)
- (2) Falls  $A \in S$ , so auch  $\Omega - A \in S$ .
- (3) Falls  $A, B \in S$ , so auch  $A \cap B \in S$ ,  $A \cup B \in S$ .

S heißt  $\sigma$ -Algebra, falls außerdem

- (3') Falls  $A_1, A_2, A_3, \dots \in S$ , so auch  $\bigcap A_i \in S$ ,  $\bigcup A_i \in S$ .

## Kolmogorow-Axiome für Wahrscheinlichkeit P

S sei Ereignis-Algebra über endlichem Ereignis-Raum  $\Omega$

Axiom 1: P ist eine Funktion  $P : S \rightarrow [0,1]$

Axiom 2:  $P(\Omega) = 1$

Axiom 3: Für  $A, B \in S$  mit  $A \cap B = \emptyset$  gilt  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$   
(Additionsaxiom)

bzw. für  $\sigma$ -Algebra über unendlichen Ereignis-Raum  $\Omega$ :

Axiom 3':

Für  $A_1, A_2, A_3, \dots \in S$  mit  $A_i \cap A_j = \emptyset$  für alle  $i, j \in \mathbb{N}$  mit  $i \neq j$  gilt

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum P(A_i)$$

## Folgerungen aus Kolmogorow-Axiomen

Für beliebige  $A, B \in S$  gilt:

- $P(\Omega - A) = 1 - P(A)$
- $P(\emptyset) = 0$
- $A \subseteq B \rightarrow P(A) \leq P(B)$
- $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

Für  $A_1, \dots, A_n \in S$  mit  $A_i \cap A_j = \emptyset$  für alle  $i \neq j$  gilt:

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum P(A_i)$$

## Zufallsgrößen

- Zufallsvariable X kann Werte  $x \in W$  annehmen
- $P(x) = P(X=x)$ : Wahrscheinlichkeit für „Ereignis  $X=x$ “  
 $P(x) \in [0,1]$  (0% ... 100%)

• Verteilungsfunktion:  $F(x) = P(X \leq x)$

– für diskrete Zufallsgrößen:  $F(x) = \sum_{x' \leq x} P(x')$

– für stetige Zufallsgrößen:  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$   
 $f(u)$  heißt Dichte der Verteilung

• Normierung:  
 $\sum P(x) = 1$  bzw.  $\int_{-\infty}^{\infty} f(u) du = 1$

## Bedingte Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeit von A unter Bedingung, dass B eingetreten ist:

$$P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$$

- erfüllt Kolmogorow-Axiome
- Division durch  $P(B)$  zur Normierung,  
(Voraussetzung  $P(B) \neq 0$ )

$$\begin{aligned} \text{Produkt-Satz: } P(A \cap B) &= P(B) \cdot P(A|B) \\ &= P(A) \cdot P(B|A) \end{aligned}$$

A heißt (stochastisch) unabhängig von B (mit  $0 < P(B) < 1$ ), falls

$$P(A|B) = P(A)$$

gleichwertig:  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

wegen Symmetrie: „A, B voneinander (stochastisch) unabhängig“

## Bayesscher Satz/Bayessche Formel

Voraussetzung:  $B_1 \cup \dots \cup B_K = \Omega$  und  $B_i \cap B_j = \emptyset$  für alle  $i \neq j$

Satz über Totale Wahrscheinlichkeit:

$$P(A) = \sum_{k=1, \dots, K} P(B_k) \cdot P(A|B_k)$$

Bayesscher Satz/Bayessche Formel:

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k) \cdot P(A|B_k)}{P(A)} = \frac{P(B_k) \cdot P(A|B_k)}{\sum_{k=1, \dots, K} P(B_k) \cdot P(A|B_k)}$$

## Schließen auf „a-posteriori-Wahrsch.“

Satz von Bayes:

$$P(\text{Ursache} | \text{Symptom}) = \frac{P(\text{Ursache}) \cdot P(\text{Symptom} | \text{Ursache})}{P(\text{Symptom})}$$

Beispiel:

$$P(\text{Bronchitis}) = 0,05$$

$$P(\text{Husten}) = 0,2$$

$$P(\text{Husten} | \text{Bronchitis}) = 0,8$$

damit:

$$P(\text{Bronchitis} | \text{Husten}) = 0,2$$

## Mehrere Symptome $S_1, \dots, S_n$

$$P(U | S_1 \& \dots \& S_n) = \frac{P(U) \cdot P(S_1 \& \dots \& S_n | U)}{P(S_1 \& \dots \& S_n)}$$

**Idealisierung** („bedingte Unabhängigkeit gegeben U“):  
Unabhängigkeit der Symptome *beim Auftreten von U*

$$P(S_1 \& \dots \& S_n | U) = P(S_1 | U) \cdot \dots \cdot P(S_n | U)$$

(nicht verlangt:  $P(S_1 \& \dots \& S_n) = P(S_1) \cdot \dots \cdot P(S_n)$ , d.h.  
Symptome können untereinander abhängig sein)

**Vereinfachter Bayesscher Satz:**

$$P(U | S_1 \& \dots \& S_n) = \frac{P(U) \cdot P(S_1 | U) \cdot \dots \cdot P(S_n | U)}{P(S_1 \& \dots \& S_n)}$$

## Schließen auf „a-posteriori-Wahrsch.“

**Vereinfachter Bayesscher Satz:**

$$P(U | S_1 \& \dots \& S_n) = \frac{P(U) \cdot P(S_1 | U) \cdot \dots \cdot P(S_n | U)}{P(S_1 \& \dots \& S_n)}$$

Die **a-posteriori-Wahrscheinlichkeit**  $P(U | S_1 \& \dots \& S_n)$  für U nach Beobachten der Symptome  $S_1 \dots S_n$  ist berechenbar aus

- der a-priori-Wahrscheinlichkeit  $P(U)$ ,
- den Wahrscheinlichkeiten  $P(S_i | U)$  für das Auftreten des Symptoms  $S_i$  bei der Ursache U
- der Wahrscheinlichkeit  $P(S_1 \& \dots \& S_n)$ .

Wahrscheinlichkeiten sind statistischen Messungen zu entnehmen.

## Mehrere Ursachen (Diagnosen) $U_i$

Relative Wahrscheinlichkeiten:

$$P(U_i | S_1 \& \dots \& S_n) = \frac{P(U_i) \cdot P(S_1 | U_i) \cdot \dots \cdot P(S_n | U_i)}{\sum_{k=1..K} P(U_k) \cdot P(S_1 | U_k) \cdot \dots \cdot P(S_n | U_k)}$$

**Relative a-posteriori-Wahrscheinlichkeit**  $P(U_i | S_1 \& \dots \& S_n)$  für  $U_i$  nach Beobachten der Symptome  $S_1 \dots S_n$  ist berechenbar aus

- a-priori-Wahrscheinlichkeiten  $P(U_k)$  der möglichen Ursachen  $U_k$ ,
- Wahrscheinlichkeiten  $P(S_i | U_k)$  für das Auftreten der Symptome  $S_i$  bei der Ursache  $U_k$ .

Wahrscheinlichkeiten sind statistischen Messungen zu entnehmen.

## Normalisierung

$$P(U | S_1 \& \dots \& S_n) = \frac{P(U) \cdot P(S_1 | U) \cdot \dots \cdot P(S_n | U)}{P(S_1 \& \dots \& S_n)}$$

Die Nenner in den

Formeln dienen

jeweils der

$$P(U_i | S_1 \& \dots \& S_n) = \frac{P(U_i) \cdot P(S_1 | U_i) \cdot \dots \cdot P(S_n | U_i)}{\sum_{k=1..K} P(U_k) \cdot P(S_1 | U_k) \cdot \dots \cdot P(S_n | U_k)}$$

Normierung auf den Wert 1 für Gesamtwahrscheinlichkeit.

Alternative Schreibweisen:

$$P(U | S_1 \& \dots \& S_n) = \alpha \cdot P(U) \cdot P(S_1 | U) \cdot \dots \cdot P(S_n | U)$$

$$P(U_i | S_1 \& \dots \& S_n) = \beta \cdot P(U_i) \cdot P(S_1 | U_i) \cdot \dots \cdot P(S_n | U_i)$$

mit Normalisierungsfaktoren  $\alpha, \beta$

$\alpha, \beta$  können nach Bestimmung der anderen Werte ermittelt werden (praktisches Vorgehen).

## Anwendungen

$$P(U_i | S_1 \& \dots \& S_n) = \frac{P(U_i) \cdot P(S_1 | U_i) \cdot \dots \cdot P(S_n | U_i)}{\sum_{k=1..K} P(U_k) \cdot P(S_1 | U_k) \cdot \dots \cdot P(S_n | U_k)}$$

– Entscheidung für wahrscheinlichste Ursache/Diagnose  $U_i$   
(oder: Alternativen anbieten)

– **Entscheidungstheorie:**

– Kosten/Nutzen einbeziehen

– Nützlichkeit („Utility“) optimieren

$$\text{Utility(Aktion)} = \text{Nutzen(Aktion)} \cdot P(\text{Erfolg der Aktion})$$

## Schließen auf „a-posteriori-Wahrsch.“

Generelle Problematik:

- Voraussetzungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind schwer zu erfüllen (z.B. unabhängige Symptome).
- a-priori-Wahrscheinlichkeiten werden benötigt. Ersatz durch (subjektive) Schätzung problematisch, insbesondere keine Vergleichbarkeit der Maßstäbe.
- Unübersichtlichkeit von Regelnwendungen bei regelbasierten Systemen.  
(Genauere Analyse mit Bayesschen Netzen).

## Diskrete Zufallsvektoren

Systemzustand  $\mathbf{x}$  beschrieben durch Vektor  $\mathbf{x} = [x^{(1)}, \dots, x^{(N)}]$

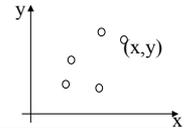
Wahrscheinlichkeit für Zustand  $\mathbf{x}$ :  $P(x^{(1)}, \dots, x^{(N)})$

Ursache	U	mit Werten	$u_1, \dots, u_k$
Symptom	$S^1$	mit Werten	$s^1_1, \dots, s^1_{m1}$
Symptom	$S^2$	mit Werten	$s^2_1, \dots, s^2_{m2}$
	...		
Symptom	$S^n$	mit Werten	$s^n_1, \dots, s^n_{mn}$

Vollständige Beschreibung der Wahrscheinlichkeiten benötigt

Anz( $W^{(1)}$ ) · ... · Anz( $W^{(N)}$ ) Werte (N-dimensionale Matrix)

## Diskrete Zufallsvektoren



• Zufallsvektor  $\mathbf{X} = [X^{(1)}, \dots, X^{(N)}]$

kann Werte  $\mathbf{x} = [x^{(1)}, \dots, x^{(N)}] \in W^{(1)} \times \dots \times W^{(N)}$  annehmen

•  $P(\mathbf{x}) = P(x^{(1)}, \dots, x^{(N)}) := P(\mathbf{X} = \mathbf{x})$ :

Wahrscheinlichkeit für „Ereignis  $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ “

• Verteilungsfunktion:

$$F(x^{(1)}, \dots, x^{(N)}) = P(X^{(1)} < x^{(1)}, \dots, X^{(N)} < x^{(N)})$$

## Diskrete Zufallsvektoren

Vollständige Beschreibung der Wahrscheinlichkeiten eines Zufallsvektors  $\mathbf{X} = [X^{(1)}, \dots, X^{(N)}]$  durch N-dimensionale Matrix.

Beispiel:  $X^{(1)}$ = Größe  $X^{(2)}$ = Gewicht (Angaben in %)

	40kg	50kg	60kg	70kg	80kg	90kg	100kg	$\Sigma$
150cm	3	3	2	1	0	0	0	9
160cm	2	3	6	5	3	0	0	19
170cm	3	2	7	7	6	1	0	26
180cm	0	0	3	8	9	7	2	29
190cm	0	0	0	6	6	2	3	17
$\Sigma$	8	8	18	27	24	10	5	100

## Diskrete Zufallsvektoren

Schlußfolgerungen, Kombinationsmöglichkeiten anhand gegebener Wahrscheinlichkeiten (N-dimensionale Matrix für Zufallsvektor  $\mathbf{X} = [X^{(1)}, \dots, X^{(N)}]$ ):

- für Alternativen
- für bedingte Wahrscheinlichkeiten
- für Wahrscheinlichkeit bzgl einer/mehrerer Dimensionen

$$P(180\text{cm})$$

$$P(\text{Größe} > 180\text{cm})$$

$$P(\text{„Größe} - 100 < \text{Gewicht“})$$

## Randverteilung für eine Komponente $X^{(i)}$

Randverteilung für i-te Komponente  $X^{(i)}$ :

Wahrscheinlichkeit, dass  $X^{(i)}$  den Wert  $x^{(i)}$  annimmt

$$P(x^{(i)}) = P(X^{(i)} = x^{(i)}) = \sum \{ P(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x}^{(i)} = x^{(i)} \}$$

(als Projektion:

Summierung über (N-1)-dim. „Reihe“ der N-dim. Matrix)

	40kg	50kg	60kg	70kg	80kg	90kg	100kg	$\Sigma$
150cm	3	3	2	1	0	0	0	9
160cm	2	3	6	5	3	0	0	19
170cm	3	2	7	7	6	1	0	26
180cm	0	0	3	8	9	7	2	29
190cm	0	0	0	6	6	2	3	17
$\Sigma$	8	8	18	27	24	10	5	100

## Randverteilung für eine Komponente $X^{(i)}$

• Die Komponenten  $X^{(1)}, \dots, X^{(N)}$  heißen *unabhängig*, falls

$$P(x^{(1)}, \dots, x^{(N)}) = P(x^{(1)}) \cdot \dots \cdot P(x^{(N)})$$

Vollständige Beschreibung der Wahrscheinlichkeiten benötigt bei Unabhängigkeit nur noch

Anz( $W^{(1)}$ ) + ... + Anz( $W^{(N)}$ ) Werte

	40kg	50kg	60kg	70kg	80kg	90kg	100kg	$\Sigma$
150cm	3	3	2	1	0	0	0	9
160cm	2	3	6	5	3	0	0	19
170cm	3	2	7	7	6	1	0	26
180cm	0	0	3	8	9	7	2	29
190cm	0	0	0	6	6	2	3	17
$\Sigma$	8	8	18	27	24	10	5	100

Nicht  
unabhängig

## Urnenbeispiel 1

In einer Urne sind 2 weiße Kugeln ( $w_1, w_2$ ) und 3 rote Kugeln ( $r_1, r_2, r_3$ ). Es wird eine Kugel gezogen. Danach wird diese zurückgelegt, und eine erneut Kugel wird gezogen.

$P(k_1, k_2)$  = Wahrscheinlichkeit( 1.Kugel= $k_1$ , 2.Kugel= $k_2$ )

	w1	w2	r1	r2	r3
w1					
w2					
r1					
r2					
r3					

## Urnenbeispiel 1

In einer Urne sind 2 weiße Kugeln ( $w_1, w_2$ ) und 3 rote Kugeln ( $r_1, r_2, r_3$ ). Es wird eine Kugel gezogen. Danach wird diese zurückgelegt, und eine erneut Kugel wird gezogen.

$P(k_1, k_2)$  = Wahrscheinlichkeit( 1.Kugel= $k_1$ , 2.Kugel= $k_2$ )

	w1	w2	r1	r2	r3
w1	1/25	1/25	1/25	1/25	1/25
w2	1/25	1/25	1/25	1/25	1/25
r1	1/25	1/25	1/25	1/25	1/25
r2	1/25	1/25	1/25	1/25	1/25
r3	1/25	1/25	1/25	1/25	1/25

## Randverteilungen $P(k_1)$ , $P(k_2)$

	w1	w2	r1	r2	r3	
w1	1/25	1/25	1/25	1/25	1/25	1/5
w2	1/25	1/25	1/25	1/25	1/25	1/5
r1	1/25	1/25	1/25	1/25	1/25	1/5
r2	1/25	1/25	1/25	1/25	1/25	1/5
r3	1/25	1/25	1/25	1/25	1/25	1/5
	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5	

$K_1$  und  $K_2$  sind unabhängig:  $P(k_1, k_2) = P(k_1) \cdot P(k_2)$

## Urnenbeispiel 2

In einer Urne sind 2 weiße Kugeln ( $w_1, w_2$ ) und 3 rote Kugeln ( $r_1, r_2, r_3$ ). Es wird eine Kugel gezogen. Danach wird diese **nicht** zurückgelegt, und eine **weitere** Kugel wird gezogen.

$P(k_1, k_2)$  = Wahrscheinlichkeit (1.Kugel= $k_1$ , 2.Kugel= $k_2$ )

	w1	w2	r1	r2	r3
w1					
w2					
r1					
r2					
r3					

## Urnenbeispiel 1

In einer Urne sind 2 weiße Kugeln ( $w_1, w_2$ ) und 3 rote Kugeln ( $r_1, r_2, r_3$ ). Es wird eine Kugel gezogen. Danach wird diese **nicht** zurückgelegt, und eine **weitere** Kugel wird gezogen.

$P(k_1, k_2)$  = Wahrscheinlichkeit (1.Kugel= $k_1$ , 2.Kugel= $k_2$ )

	w1	w2	r1	r2	r3
w1	0	1/20	1/20	1/20	1/20
w2	1/20	0	1/20	1/20	1/20
r1	1/20	1/20	0	1/20	1/20
r2	1/20	1/20	1/20	0	1/20
r3	1/20	1/20	1/20	1/20	0

## Randverteilungen $P(k_1)$ , $P(k_2)$

	w1	w2	r1	r2	r3	
w1	0	1/20	1/20	1/20	1/20	1/5
w2	1/20	0	1/20	1/20	1/20	1/5
r1	1/20	1/20	0	1/20	1/20	1/5
r2	1/20	1/20	1/20	0	1/20	1/5
r3	1/20	1/20	1/20	1/20	0	1/5
	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5	

$K_1$  und  $K_2$  sind abhängig:  $P(k_1, k_2) \neq P(k_1) \cdot P(k_2)$

## Randverteilung für mehrere Komponenten

Randverteilung für  $\mathbf{Y}=[Y^{(1)}, \dots, Y^{(M)}] \subseteq \mathbf{X}$ :

Wahrscheinlichkeit, dass  $\mathbf{Y}$  den Wert  $\mathbf{y}=[y^{(1)}, \dots, y^{(M)}]$  annimmt:

$$P(\mathbf{y}) = P(\mathbf{Y} = \mathbf{y}) = \sum \{ P(\mathbf{x}) \mid \text{Proj}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}) = \mathbf{y} \}$$

(als Projektion:

Summierung über (N-M)-dim. „Reihe“ der N-dim. Matrix)

## Randverteilung für mehrere Komponenten

• Bedingte Wahrscheinlichkeiten:

$$P(\mathbf{u} \mid \mathbf{v}) = P(\mathbf{u}, \mathbf{v}) / P(\mathbf{v}) \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v} \subseteq \mathbf{x})$$

(Normierte Summierung  
über Projektion in „v-wertiger Teil-Matrix“)

	40kg	50kg	60kg	70kg	80kg	90kg	100kg	$\Sigma$
150cm	3	3	2	1	0	0	0	9
160cm	2	3	6	5	3	0	0	19
170cm	3	2	7	7	6	1	0	26
180cm	0	0	3	8	9	7	2	29
190cm	0	0	0	6	6	2	3	17
$\Sigma$	8	8	18	27	24	10	5	100

$$P(60\text{kg} \mid 160\text{cm}) = 6 / 19$$

## Verbundene Wahrscheinlichkeiten

Es gilt allgemein

$$P(a, b) = P(a \mid b) \cdot P(b)$$

$$P(x^{(1)}, \dots, x^{(N)})$$

$$= P(x^{(N)} \mid x^{(N-1)}, \dots, x^{(1)}) \cdot P(x^{(N-1)}, \dots, x^{(1)})$$

$$= P(x^{(N)} \mid x^{(N-1)}, \dots, x^{(1)}) \cdot P(x^{(N-1)} \mid x^{(N-2)}, \dots, x^{(1)}) \cdot P(x^{(N-2)}, \dots, x^{(1)})$$

$$= P(x^{(N)} \mid x^{(N-1)}, \dots, x^{(1)}) \cdot P(x^{(N-1)} \mid x^{(N-2)}, \dots, x^{(1)}) \cdot \dots \cdot P(x^{(2)} \mid x^{(1)}) \cdot P(x^{(1)})$$

$$= \prod_{i=1, \dots, N} P(x^{(i)} \mid x^{(i-1)}, \dots, x^{(1)})$$

• Berechnung von  $P(x^{(1)}, \dots, x^{(N)})$  für beliebige  $x^{(1)}, \dots, x^{(N)}$

• Für jede Reihenfolge der Variablen darstellbar.

## Verbundene Wahrscheinlichkeiten

In einer Urne sind 2 weiße Kugeln ( $w_1, w_2$ ) und 3 rote Kugeln ( $r_1, r_2, r_3$ ). Es werden nacheinander 4 Kugeln A, B, C, D gezogen.

$$P(A=r_3, B=w_1, C=r_1, D=w_2)$$

$$= P(D=w_2 \mid A=r_3, B=w_1, C=r_1) \cdot P(A=r_3, B=w_1, C=r_1)$$

$$= P(D=w_2 \mid A=r_3, B=w_1, C=r_1) \cdot P(C=r_1 \mid A=r_3, B=w_1) \cdot P(A=r_3, B=w_1)$$

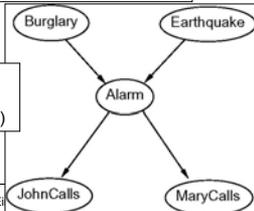
$$= P(D=w_2 \mid A=r_3, B=w_1, C=r_1) \cdot P(C=r_1 \mid A=r_3, B=w_1) \cdot P(B=w_1 \mid A=r_3) \cdot P(A=r_3)$$

## Bayessche Netze

probabilistic networks, belief networks,  
causal networks, knowledge maps, ...

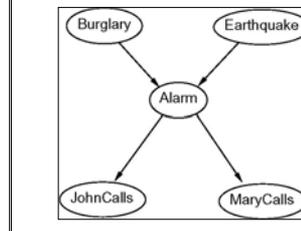
• Darstellung der direkten Abhängigkeiten  
von *Bedingungen*  
durch gerichteten zyklensfreien Graph.

Beispiele aus  
Russell/Norvig,  
Kapitel 14 (und 15)



## Bayessche Netze

- Bedingungen  $X$  als Knoten,
- gerichtete Kanten für „direkten Einfluß“

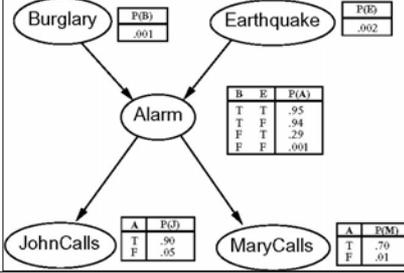


Wahrscheinlichkeiten  
durch Tabellen angeben,  
z.B. für Alarm:

		P(A   B, E)	
Buagl.	Earthq.	true	false
true	true	0.950	0.050
true	false	0.960	0.040
false	true	0.290	0.710
false	false	0.001	0.999

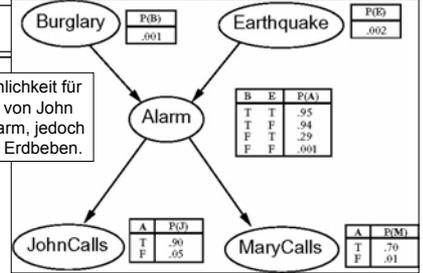
# Bayessche Netze

• Einfluss der unmittelbaren Eingangsknoten („Eltern“) für jeden Knoten durch Tabellen bedingter Wahrscheinlichkeiten



# Inferenz

Beispiel: Wahrscheinlichkeit für gleichzeitigen Anruf von John und Mary wegen Alarm, jedoch ohne Einbruch oder Erdbeben.



$$\begin{aligned}
 &P(jc, mc, a, \neg b, \neg e) \\
 &= P(jc | a) \cdot P(mc | a) \cdot P(a | \neg b, \neg e) \cdot P(\neg b) \cdot P(\neg e) \\
 &= 0.9 \cdot 0.7 \cdot 0.001 \cdot 0.999 \cdot 0.998 \\
 &= 0.00062
 \end{aligned}$$

# Inferenz

$$\begin{aligned}
 &P(jc, mc, a, \neg b, \neg e) \\
 &= P(jc | a) \cdot P(mc | a) \cdot P(a | \neg b, \neg e) \cdot P(\neg b) \cdot P(\neg e) \\
 &= 0.9 \cdot 0.7 \cdot 0.001 \cdot 0.999 \cdot 0.998 \\
 &= 0.00062
 \end{aligned}$$

Eigentlich gilt für Verbundwahrscheinlichkeit:

$$P(jc, mc, a, \neg b, \neg e) = P(jc | mc, a, \neg b, \neg e) \cdot P(mc | a, \neg b, \neg e) \cdot P(a | \neg b, \neg e) \cdot P(\neg b | \neg e) \cdot P(\neg e)$$

Annahmen:

JC unabhängig von MC, B, E gegeben A :

$$P(jc | mc, a, \neg b, \neg e) = P(jc | a)$$

MC unabhängig von B, E gegeben A :

$$P(mc | a, \neg b, \neg e) = P(mc | a)$$

B unabhängig von E :

$$P(\neg b | \neg e) = P(\neg b)$$

# Bedingte Unabhängigkeit

Betrachten disjunkte Teilmengen:

- $U = [U^{(1)}, \dots, U^{(M)}] \subseteq X$
- $V = [V^{(1)}, \dots, V^{(M)}] \subseteq X$
- $Z = [Z^{(1)}, \dots, Z^{(M)}] \subseteq X$

U, V heißen **unabhängig gegeben Z**, falls

$$P(U | V, Z) = P(U | Z)$$

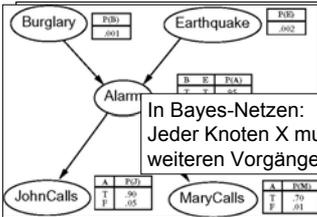
dabei gilt auch (Symmetrie):

$$P(V | U, Z) = P(V | Z)$$

Betrachtung im „Kontext“ Z

Jeweils für alle konkreten Werte von U, V, Z .

# Bedingte Unabhängigkeit



In Bayes-Netzen:

Jeder Knoten X muss unabhängig sein von den weiteren Vorgängern V bei gegebenen Eltern Z .

X, V **unabhängig gegeben Z**, falls  $P(X | V, Z) = P(X | Z)$

$$\begin{aligned}
 &P(jc, mc, a, \neg b, \neg e) \\
 &= P(jc | a) \cdot P(mc | a) \cdot P(a | \neg b, \neg e) \cdot P(\neg b) \cdot P(\neg e)
 \end{aligned}$$

# Inferenz

Wahrscheinlichkeit für Einbruch bei Anruf von John und Mary:  
 $P(b | jc, mc) = P(b, jc, mc) / P(jc, mc) = \alpha \cdot P(b, jc, mc)$

$$\begin{aligned}
 &P(b, jc, mc) \\
 &= P(b, jc, mc, a, e) + P(b, jc, mc, \neg a, e) + P(b, jc, mc, a, \neg e) + P(b, jc, mc, \neg a, \neg e) \\
 &= P(jc | a) \cdot P(mc | a) \cdot P(a | b, e) \cdot P(b) \cdot P(e) \\
 &\quad + P(jc | \neg a) \cdot P(mc | \neg a) \cdot P(\neg a | b, e) \cdot P(b) \cdot P(e) \\
 &\quad + P(jc | a) \cdot P(mc | a) \cdot P(a | b, \neg e) \cdot P(b) \cdot P(\neg e) \\
 &\quad + P(jc | \neg a) \cdot P(mc | \neg a) \cdot P(\neg a | b, \neg e) \cdot P(b) \cdot P(\neg e) \\
 &= 0.00059224
 \end{aligned}$$

$$P(\neg b | jc, mc) = P(\neg b, jc, mc) / P(jc, mc) = \alpha \cdot P(\neg b, jc, mc)$$

$$P(\neg b, jc, mc) = \dots = 0.0014919$$

Normierung  $P(b | jc, mc) + P(\neg b | jc, mc) = 1$  mittels  $\alpha$  :

$$\begin{aligned}
 &P(b | jc, mc) = 0.284 \\
 &\text{Wahrscheinlichkeit für Einbruch bei Anruf von John und Mary } \approx 28\%
 \end{aligned}$$

# Inferenz

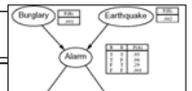
A-posteriori Wahrscheinlichkeiten für Anfrage-Variable ermitteln aus gegebenen Werten für Evidenz-Variable:

$$P(\text{Anfrage} \mid \text{Evidenz})$$

für unterschiedliche Anfragen/Evidenzen gemäß (reduzierten) Formeln.

- Propagierungsalgorithmen in Bayes Netzen
- über mehrere Schritte
- i.a. NP-hart
- Effizientere Algorithmen für eingeschränkte Netz-Klassen (z.B. einfach zusammenhängende Netze)

# Unterschiedliche Inferenzen



## • Diagnose

- Wahrscheinlichkeit für Einbruch bei Anruf von John:  
 $P(b \mid jc) = 0.016$
- Wahrscheinlichkeit für Einbruch bei Anruf von John und Mary:  
 $P(b \mid jc, mc) = 0.29$

## • Kausal (Effekte)

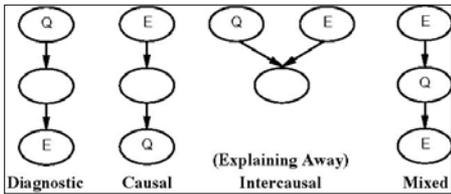
- Wahrscheinlichkeit für Anruf von John bei Einbruch:  
 $P(jc \mid b) = 0.86$
- Wahrscheinlichkeit für Anruf von Mary bei Einbruch:  
 $P(mc \mid b) = 0.67$

## • Interkausal

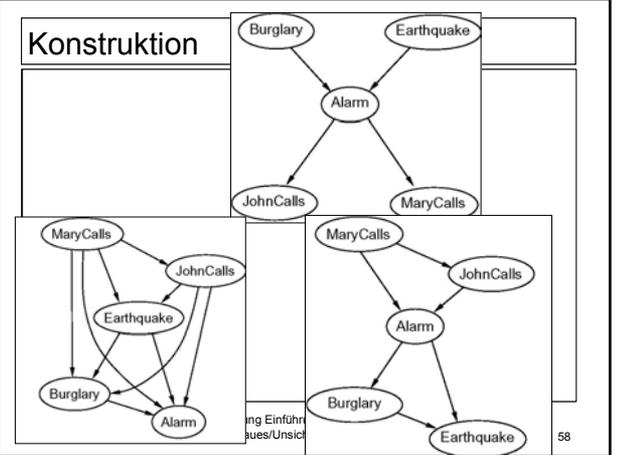
- Wahrscheinlichkeit für Einbruch bei Alarm und Erdbeben:  
 $P(b \mid a, e) = 0.003$
- „Explaining away“ bzgl. Einbruch, denn  $P(b \mid a) = 0.376$

# Inferenz in unterschiedlicher Richtung/Bedeutung

- Diagnose: Ursache aus Effekten
- Kausale Abhängigkeit: Effekte aus Ursachen
- Interkausal: Zwischen Ursachen gemeinsamer Effekte
- Mischungen der vorherigen



# Konstruktion



# Konstruktion Bayesscher Netze

Viele Varianten unter Beachtung von

- gerichtete Kanten für „direkten Einfluß“:
- Kanten von Eltern  $Z^{(1)}, \dots, Z^{(m)}$  nach  $X$  bei Unabhängigkeit von  $X$  und  $Y^{(1)}, \dots, Y^{(m)}$  gegeben  $Z^{(1)}, \dots, Z^{(m)}$  für die mittelbaren Vorgänger  $Y^{(1)}, \dots, Y^{(m)}$  von  $X$

- Tabellen für bedingte Wahrscheinlichkeiten

$$P(X \mid Z^{(1)}, \dots, Z^{(m)})$$

Wenig Kanten (kleine Tabellen) bei geschickter Anordnung.

# Konstruktion Bayesscher Netze

(0) Reihenfolge  $X_1, X_2, \dots, X_n$  wählen.

(i) für jedes  $i=1, \dots, n$ :

- Bestimme  $\text{Parents}(X_i)$  als eine minimale Teilmenge von  $\{X_1, \dots, X_{i-1}\}$ , für die gilt  $X_i$  bedingt unabhängig von  $\{X_1, \dots, X_{i-1}\} - \text{Parents}(X_i)$  gegeben  $\text{Parents}(X_i)$

Ergänze das Netz durch

- Knoten für  $X_i$
- Kanten von  $\text{Parents}(X_i)$  nach  $X_i$
- Tabelle für bedingte Wahrscheinlichkeit  $P(X_i \mid \text{Parents}(X_i))$

# Konstruktion Bayesscher Netze

Reihenfolge  $X_1, X_2, \dots, X_n$  bestimmt Modellstruktur.

Gesichtspunkt 1:

- Einsichtige Abhängigkeiten, z.B. von Ursachen zu direkten Effekten.
- Erleichtert statistische Analyse (Aufstellung der Tabellen)

H.D.Burkhard, HU Berlin Winter-Semester 2004/05  
Vorlesung Einführung in die KI Ungenaues/Unsicheres/Unschärfes Wissen

# Konstruktion Bayesscher Netze

Reihenfolge  $X_1, X_2, \dots, X_n$  bestimmt modellierte Abhängigkeiten.

Gesichtspunkt 2:

- Wenig Kanten (kleine Tabellen) bei geschickter Wahl der Reihenfolge.
- Bedingte Unabhängigkeit ausnutzen:

$$P(x^{(1)}, \dots, x^{(N)}) = \prod_{i=1, \dots, n} P(x^{(i)} | \text{Parents}(x^{(i)}))$$

statt  $P(x^{(1)}, \dots, x^{(N)}) = \prod_{i=1, \dots, n} P(x^{(i)} | x^{(i-1)}, \dots, x^{(1)})$

H.D.Burkhard, HU Berlin Winter-Semester 2004/05  
Vorlesung Einführung in die KI Ungenaues/Unsicheres/Unschärfes Wissen

# Bedingte Unabhängigkeit

Graphische Bestimmung:  
X und Y sind bedingt unabhängig gegeben E, falls jeder ungerichtete Weg von X nach Y durch einen Knoten Z blockiert wird

3 Formen von „Blockierung“

H.D.Burkhard, HU Berlin Winter-Semester 2004/05  
Vorlesung Einführung in die KI Ungenaues/Unsicheres/Unschärfes Wissen

# Bedingte Unabhängigkeit

3 Formen von „Blockierung“

(1) Z in E mit Eingang und Ausgang auf dem Weg zwischen X und Y

H.D.Burkhard, HU Berlin Winter-Semester 2004/05  
Vorlesung Einführung in die KI Ungenaues/Unsicheres/Unschärfes Wissen

# Bedingte Unabhängigkeit

3 Formen von „Blockierung“

Z in E mit 2 Ausgängen auf dem Weg zwischen X und Y

H.D.Burkhard, HU Berlin Winter-Semester 2004/05  
Vorlesung Einführung in die KI Ungenaues/Unsicheres/Unschärfes Wissen

# Bedingte Unabhängigkeit

3 Formen von „Blockierung“

Z und seine Nachfolger **nicht** in E, Z hat 2 Eingänge auf dem Weg zwischen X und Y

(3) falls Z oder Nachfolger in E sind X und Y abhängig!

H.D.Burkhard, HU Berlin Winter-Semester 2004/05  
Vorlesung Einführung in die KI Ungenaues/Unsicheres/Unschärfes Wissen

## Unschärfe Begriffe

### • Klassische Logik, klassische Mengenlehre:

- Wahrheitswerte: entweder H wahr oder H falsch
- Mengen: entweder  $x \in M$  oder  $x \notin M$

### • Alltagsbegriffe oft nicht klar abgrenzbar:

billiges Hemd, großer Mann, ...

blaue Farbe	100%ig:	RGB= 0, 0,255	<input type="radio"/>
blaue Farbe	100%ig:	RGB= 0, 0,100	<input type="radio"/>
blaue Farbe	80%ig:	RGB= 100,100,255	<input type="radio"/>
blaue Farbe	10%ig:	RGB= 50,255,150	<input type="radio"/>
blaue Farbe	0%ig:	RGB= 255,255, 0	<input type="radio"/>

## Unschärfe: Mehrwertige Logik

### • „Linguistische Terme“ (groß, blau,...) als *unschärfe Begriffe*

Eine Aussage „Eigenschaft E trifft auf x zu“

wird nicht durch wahr/falsch bewertet,  
sondern durch Grad von Wahrheit:

„Eigenschaft E trifft auf x mit 25% zu“

Wahrheitswerte aus  $[0,1]$  (0% - 100%)

Analog: „x gehört zur Menge M“

wird nicht durch wahr/falsch bewertet,  
sondern durch Grad von Zugehörigkeit:

„x gehört zur Menge M mit 60%“

## Unschärfe: Ähnlichkeit

### • „Linguistische Terme“ (groß, blau,...) als *Prototypen*

An die Stelle der Aussage „x hat Eigenschaft E“  
tritt die Aussage

„die Ähnlichkeit von x zur Eigenschaft E beträgt 25%“

Ähnlichkeitsmaß: Wert aus  $[0,1]$  (0% - 100%)

Analog:

An die Stelle der Aussage „x gehört zur Menge M“  
tritt die Aussage

„die Ähnlichkeit von x zur Menge M beträgt 60%“

## Unschärfes Schließen

### (Alltags-)Regeln auf der Basis linguistischer Terme:

Bei Erhitzung nicht ins kalte Wasser springen.

Bei hellem Objekt in geringer Entfernung kurze Belichtungszeit.

Unempfindliche Textilien bei hoher Verschmutzung heiß waschen

Linguistische Terme beschreiben Prototypen.

Format der Regeln:

IF  $X_1 = L_1$  AND  $X_2 = L_2$  AND ... AND  $X_n = L_n$  THEN  $S = L$

Benötigen logische Verknüpfung linguistischer Terme, z.B.:

$(80\% X_1 = L_1)$  AND  $(30\% X_2 = L_2)$

ist äquivalent zu  $30\% (X_1 = L_1 \text{ AND } X_2 = L_2)$

## Mehrwertige Logik/Fuzzy-Mengen

- Menge von Wahrheitswerten
- Logische Operatoren (AK, PK)

- klassische Operatoren „einbetten“:

speziell  $\neg, \wedge, \vee, \forall, \exists$

unter Beibehaltung z.B. von  $p \wedge q = \neg(\neg p \vee \neg q)$

- Operationen für Mengen:

Analog zu klassischem Zusammenhang mit AK:

$M \cap N = \{ x \mid x \in M \wedge x \in N \}$

$M \cup N = \{ x \mid x \in M \vee x \in N \}$

$U - M = \{ x \mid x \in U \wedge x \notin M \}$

## Mehrwertige Logik: Syntax (analog zu PK1)

- Menge K von aussagenlogischen Operatoren  $\kappa$   
(klassische Operatoren:  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ )
- Menge Q von Quantoren  
(klassische Quantoren:  $\exists, \forall$ )

Ausdrücke:

- Wenn  $H_1, \dots, H_{n\kappa}$  Ausdrücke sind und  $\kappa$  ein n-stelliger aussagenlogischer Operator ist, so ist auch  $\kappa(H_1, \dots, H_{n\kappa})$  ein Ausdruck.
- Wenn F ein Ausdruck, x ein Individuenzeichen und Quantor q ist, so ist auch  $q x F$  ein Ausdruck.

## Mehrwertige Logik: Semantik (analog PK1)

- Für die Interpretation der Formeln benötigen wir an Stelle der „klassischen“ Wahrheitsfunktionen des AK  
 $\text{not} : \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$   
 $\text{and, or, seq, aeq} : \{0,1\} \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$

Wahrheitswertfunktionen für jeden Operator  $\kappa \in K$ :

$$t_{\kappa} : v^n_{\kappa} \rightarrow v$$

und Wahrheitswertfunktionen für jeden Quantor  $q \in Q$ :

$$t_q : 2^v \setminus \{\emptyset\} \rightarrow v$$

## Definition: v-wertige Logik

$v$  sei eine **Menge von Wahrheitswerten**.

Eine **v-wertige Logik** ist gegeben durch

- eine Menge  $K$  aussagenlogischer Operatoren  $\kappa$  jeweils mit Stelligkeit  $n_{\kappa}$  und zugeordneter Wahrheitswertfunktion  $t_{\kappa} : v^n_{\kappa} \rightarrow v$
- eine Menge  $Q$  von Quantoren  $q$ , jeweils mit einer Wahrheitswertfunktion  $t_q : 2^v \setminus \{\emptyset\} \rightarrow v$

## Mehrwertige Logik: Semantik (analog PK1)

Eine Interpretation  $S=[U,I]$  über einen Universum (Menge)  $U$  ordnet jedem  $m$ -stelligem Prädikatenzeichen  $P$

eine  $m$ -stellige Funktion  $I(P) : U^m \rightarrow v$  zu.

(Klassisch:  $m$ -stelliges Prädikat (Relation) über  $U$ ,

d.h. eine  $m$ -stellige Funktion  $I(P) : U^m \rightarrow \{0,1\}$ ).

### Wert eines Ausdrucks

bei Belegung  $\beta$  in der Interpretation  $S=[U,I]$  für Operatoren  $\kappa \in K$  bzw. Quantoren  $q \in Q$  gemäß:

$$\text{Wert}_S(P(t_1, \dots, t_m), \beta) := I(P)(\beta(t_1), \dots, \beta(t_m))$$

$$\text{Wert}_S(\kappa(H_1, \dots, H_{n_{\kappa}}), \beta) := t_{\kappa}(\text{Wert}_S(H_1, \beta), \dots, \text{Wert}_S(H_{n_{\kappa}}, \beta))$$

$$\text{Wert}_S(q \times H(x), \beta) := t_q(\{ \text{Wert}_S(H(a), \beta) \mid a \in U \})$$

## Beispiele

$$v = [0,1]$$

$$t_{\neg}(x) = 1-x$$

$$t_{\wedge}(x,y) = \min(x,y)$$

$$t_{\vee}(x,y) = \max(x,y)$$

$$t_{\rightarrow}(x,y) = \min(1, 1-x+y)$$

$$t_{\forall}(M) = \inf(M)$$

$$t_{\exists}(M) = \sup(M)$$

$$v = [0,1]$$

$$t_{\neg}(x) = 1-x$$

$$t_{\wedge}(x,y) = x \cdot y$$

$$t_{\vee}(x,y) = x+y - x \cdot y$$

$$t_{\rightarrow}(x,y) = 1-x + x \cdot y$$

$$t_{\forall}(M) = \inf(M)$$

$$t_{\exists}(M) = \sup(M)$$

Die klassische Logik ist jeweils „Spezialfall“ bei  $v = \{0,1\}$ .

$x \rightarrow y = \neg x \vee y$  muss dabei nicht gelten

## T-Norm, T-Conorm

Ziele für Definition mehrwertiger Logiken

mit Wahrheitswerten  $v = [0,1]$ :

- Erweiterung der klassischen Logik
- Operatoren sind intuitiv definiert.
- Beibehaltung gewisser Korrespondenzen, z.B.:

$$t(p \wedge q) = \text{Min}(p,q)$$

$$= 1 - (\text{Max}(1-p, 1-q)) = \neg(\neg p \vee \neg q)$$

Klassische Logik als Einschränkung

mit wahr=1 und falsch=0

## T-Norm, T-Conorm

Axiome für  $t_{\wedge}$  (**T-Norm**) und  $t_{\vee}$  (**T-Conorm**):

$$t : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$$

heißt **T-Norm** (bzw. **T-Conorm**), falls:

- $t$  ist assoziativ und kommutativ,
- $t$  ist monoton wachsend in beiden Argumenten:

$$t(u_1, v) \leq t(u_2, v) \text{ und } t(v, u_1) \leq t(v, u_2) \text{ für } u_1 \leq u_2$$

- $1$  (bzw.  $0$ ) ist neutrales Element:

$$t(1, v) = v \quad (\text{bzw. } t(0, v) = v).$$

# T-Norm, T-Conorm

$n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$

heißt *strikte Negationsfunktion*, falls

- $n(0) = 1, n(1) = 0$
- $n$  ist streng monoton fallend und stetig

## Bemerkung :

(  $n^{-1}$  existiert, da  $n$  bijektiv ist.)

Ist  $t$  eine T-Norm und  $n$  strikte Negationsfunktion, so ist  $n^{-1}(t(n(u), n(v)))$  eine T-Conorm.

Aussagenlogische Entsprechung zu  $a \vee b = \neg(\neg a \wedge \neg b)$

Paare oft benutzter T-Normen und T-Conormen,

jeweils zusammen mit der Negationsfunktion  $n(u) = 1 - u$

min	
$t(u, v) = \min(u, v)$	$\bar{t}(u, v) = \max(u, v)$
Beschränkte Differenz	
$t(u, v) = \max(0, u + v - 1)$	$\bar{t}(u, v) = \min(1, u + v)$
Drastisches Produkt	
$t(u, v) = \begin{cases} v & : u = 1 \\ u & : v = 1 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$	$\bar{t}(u, v) = \begin{cases} v & : u = 0 \\ u & : v = 0 \\ 1 & : \text{sonst} \end{cases}$
Algebraisches Produkt	
$t(u, v) = u * v$	$\bar{t}(u, v) = u + v - u * v$
Hamacher für $\gamma \geq 0$	
$t_\gamma(u, v) = \frac{uv\gamma}{\gamma + (1-\gamma)(u+v-1)}$	$\bar{t}_\gamma(u, v) = \frac{(u+v-u\gamma)-(1-\gamma)uv}{1-(1-\gamma)uv}$
Dombi für $\gamma > 0$	
$t_\gamma(u, v) = \frac{uv\gamma}{u\gamma + \sqrt{(1-u)^\gamma + (1-v)^\gamma}}$	$\bar{t}_\gamma(u, v) = \frac{\sqrt{u^\gamma + v^\gamma}}{1-u-v + uv + \sqrt{u^\gamma + v^\gamma}}$

# Kombination lokaler Eigenschaften

• Ermittlung der (globalen) Bewertung eines Objekts aus den (lokalen) Bewertungen seiner Eigenschaften

Wert eines Hauses aus

- Anzahl der Zimmer
- Lage
- Größe
- Alter

Funktionen zur Ermittlung der globalen Werte aus lokalen Werten

Wahrheitswert eines logischen Ausdrucks aus

- Wahrheitswerten der Variablen (Extensionalität)

# Kombination lokaler Eigenschaften

• (Globaler) Vergleich von Objekten durch Vergleich der (lokalen) Werte ihrer Eigenschaften.

Ähnlichkeit von Objekten gemäß Ähnlichkeit der Eigenschaften

Ähnlichkeit zweier Häuser gemäß

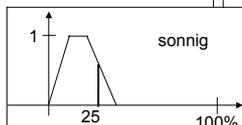
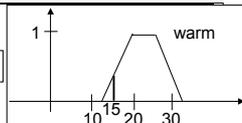
- Anzahl der Zimmer
- Lage
- Größe
- Alter

Analog: Nähe im Raum gemäß Nähe bei den einzelnen Koordinaten.

Funktionen zur Ermittlung der globalen Werte aus lokalen Werten

# Kombination lokaler Eigenschaften

Lokal: Ähnlichkeiten zu Prototyp

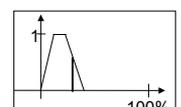
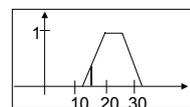
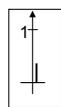


konkreter Wert	linguistischer Term	Ähnlichkeit
Temperatur 15°	warm	30%
Wolken 25%	sonnig	60%

# Kombination lokaler Eigenschaften

Globale Bewertung: Regeln anwenden

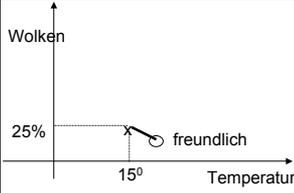
Freundlich = warm und sonnig



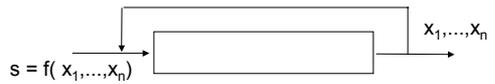
Kombination mittels T-Norm (bzw. T-Conorm)

## Kombination lokaler Eigenschaften

- Andere Möglichkeiten für Kombinationen.  
z.B. Nähe/Distanz als Maß für Vergleich  
Kombination der Distanzen entlang der Dimensionen  
(z.B. Euklidische Distanz, Manhattan-Distanz etc.)



## Regelung (analog Steuerung)



(Scharfe) Stell-Werte  $s$

aus (scharfen) Meß-Werten  $x_1, \dots, x_n$  berechnen:

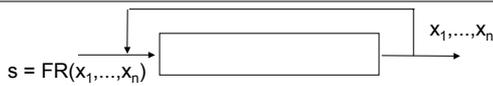
Benötigt Funktion  $f$  mit  $s = f(x_1, \dots, x_n)$  (exaktes Modell)

Alternativ:

Fuzzy-Regler

Unscharfe Regeln mit linguistischen Termen.

## Fuzzy-Regelung



Ersatz der Funktion  $s = f(x_1, \dots, x_n)$  durch Fuzzy-Regler:

scharfe Meßwerte  $x_1, \dots, x_n$   
umformen in: linguistische Terme  $L_1, \dots, L_n$  **Fuzzifizierung**  
berechnen: linguistische Stell-Werte  $S_1, \dots, S_k$  **Fuzzy-Regeln**  
umformen: scharfer Stell-Wert  $s$  **Defuzzifizierung**

## Fuzzy-Mengen

### Definition :

Sei  $U$  ein Universum (eine klassische „scharfe“ Menge).

Eine *Fuzzy-Teilmenge* von  $U$  (unscharfe Menge)

ist eine Funktion  $\mu: U \rightarrow [0,1]$

•Eine *Fuzzy-Interpretation* eines Prädikats  $P$  über  $U$  ordnet  $P$  eine Fuzzy-Teilmenge von  $U$  zu.

•Redeweisen:

„Belegung der Variablen  $x$  mit  $a \in U$  erfüllt  $P$  mit Grad  $\mu(a)$ “.

„ $P(a)$  wird mit  $\mu(a)$  akzeptiert.“

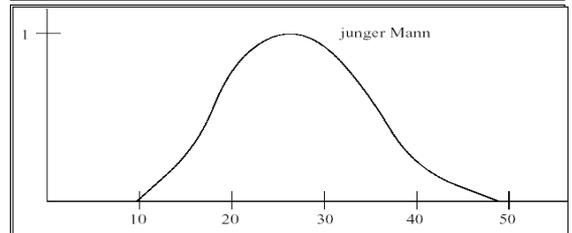
## Linguistische Terme/Variable

### Definition :

Ein Linguistischer Term ist eine Fuzzy-Teilmenge über einer Grundmenge  $U$ .

Eine Linguistische Variable ist eine Variable, die als Ausprägung bestimmte Linguistische Terme annehmen kann, wobei die Grundmenge  $U$  der Linguistischen Terme immer gleich bleibt.

## Linguistische Terme/Variable

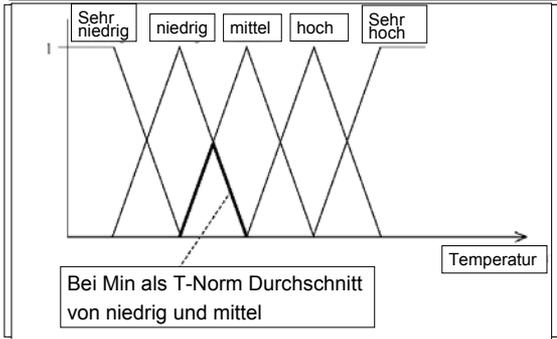


$U$  = scharfe Altersangaben

Linguistischer Term: Junger Mann

Unscharfe Altersangaben für linguistische Variable: Kleinkind, Junge, junger Mann, ...

## Linguistische Terme/Variable



## Mengenoperationen

Mit T-Norm  $t_x$  und T-Conorm  $t_y$ :

Durchschnitt:  $(\mu \cap \nu)(x) = t_x(\mu(x), \nu(x))$

Vereinigung:  $(\mu \cup \nu)(x) = t_y(\mu(x), \nu(x))$

z.B.

$$(\mu \cap \nu)(x) = \min(\mu(x), \nu(x))$$

$$(\mu \cup \nu)(x) = \max(\mu(x), \nu(x))$$

$$\overline{\mu}(x) = 1 - \mu(x)$$

Klassisch:  $\mu: U \rightarrow \{0,1\}$

$a \in M \subseteq U$  gdw.  $\mu_M(a) = 1$

$a \in M \cap N$  gdw.  $\mu_M = 1 \wedge \mu_N = 1$

$a \in M \cup N$  gdw.  $\mu_M = 1 \vee \mu_N = 1$

$a \in \overline{M}$  gdw.  $\neg \mu_M = 1$

## Extensionsprinzip (Zadeh 1975)

Sei  $\mu: X \rightarrow [0,1]$ ,  $f: X \rightarrow Y$ .

Dann wird definiert:

$$\nu(y) := \sup \{ \mu(x) \mid f(x) = y \}$$

(analog zu  $y \in f(M)$  gdw.  $\exists x \in M: f(x) = y$ )

Repräsentations-Satz:

$\mu$  ist bestimmt durch die Niveaumengen

$$\mu_c := \{ x \mid \mu(x) \geq c \} \text{ für alle } c \in [0,1]$$

Darstellung im Rechner: stückweise lineare Menge.

z.B. sehr gering - gering - mittel - stark - sehr stark.

## Fuzzyregler

$$s = FR(x_1, \dots, x_n)$$

Aufgabe:

Stellwerte für  $s$  aus Meßwerten  $x_1, \dots, x_n$  bestimmen.

Verwendung von Fuzzy-Regeln:

Linguistische Variable  $X_1, \dots, X_n, S$  anstelle von  $x_1, \dots, x_n, s$ .

Wertebereiche:

Linguistische Terme  $L_1, \dots, L_n, T$  für die Variablen  $X_1, \dots, X_n, S$ .

*Wenn* Wäsche stark verschmutzt *und* Ölanteil hoch  
*dann* Waschzeit lang.

## Regeln

*Wenn* Hauptobjekt sehr nah *und* Belichtung wenig  
*dann* Schärfentiefe sehr niedrig.

*Wenn* Hauptobjekt am Bildrand *dann* Schärfentiefe hoch.

Regeln haben Form

„*Wenn* linke Seite, *dann* rechte Seite.“

Grad des Zutreffens der Stellgröße  $S$  (rechte Seite) berechnen  
aus Grad des Zutreffens der Meßgrößen (linke Seite)

## Regeln

**IF**  $X_{11} = L_{11} \wedge \dots \wedge X_{1m1} = L_{1m1}$  **THEN**  $S = T_1$

... ..

**IF**  $X_{n1} = L_{n1} \wedge \dots \wedge X_{nmn} = L_{nmn}$  **THEN**  $S = T_n$

Ermittlung von Stellgrößen  $T_i$  an der Stellvariablen  $S$   
in Abhängigkeit von Eingangsgrößen  $X_{ij}$ .

$X_{ij}$ ,  $S$ : Linguistische Variable,

$L_{ij}$ ,  $T_i$ : Linguistische Terme.

*Wenn* Hauptobjekt sehr nah *und* Belichtung wenig  
*dann* Schärfentiefe sehr niedrig.

*Wenn* Hauptobjekt am Bildrand *dann* Schärfentiefe hoch.

### Regeln

**IF**  $X_{i1} = L_{i1} \wedge \dots \wedge X_{imi} = L_{imi}$  **THEN**  $S = T_i$

Wenn Hauptobjekt sehr nah *und* Belichtung wenig  
dann Schärfentiefe sehr niedrig.

Wenn Hauptobjekt am Bildrand *dann* Schärfentiefe hoch.

Beispiel:  
 $X_{11}$  : Entfernung\_Hauptobjekt  
 $L_{11}$  : „sehr nah“  
 $X_{12}$  : Ausleuchtung  
 $L_{12}$  : „wenig“  
 $X_{21}$  : Position\_Hauptobjekt  
 $L_{21}$  : „am\_Bildrand“  
 $S$  : Schärfentiefe  
 $T_1$  : „sehr niedrig“  
 $T_2$  : „hoch“

Welches Resultat für:  
 Entfernung\_Hauptobjekt = 2 m  
 Position\_Hauptobjekt  
 = erstes Viertel des Bildes  
 Lichtmenge = 22 Lux

Ungenaues/Unsicheres/Unschärfes Wissen

97

### Fuzzifizierung

**IF**  $X_{i1} = L_{i1} \wedge \dots \wedge X_{imi} = L_{imi}$  **THEN**  $S = T_i$

Aktivierung der linguistischen Terme  $L_{ij}$

Linguistischer Term ist eine Fuzzy-Teilmenge  $U$ :  $\rightarrow [0, 1]$

- Übereinstimmung von scharfen (Mess-)Werten  $x_i$  mit den linguistischen Termen  $L_i$  (Fuzzy-Mengen):  
 $Act(L_i, x_i) := L_i(x_i)$
- Erweiterbar für Verwendung linguistischer Terme  $L'_i$  als Eingabe:  $Act(L_i) := T\text{-Norm}(L_i, L'_i)$

H.D.Burkhard, HU Berlin Winter-Semester 2004/05

Vorlesung Einführung in die KI Ungenaues/Unsicheres/Unschärfes Wissen

98

### Regelauswertung: Aktivierung

Regel anwendbar, falls Vorbedingungen erfüllt.  
 Hier: Grad der Erfüllung = Aktivierung

**IF**  $X_{i1} = L_{i1} \wedge \dots \wedge X_{imi} = L_{imi}$  **THEN**  $S = T_i$

- Aktivierung  $a$  einer Regel ergibt sich durch Fuzzy-Kombination mittels T-Norm (ggf. auch T-Conorm für „oder“, und Negation für „nicht“) der Aktivierungen der Linguistischen Terme  $L_{ij}$

H.D.Burkhard, HU Berlin Winter-Semester 2004/05

Vorlesung Einführung in die KI Ungenaues/Unsicheres/Unschärfes Wissen

99

### Regelauswertung: Aktivierung

Wenn Hauptobjekt am Bildrand *dann* Schärfentiefe hoch.

Position\_Hauptobjekt = erstes Viertel des Bildes

Bsp.: Regel 2

horizontaler Bildposition

Schärfentiefe

T geschnitten T' bei min als T-Norm

resultierend. d. eilmenge bei min als T-Norm

### Aktivierung der Stellwerte

**IF**  $X_{ij} = L_{ij} \wedge \dots \wedge X_{imi} = L_{imi}$  **THEN**  $S = T_i$

- Aktivierung  $act(T_i)$  für linguistischen Term der rechten Seite ergibt sich aus Aktivierung  $a$  der Regel (der linken Seite)

Falls mehrere Regeln aktiviert für Stellgröße  $S$ : Verknüpfung der entsprechenden linguistischen Terme mittels T-Conorm:

Alternativen

$$T = T_1 \vee T_2 \vee \dots \vee T_n$$

H.D.Burkhard, HU Berlin Winter-Semester 2004/05

Vorlesung Einführung in die KI Ungenaues/Unsicheres/Unschärfes Wissen

101

### Defuzzifizierung: Konkrete Stellgröße

$s = FR(x_1, \dots, x_n)$

Bestimmung des konkreten Stellwertes  $s$  aus  $T$ .

Bsp.: Regel 2

horizontaler Bildposition

Schärfentiefe

T geschnitten T' bei min als T-Norm

resultierend. d. eilmenge bei min als T-Norm

## Defuzzifizierung: Konkrete Stellgröße

Unterschiedliche Varianten:

- Stellwert bei Maximum (nicht eindeutig):  
s mit  $T(s)$  maximal
- Stellwert bei „Schwerpunkt“.
- Mittelwert bzgl. aller s mit Maximalwerten

Abhängig von Aufgabe auswählen.

Mögliche Probleme in einigen Fällen:

- Unstetiger Verlauf von  $s = FR(x_1, \dots, x_n)$
- $T(s) = 0$

## Beispiel

Regel 1:

Wenn x positiv klein und y ungefähr 0, dann F positiv klein.

Regel 2:

Wenn x mittel und y ungefähr 0, dann F mittel.

Was ist der Wert für F bei Eingabe (25,-4) ?

