Einführung in die KI

Prof. Dr. sc. Hans-Dieter Burkhard
Vorlesung Winter-Semester 2003/04

Wissensrepräsentation:
Resolution (im PK1)

Einige von denen, die nicht glauben, dass Gott die Welt in sieben Tagen geschaffen hat sind keine Fundamentalisten, aber einige Fundamentalisten glauben, dass Gott die Welt in sieben Tagen geschaffen hat – also ist keiner, der nicht glaubt, dass Gott die Welt in sieben Tagen geschaffen hat, ein Fundamentalist.

Aus U.Eco: das Foucaultsche Pendel

2. Resolution

Vorbild für „Formalismus“:

– exakt, präzise, (theoretisch) beherrscht

Aufbau:

–Zeichen

–Ausdrücke (rekursive Definition)

–Sätze („Theorie“) **Th**

•syntaktisch bestimmt:

Th = Abl(**Ax**)

Nach speziellen formalen Regeln erzeugbare Formeln

•semantisch bestimmt:

Th = allgemeingültige Sätze einer Struktur

Beweise

Inhaltlicher Beweis:

– Argumentation

„Irreflexive, transitive Relationen sind asymmetrisch“

Formaler (syntaktischer) Beweis:

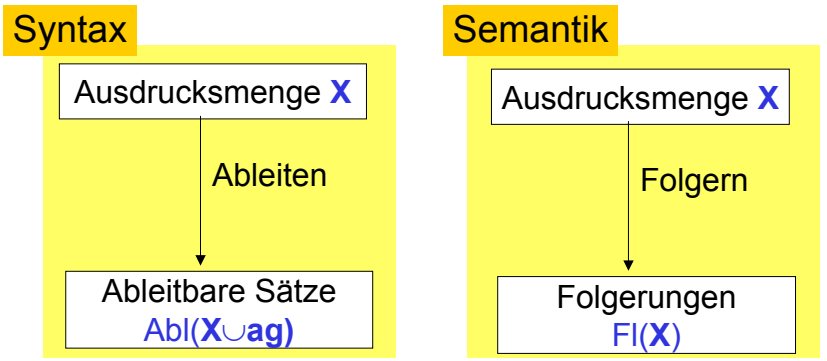
– Umformung von Ausdrücken („Kalkül“)

Theorembeweiser:

– (Syntaktisches) Verfahren zur Entscheidung, ob ein Ausdruck zu einer Satzmenge (Theorie) gehört:

$H \in \mathbf{Th}$?

Axiomatische Behandlung der Logik



Korrektheit von Abl : $Abl(\mathbf{X} \cup \mathbf{ag}) \subseteq Fl(\mathbf{X})$

Vollständigkeit von Abl : $Abl(\mathbf{X} \cup \mathbf{ag}) \supseteq Fl(\mathbf{X})$

Äquivalenz von Abl : $Abl(\mathbf{X} \cup \mathbf{ag}) = Fl(\mathbf{X})$

Formales Ableiten (Resolutionsregel)

Für Klauseln („Disjunktion von Literalen“)

Voraussetzung:

K1 und K2 unifizierbar mittels Unifikator σ

K =Res(K1,K2,σ) entsteht durch

- „Vereinigung“ von σ(K1) und σ(K2)
- Streichen komplementärer Literale

Formales Ableiten (Resolution)

KA1: $\neg R(x,x)$

KA2: $\neg R(u,y) \vee \neg R(y,z) \vee R(u,z))$

K1: $R(c,d)$

K2: $R(d,c)$

K3 =Res(KA1,KA2,σ): $\neg R(w,y) \vee \neg R(y,w)$

mit $\sigma(u)= \sigma(z)= \sigma(x)= w$,$\sigma(y)= y$

K4 = Res(K1,K3,σ): $\neg R(d,c)$

mit $\sigma(w)=c$ $\sigma(y)=d$

K5 = Res(K2,K4,σ): □

Enscheidbarkeit in der Logik

(rein logisch) allgemeingültige Sätze:
ag = Abl(**axp**) = Fl(∅)

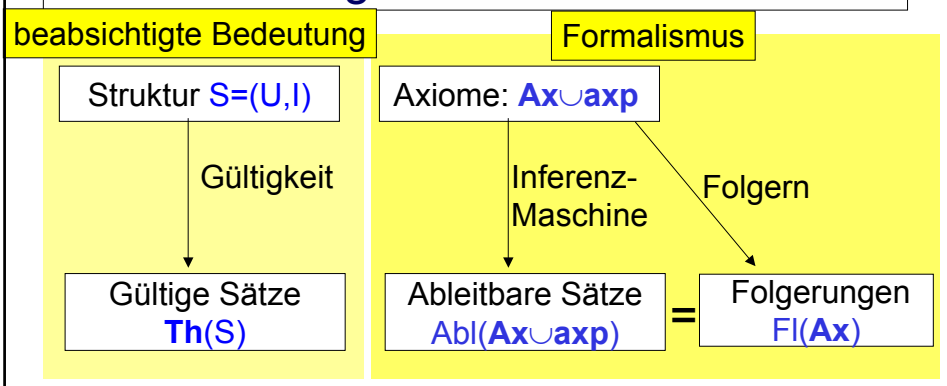
axp : Axiomensystem des PK1

H ∈ **ag** ?

- Entscheidbar im AK
- Unentscheidbar im PK1

  (aber aufzählbar, da axiomatisierbar)

Formalisierung einer Domäne

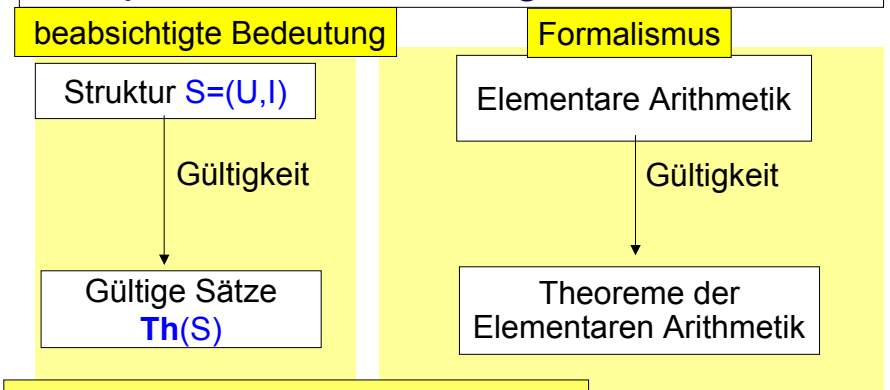


Korrektheit der Formalisierung : $Abl(\mathbf{Ax} \cup \mathbf{axp}) \subseteq \mathbf{Th}(S)$

Vollständigkeit der Formalisierung: $Abl(\mathbf{Ax} \cup \mathbf{axp}) \supseteq \mathbf{Th}(S)$

Äquivalenz der Formalisierung : $Abl(\mathbf{Ax} \cup \mathbf{axp}) = \mathbf{Th}(S)$

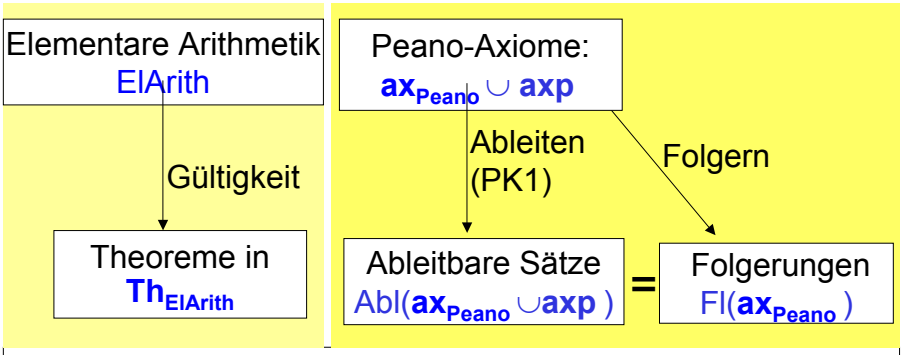
Beispiel: Formalisierung der Arithmetik



$\mathbf{Th}(S) = \{ H \mid Wert_S(H,\beta) = 1 \text{ für alle } \beta \text{ über } U \}$

β : Belegung der Variablen
mit Individuen aus dem Universum U

Beispiel: Formalisierung der Arithmetik



Korrektheit der Formalisierung :

$$Abl(\mathbf{Ax}_{Peano} \cup axp) \subseteq \mathbf{Th}_{ElArith}$$

Unvollständigkeit der Formalisierung:

$$Abl(\mathbf{Ax}_{Peano} \cup axp) \neq \mathbf{Th}_{ElArith}$$

Adäquatheit der Formalisierung

Adäquatheit:

Die wesentlichen Aspekte werden in der Struktur S bzw. den Axiomen **Ax** korrekt erfaßt.

–Parallelen-Axiom der Geometrie

–Stetigkeitsdefinition in der Analysis

–Modellierung eines Staubsaugers

Modellierung eines Staubsaugers

Alternativen:

$$(S1) \quad \forall staubi : Staubsauger(staubi) \Rightarrow \exists l, m, s : Lampe(l) \wedge HatAlsTeil(staubi, l) \wedge Motor(m) \wedge HatAlsTeil(staubi, m) \wedge Stecker(s) \wedge HatAlsTeil(staubi, s)$$

$$(S2) \quad \forall staubi : Staubsauger(staubi) \Leftrightarrow \exists l, m, s : Lampe(l) \wedge HatAlsTeil(staubi, l) \wedge Motor(m) \wedge HatAlsTeil(staubi, m) \wedge Stecker(s) \wedge HatAlsTeil(staubi, s)$$

Modellierung eines Staubsaugers

Was folgt für *staubi*$_1$ aus (S1) bzw. (S2) zusammen mit einer der folgenden Aussagen:

$$\exists l, m, s : Lampe(l) \wedge HatAlsTeil(staubi_1, l) \wedge Motor(m) \wedge HatAlsTeil(staubi_1, m) \wedge Stecker(s) \wedge HatAlsTeil(staubi_1, s)$$

$$\neg\exists l, m, s : Lampe(l) \wedge HatAlsTeil(staubi_1, l) \wedge Motor(m) \wedge HatAlsTeil(staubi_1, m) \wedge Stecker(s) \wedge HatAlsTeil(staubi_1, s)$$

Modellierung - Adäquatheit

Mehr Axiome – weniger Modelle - mehr Folgerungen

Mehr Axiome – komplexere Verarbeitung

Adäquatheit hinsichtlich
- Anwendungsproblematik
- Komplexität

Vereinfachung, wenn klar ist,
dass es (nur) um Staubsauger geht

Modellierung eines Staubsaugers

Funktionsbeschreibung: Verhalten

$$(M1) \quad \forall m : Brummt(m) \Leftarrow Motor(m) \wedge \boldsymbol{Angeschlossen}(m)$$

Diagnose: Fehlverhalten

$$(M2) \quad \forall m : Brummt(m) \Leftarrow Motor(m) \wedge Angeschlossen(m)$$

$$(M3) \quad \forall m : Brummt(m) \Leftarrow Motor(m) \wedge Angeschlossen(m) \wedge Ok(m)$$

Syntax des PK1

Terme: Individuen (Konstante, Variable, Funktionen)

Prädikate (atomare Formeln):

Relationen $R(x_1,...,x_n)$ (wahr/falsch)

Ausdrücke:

logische Beziehungen zwischen Prädikaten mittels

- Aussagenlogischen Operatoren $\neg \wedge \vee \leftrightarrow \rightarrow$
- Quantifikation von Variablen $\forall \exists$

  z.B. $\forall x \exists y\, R(x, x_1,...,x_n) \wedge \neg R(y, x_1,...,x_n)$

Positives Literal: nicht negierte atomare Formel

Negatives Literal: negierte atomare Formel

Syntax des PK1: Ableiten

Ableiten: Ausdrücke umformen mit Ableitungsregeln

z.B. Abtrennungsregel (modus ponens)

$$\frac{H_1 \;,\; H_1 \rightarrow H_2}{H_2}$$

H *ableitbar aus* **X ,**

falls Ableitungsfolge für H aus **X** existiert

X |- H oder: H $\in$ **X**|- oder: H $\in$ Abl(**X**)

Allgemeingültigkeit, Erfüllbarkeit

Belegung β erfüllt den Ausdruck H in der Struktur S = [U, I] ,

falls $Wert_S$ (H, β) = W.

(Rein logische) Erfüllbarkeit eines Ausdrucks H:

H heißt erfüllbar, falls β, U,I existieren mit $Wert_{[U,I]}$ (H, β) = W.

ef : Menge aller erfüllbaren Ausdrücke

(Rein logische) Allgemeingültigkeit eines Ausdrucks H:

H heißt allgemeingültig, falls $Wert_{[U,I]}$ (H, β) = W für alle β, U,I .

ag : Menge aller allgemeingültigen Ausdrücke

Freie Variable werden bei Allgemeingültigkeit wie generalisierte Variable behandelt.

Allgemeingültigkeit, Erfüllbarkeit

H ist allgemeingültig gdw. ¬H nicht erfüllbar ist.

H ist erfüllbar gdw. ¬H nicht allgemeingültig ist.

ag axiomatisierbar:

Es gibt aufzählbares Axiomensystem **axp** mit **ag** = Abl(**axp**)

Axiomatisierbar = aufzählbar = partiell entscheidbar
M entscheidbar **gdw**. M und U - M aufzählbar

Allgemeingültigkeit, Erfüllbarkeit

Satz von Church:

Erfüllbarkeit/Allgemeingültigkeit im PK1 sind unentscheidbar.

Menge der allgemeingültigen Ausdrücke: axiomatisierbar.

Menge der nicht erfüllbaren Ausdrücke: axiomatisierbar.

Menge der nicht allgemeingültigen Ausdrücke: nicht axiomat.

Menge der erfüllbaren Ausdrücke: nicht axiomatisierbar.

H ist allgemeingültig gdw. ¬H nicht erfüllbar ist.

H ist erfüllbar gdw. ¬H nicht allgemeingültig ist.

Folgern im PK1

Eine Struktur S = [U, I] und eine Belegung β
sind ein *Modell* für eine Menge **X** von Ausdrücken,
wenn für alle H ∈ **X** gilt:
β erfüllt H in der Struktur S = [U, I] , d.h. $Wert_S(H, \beta) = W$.

Es sei **X** eine Menge von Ausdrücken, H ein Ausdruck.

H *folgt aus* **X** , falls gilt:

Jedes Modell von **X** ist ein Modell von H .

X |= H oder: H ∈ **X**|= oder: H ∈ Fl(**X**)

Folgern im PK1

Staubi1 als Modell für

(S1) $\forall staubi : Staubsauger(staubi) \Rightarrow$
$\exists l, m, s : Lampe(l) \wedge HatAlsTeil(staubi, l) \wedge$
$Motor(m) \wedge HatAlsTeil(staubi, m) \wedge$
$Stecker(s) \wedge HatAlsTeil(staubi, s)$

(*) $\neg\exists l, m, s : Lampe(l) \wedge HatAlsTeil(staubi_1, l) \wedge$
$Motor(m) \wedge HatAlsTeil(staubi_1, m) \wedge$
$Stecker(s) \wedge HatAlsTeil(staubi_1, s)$

staubi1 ist auch Modell von : $\neg$*Staubsauger(staubi1)*

Gilt bei allen Modellen,
d.h. $\neg$*Staubsauger(staubi1)* ist Folgerung von (S1) und (*)

Folgern und Ableiten im PK1

Fl ist syntaktisch beschreibbar mittels Abl

Fl = Abl „modulo **ag**“

ag = Fl(∅) = Abl(**axp**)

axp : Axiomensystem des PK1

Fl und Abl sind monoton:

X $\subseteq$ **Y** $\Rightarrow$ Fl (**X**) $\subseteq$ Fl (**Y**)

X $\subseteq$ **Y** $\Rightarrow$ Abl (**X**) $\subseteq$ Abl (**Y**)

(H $\rightarrow$ G) $\in$ Fl (**X**) $\Leftrightarrow$ G $\in$ Fl (**X** $\cup${H})

H $\in$ Fl (**X**) $\Leftrightarrow$ ($\wedge$**X** $\rightarrow$ H) $\in$ **ag**

Formale Theorien im PK1

Als *Theorie*
wird eine bezüglich Folgern (Ableiten)
abgeschlossene Menge **Th**
von Ausdrücken bezeichnet:

Th = Fl(**Th**) = Abl(**Th**) „modulo **ag**“

Formale Theorien im PK1

Theorie mit *semantisch bestimmter Satzmenge*:

Gegeben ist eine Struktur S = [U, I] mit

Th = { F | F allgemeingültig in S}

= { F | $Wert_S$ (F, β) = W für alle β über U }

Arithmetik
Staubsauger

Theorie mit *syntaktisch bestimmter Satzmenge*:

Gegeben ist ein Ausdruckmenge **Ax** („Axiome“) mit

Th = Abl(**Ax** ∪**axp**) (= Fl(**Ax**))

Peano-Arithmetik
Staubsauger-Axiomatik

Formalisierung mittels PK1

Ziel: Axiome zur Beschreibung von Sachverhalten finden

Analoges Ziel: **Computerverarbeitung ermöglichen**

1. semantisch definierte Theorie **Th** bestimmen
   (Universum, Relationen/Funktionen, Interpretation)

2. axiomatische Beschreibung von **Th** :
   Axiome **Ax** mit **Th** = Abl(**Ax** $\cup$ a**xp**)

   (z.B. PROLOG-Programm)

Anwendung PK1

Formalisierung: Axiome **X**

Problem durch Ausdruck H beschreiben

Entscheiden, ob

$H \in Fl(\mathbf{X})$

d.h. ob $H \in Abl(\mathbf{X} \cup \mathbf{axp})$

Programme dafür: Theorembeweiser

Beweise

Positiver Kalkül: Allgemeingültigkeit entscheiden

$H \in \mathbf{Th}$?

Negativer Kalkül: Unerfüllbarkeit untersuchen

$\{\neg H\} \cup \mathbf{Th}$ widersprüchlich ?

Deduktiver Kalkül:

Erweitern der Axiome um H zu finden (forward chaining)

Testkalkül:

Reduktion von H auf Axiome (backward chaining)

Beispiel:

Resolution (PROLOG) ist *Negativer Testkalkül*

Beweise

$H \in Fl(\mathbf{X})$

gilt gdw. $H \in Abl(\mathbf{X} \cup \mathbf{axp})$ → Positiver Kalkül

$H \in Fl(\mathbf{X})$

gilt gdw. $(\wedge\mathbf{X} \rightarrow H) \in \mathbf{ag}$

gilt gdw. $\neg(\wedge\mathbf{X} \rightarrow H) \notin \mathbf{ef}$

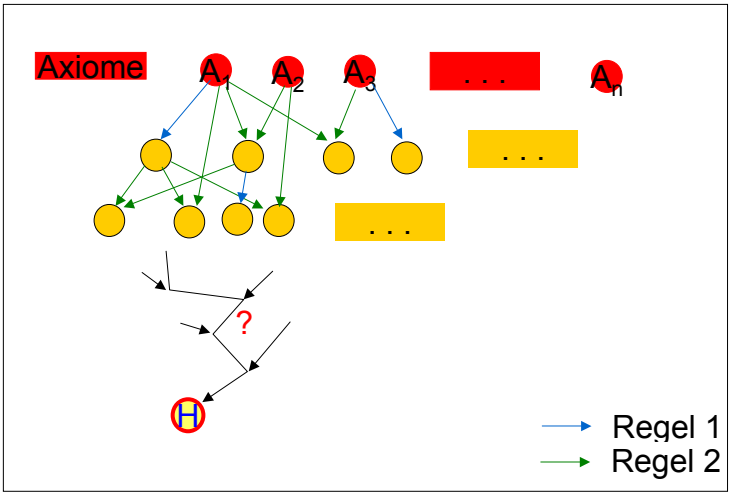
gilt gdw. Skolemform von $(\wedge\mathbf{X} \wedge \neg H)$ nicht erfüllbar

gilt gdw. Klauselform von $(\wedge\mathbf{X} \wedge \neg H)$ nicht erfüllbar

gilt gdw. Leere Klausel mittels Resolution ableitbar

→ Negativer Kalkül

Deduktiver Kalkül



Suchraum bei deduktivem Kalkül

Klassischer AK : 15 Axiome für **ag**, 2 Regeln

sogar entscheidbar, allerdings NP

Klassischer PK1:

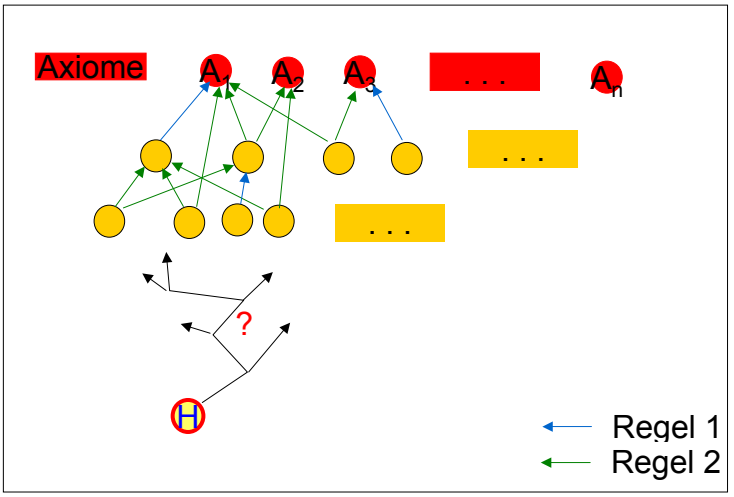
- abzählbar viele Axiome für **ag** + weitere für **Th** ,
  7 Regeln

- Alle allgemeingültigen Ausdrücke im Suchraum **Th** :
  ag = Fl(∅) ⊆ Fl(**Th**) = **Th**

- Mit H viele weitere Ausdrücke im Suchraum **Th** :
  z.B. H∨G für beliebiges G

Vollständigkeit als Nachteil

Test-Kalkül



Normalformen (Definitionen)

- ein Ausdruck H heißt *bereinigt*, falls gilt:
  - es gibt keine Variable x, die in H sowohl frei als auch gebunden vorkommt,
  - die hinter den Quantoren in H vorkommenden Variablen sind alle verschieden.

- ein Ausdruck H heißt *pränex*, falls gilt:
  - H hat die Form $Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n H'$,
    wobei $Q_1, \ldots, Q_n$ Quantoren sind
    und H´ keine Quantoren enthält.

Normalformen (Definitionen)

- ein Ausdruck H heißt *pränexe Normalform*, falls gilt:
  - H hat pränexe Form $Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n H'$,
  - H´ ist eine konjunktive Normalform (KNF)

    $H' = \wedge \{ \{ \vee L_{ij} \mid i=1...n \} \mid j=1...m_n \}$

    wobei die L_{ij} Literale sind.

Literal:
atomare Formel (Prädikat, Relation) r(X1,...,Xn)
oder
negierte atomare Formel ¬r(X1,...,Xn)

Normalformen (Sätze)

1. Zu jedem Ausdruck H_1 existiert ein Ausdruck H_2 in bereinigter Form, so dass H_1 und H_2 semantisch äquivalent sind.
2. Zu jedem Ausdruck H_2 in bereinigter Form existiert ein Ausdruck H_3 in bereinigter pränexer Form, so dass H_2 und H_3 semantisch äquivalent sind.
3. Zu jedem Ausdruck H_3 in bereinigter pränexer Form existiert ein Ausdruck H_4 in bereinigter pränexer Normalform, so dass H_3 und H_4 semantisch äquivalent sind.

Zu jedem Ausdruck H
existiert ein semantisch äquivalenter Ausdruck G
in bereinigter pränexer Normalform.

Skolem-Normalform

Eine Skolem-Normalform ist eine pränexe Normalform, deren Variable sämtlich generalisiert sind.

Umformung einer bereinigten pränexen Normalform G in eine Skolem-Normalform F:

1. ∃-Quantoren einführen für alle freien Variablen in G. (erfüllbarkeits-äquivalente Umformung !!)
2. Elimimation aller ∃-Quantoren mit Hilfe von Skolem-Funktionen.

Die entstehende Formel F ist erfüllbarkeits-äquivalent zu G.

Klauselform

Eine Klausel ist eine Menge von Literalen $K = \{L_1, ..., L_n\}$.

Ein Literal ist eine negierte oder nicht-negierte Atomformel.

Vorteil der Klauselnotation:

Mengenschreibweise beseitigt rein formale Unterschiede äquivalenter Ausdrücke bzgl. Kommutativität/Idempotenz.

Klauselform

Umformung einer Skolem-Normalform F in Klauselform:

1. Verteilung der Allquantoren auf die Alternativen.
   (Semantisch äquivalente Umformung.)
2. Gebundenene Umbenennungen derart, dass sich insgesamt alle Quantoren auf unterschiedliche Variablen beziehen. (Semantisch äquivalente Umformung.)

   $$\mathbf{F} = \wedge_i \vee_j L_{ij}$$

3. Darstellung der Alternativen als Klauseln:

   d.h. Menge von Literalen $\{ L_{ij} \mid j = 1, ...m_i \}$.

   Darstellung von F als Menge von Klauseln **Kl** :

   $$\mathbf{Kl} = \{ \{ L_{ij} \mid j = 1, ...m_i \} \mid i = 1, ..., n \}$$

Substitution (Definition)

Eine *Substitution* σ ist eine Abbildung der Individuenvariablen (eines Ausdrucks) in die Menge der Terme.

- Grundsubstitution: Abbildung in die Grundterme.
- Variablenumbenennung:

  Ersetzung von Variablen durch Variable.

$\sigma(L)$: Ergebnis der Substitution σ für ein Literal L
(rekursiv definiert).

Hintereinanderausführung von Substitutionen:

$$\sigma_1 * \sigma_2 (x) = \sigma_2(\sigma_1(x))$$

$\sigma(L)$ ist jeweils „Spezialfall“ von L .

L ist die allgemeinste Form bzgl. aller $\sigma(L)$ für beliebige σ.

Substitution, Unifikation (Definition)

Eine Substitution σ heißt *Unifikator*

für eine Menge $\{L_1, ..., L_n\}$ von Literalen, falls gilt:

$\sigma(L_1) = \sigma(L_2) = ... = \sigma(L_n)$ (syntaktische Gleichheit).

Ein Unifikator σ heißt *allgemeinster Unifikator*

(m.g.u. = most general unifier),

falls für jeden Unifikator σ_0 eine Substitution σ_{00} existiert mit

$\sigma_0 = \sigma * \sigma_{00}$ (σ_0 ist spezieller als σ).

Der allgemeinste Unifikator ist eindeutig bis auf Umbenennungen.

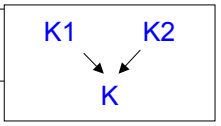
Substitution, Unifikation

- Der allgemeinste Unifikator σ einer Menge $\{L_1,...,L_n\}$ beschreibt die Menge der gemeinsamen Spezialisierungen (Beispiele).
- Werden die Variablen der Literale zuvor separiert, so ergibt sich ein allgemeinerer Unifikator.

Satz

- Zu jeder unifizierbaren Menge von Literalen existiert ein allgemeinster Unifikator.
- Es ist entscheidbar, ob ein Unifikator existiert.
- Ein allgemeinster Unifikator kann ggf. konstruiert werden.

Resolutionsregel



Voraussetzungen:

K_1 und K_2 Klauseln ohne gemeinsame Variablen
(sonst: Separation durch Variablenumbenennungen)

Literale $L'_1,..., L'_{n'} \in K_1$ und $\neg M'_1,..., \neg M'_{m'} \in K_2$, $n',m' > 0$,
die mittels eines Unifikators σ unifizierbar sind.

Durch Resolution entsteht die *Resolvente*

$$K = \sigma ((K_1 - \{L'_1, ..., L'_{n'}\}) \cup (K_2 - \{\neg M'_1, ..., \neg M'_{m'}\}))$$

$$\frac{\{L_1,..,L_n,L'_1,..,L'_{n'}\}, \{M_1,.., M_m,M'_1,..,M'_{m'}\}, \sigma(L'_1)=..=\sigma(L'_n)=\sigma(\neg M'_1)=..=\sigma(\neg M'_m)}{\sigma(\{ L_1,..,L_n , M_1,..,M_m \})}$$

Resolutionsregel

Zerlegung in zwei Regeln.

Einfache Resolutionsregel:

$$\frac{\{L_1,..,L_n,L'\}, \{M_1,.., M_m,M'\}, \sigma(L')=\sigma(\neg M')}{\sigma (\{ L_1,..,L_n , M_1,..,M_m \})}$$

Faktorisierungsregel:

$$\frac{\{L_1,..,L_n,L_1',L'_2\}, \sigma(L_1')=\sigma(L_2')}{\sigma (\{ L_1,..,L_n ,L_1'\})}$$

Spezialfälle

Schnittregel:

$$\frac{A \vee B,\ \neg B' \vee C\ ,\ \sigma(B)=\sigma(B')}{\sigma\,(A \vee C)}$$

Modus ponens:

$$\frac{B,\ B \rightarrow C}{C}$$

Indirekter Beweis:

$$\frac{B,\ \neg B}{\square}$$

Unerfüllbarkeitsnachweis

Res(**K**) = Menge aller mit Resolution in endlich vielen Schritten aus Klauselmenge **K** ableitbarer Klauseln

Klauseln(H) = Klauseldarstellung eines Ausdrucks H (nicht eindeutig)

Satz:

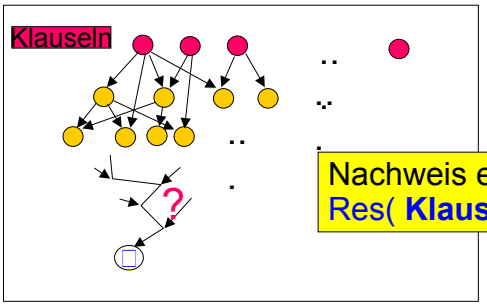
$H \notin$ **ef** gdw. $\square \in$ Res(**Klauseln**(H))

Beweis: Herbrand-Modelle

Unerfüllbarkeitsnachweis

Nachweis der Unerfüllbarkeit eines Ausdrucks H ($H \notin$ **ef**):

Suche in Res(**Klauseln**(H)) nach □



Nachweis erfolgreich, wenn □ in Res(**Klauseln**(H)) gefunden.

Res(**Klauseln**(H)) i.a. unendlicher Suchraum.

Vollständigkeit des Suchverfahrens?

Resolutionsverfahren

Nachweis von $H \in Fl$ (**X**)

Konjunktive Normalform von ($\wedge$**X** $\wedge$ ¬H) bilden.

Darstellung als (erfüllbarkeitsäquivalente) Klauselmenge

$$\mathbf{Kl} = \{ \{ L_{ij} \mid j = 1, ...m_i \} \mid i = 1, ..., n \}$$

Suchverfahren:

- Wiederholtes Erweitern der Klauselmenge durch neue Resolventen.
- Abbruch, wenn leere Klausel □ abgeleitet wurde: EXIT($H \in Fl$ (**X**)).
- Wenn keine neuen Klauseln ableitbar:

  EXIT($H \notin Fl$ (**X**)). (i.a. aber unendlicher Suchraum)

Resolutionsverfahren

Nachweis von $H \in Fl(\mathbf{X})$

Resolutionsverfahren liefert Lösung im Fall der Unerfüllbarkeit in endlich vielen Schritten z.B. bei Breite-Zuerst-Verfahren.

Für erfüllbare Formeln dagegen evtl. kein Resultat (unendliches Resolvieren ohne Erreichen von □).

Resolutionsverfahren

- ist Negativer Testkalkül. Verwendet
  - spezielle Normalformen (Klauseln)
  - Resolutionsregel (Schnittregel, Unifikation)

- ist nicht vollständig
- aber widerlegungsvollständig
  - wenn H unerfüllbar, so □ mit Resolution ableitbar
- und widerlegungskorrekt
  - wenn □ mit Resolution ableitbar, so H unerfüllbarist

H unerfüllbar gdw. □ mit Resolution ableitbar

Spezielle Resolutionsstrategien

Resolutionsmethode ist Grundlage für

Deduktionssysteme, Theorembeweiser, ...

Problem: Kombinatorische Explosion des Suchraums

Efizienzverbesserungen durch

1) Streichen überflüssiger Klauseln, z.B. :
   - tautologische Klauseln K , d.h. $\{A, \neg A\} \subseteq K$
   - subsumierte Klauseln: K_1 wird von K_2 subsumiert, falls $\sigma(K2) \subseteq K1$ bei einer geeigneten Substitution σ.

2) Heuristiken für Suchstrategie, Klauselgraphen

Problem: Widerspruchsvollständigkeit sichern.

Spezielle Resolutionsstrategien

Definition:

- Eine Atomformel ist ein *positives Literal*, eine negierte Atomformel ist ein *negatives Literal*.
- Eine *Klausel heißt negativ*, wenn sie nur negative Literale enthält.
- Eine *Klausel heißt definit*, falls sie genau ein positives Literal (und evtl. noch negative Literale) enthält.
- Eine Klausel heißt *HORN-Klausel*, wenn sie höchstens ein positives Literal (und evtl. noch negative Literale) enthält.

Hornklausel: definit (Prolog-Klauseln)
oder negativ (Prolog-Anfrage)

Spezielle Resolutionsstrategien

P-Resolution:
Eine der resolvierenden Klauseln enthält nur positive Literale.

N-Resolution:
Eine der resolvierenden Klauseln enthält nur negative Literale.

Lineare Resolution:
Resolution benutzt jeweils die im vorigen Schritt erzeugte Resolvente.

Input-Resolution:
Resolution benutzt jeweils die im vorigen Schritt erzeugte Resolvente und eine Klausel der Ausgangsmenge.
(Spezialfall der linearen Resolution).

Einheitsresolution:
Resolution benutzt jeweils mindestens eine ein-elementige Klausel.

Spezielle Resolutionsstrategien

Stützmengenresolution:
Resolution benutzt jeweils eine Klausel aus der Stützmenge **T**.
Als Stützmenge wird eine Teilmenge **T** der Ausgangsmenge **KI** verwendet mit **KI - T** erfüllbar.

Satz
P-Resolution, N-Resolution, lineare Resolution und Stützmengen-Resolution sind widerlegungsvollständig.
Input-Resolution und Einheitsresolution sind widerlegungsvollständig für HORN-Klauseln (aber nicht im allgemeinen Fall).

SLD-Resolution für HORN-Klauseln

S = „Selection Function“ (s.u.)
L = lineare Resolution
D = definite Klauseln

Definition

- Ein definites Programm **P** ist eine Menge definiter Klauseln.
- Eine Zielklausel ist eine negative Klausel.
- Ein SLD-Widerlegungsbeweis für eine (positive) Klausel G aus einem Programm **P** ist SLD-Ableitung von □ aus **P** ∪ {¬G} .

SLD-Resolution für HORN-Klauseln:

Start mit negativer Klausel ¬G .

In jedem Schritt wird eine negative mit einer definiten Klausel aus **P** resolviert. Alle Resolventen sind negativ.

Spezialfall der linearen Resolution, Input-Resolution, N-Resolution.

SLD-Resolution für HORN-Klauseln

Sei σ_i die im i-ten Schritt der SLD-Resolution verwendete Substitution (Unifikator).

Dann ist $\sigma = \sigma_1 * ... * \sigma_n$ die beim Erfolg nach n Schritten erzeugte Antwortsubstitution.

Satz

Für jede Antwortsubstitution σ
eines SLD-Widerlegungsbeweises für G aus **P** gilt

$$\mathbf{P} \models \sigma(G) .$$

Falls $\mathbf{P} \models \sigma(G)$, so existiert ein SLD-Widerlegungsbeweis für G aus **P** mit einer Antwortsubstitution σ' , die allgemeiner als σ ist.

SLD-Resolution für HORN-Klauseln

Jeder Resolutionsschritt der SLD-Resolution benutzt eine negative und eine definite Klausel.

Es sind zwei Entscheidungen zu treffen:

1. Auswahl eines Literals $\neg L$ der negativen Klausel mittels „selection function“ (im Prinzip beliebig: *Und-Verzweigung*).
2. Auswahl einer Klausel mit einem positiven Literal M, das mit L unifizierbar ist (*Oder-Verzweigung*).

Suche im Und-Oder-Baum,

- z.B. Breite-Zuerst (Findet ggf. eine Lösung.)
- oder Tiefe-Zuerst.

PROLOG

Logische Programmiersprache.

Algorithmus = Logik + Steuerung

HORN-Klauseln durch programmiersprachliche Konzepte ergänzt:

- E/A-Funktionen
- meta-logische Funktionen (Programm-Modifikation)
- Eingriff in Suchprozedur (Cut)

Steuerung durch Interpreter mit Auswahlstrategie:

1. links vor rechts
2. oben vor unten

und Suchstrategie:

Tiefe-Zuerst.

Spezielle Speicherorganisation für Effizienz:
• Prozedurkeller (aufgerufene Teilziele/Klauseln)
• Variablenbindungen

PROLOG

Problem: Behandlung der Negation

¬L mit SLD-Resolution aus HORN-Klauseln nicht beweisbar

Closed world assumption (CWA)

Postulat:
¬L gilt, wenn L nicht bewiesen werden kann.

Beweisverfahren „**Negation by failure**“:

¬L ist bewiesen, wenn L nicht beweisbar ist.

Problem: Nicht-Beweisbarkeit ist nicht aufzählbar.

PROLOG: Im Rahmen der verwendeten Beweis-Strategie ist nur **Negation by finite failure** bzgl. Tiefe-Zuerst-Suche realisiert.

PROLOG-Semantiken

- Deklarative Semantik
  Ableitbarkeit/Folgerungen aus Programm
- Prozedurale Semantik
  Verhalten des Prolog-Interpreters

Unterschiede:
- Suchverfahren (Tiefe-Zuerst)
- Seiteneffekte (z.B. Eingabe/Ausgabe)
- Eingriffe in Beweisprozedur (z.B. Cut)
- „Meta-logische“ Prädikate
- Negation
- Occur-Check
- . . .

PROLOG

Spezielles Verhalten wegen Negation by finite failure:

```
maennlich(X)  :-  not  weiblich  (X).
weiblich(anna).
weiblich(frieda).
?  -  maennlich(fritz).      -  yes
?  -  maennlich(anna).       -  no
?  -  maennlich(heidi).      -  yes
?  -  maennlich(X).          -  no
```

Seiteneffekte (z.B. E/A) abhängig von Klauselreihenfolge:

```
...,  X = a,  write(X),  ...
...,  write(X),  X  =  a,  ...
```

Reihenfolge mit Einfluss auf Erfolg:

```
...,  X = a,  var(X),  ...
...,  var(X),  X = a,  ...
```


PROLOG

Problematik Occur Check: x enthalten in $\sigma(x)$?
Beispiel: r(x) und r(f (x)) unifizieren, $\sigma(x)$ = f (x) ?
Unterschiedliche Varianten:

- als unendlichen bzw. zyklischen Term behandeln: r(...f (f (f (x))) ...)
- ignorieren.
  PROLOG-Systeme liefern unterschiedliche Antworten:
  Test mit Klausel p(X,f (X)) .

```
? - p(X,X).                    yes   ?
? - p(X,X),write(X).           X =   ?
? - p(X,X),p(Y,Y ),X = Y .     yes   ?
```

- verbieten: aufwendiger Test!

In vielen PROLOG-Systemen: Occur-Check wahlweise
(Programmtest mit Occur-Check, laufendes Programm ohne).

Leistungsfähigkeit PK1

Gut ausgebauter Kalkül, Klarheit von Begriffen und Verfahren.
Ersatz inhaltlicher Begriffe (Gültigkeit, Folgern)
durch formale Begriffe und Verfahren (Ableitbarkeit).

Nicht ausgedrückt werden können:
Quantifizierung von Relationen und Funktionen:
- für alle Funktionen mit ... gilt ...
- manchmal Ersatz durch Schema (vgl. Induktionsaxiom)

Logiken höherer Stufe
– erlauben Quantifizierung von Relationen und Funktionen
– sind nicht axiomatisierbar

Leistungsfähigkeit PK1

Erweiterungen/Modifikationen notwendig für
„Defaultwissen“:
- für gewöhnlich gilt ... *(Nicht-Monotonie des Folgerns!)*

Modale, temporale Operatoren:
- es ist möglich, dass ...
- ich nehme an, dass ...
- ich weiss, dass du weisst, dass ich weiss . . .
- irgendwann gilt ...
  (evtl. Umschreibung: „es existiert Zeitpunkt t mit ...“)

nicht-extensionale Operatoren
- Unterschied: „der Mann im Mond“ / „der quadratische Kreis“

differenziertere Wahrheitswerte (mehrwertige Logik)
- vgl. Fuzzy-Logik

Formales Ableiten (Resolution)

Voraussetzungen (Axiome):

A1: $\forall x (\neg R(x,x))$ (Irreflexivität)

A2: $\forall x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))$ (Transitivität)

Behauptung:

H: $\forall x \forall y (R(x,y) \rightarrow \neg R(y,x))$ (Asymmetrie)

Zu zeigen:

$A1 \wedge A2 \rightarrow H$ ist allgemeingültig

bzw.

$\neg (A1 \wedge A2 \rightarrow H)$ ist unerfüllbar

d.h.

$(A1 \wedge A2 \wedge \neg H)$ ist unerfüllbar

Formales Ableiten (Klauselform)

$(A1 \wedge A2 \wedge \neg H)=$

$\forall x(\neg R(x,x)) \wedge \forall x \forall y \forall z(R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z)) \wedge \neg \forall x \forall y(R(x,y) \rightarrow \neg R(y,x))$

ist semantisch äquivalent zu

$\forall x(\neg R(x,x)) \wedge \forall x \forall y \forall z(R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z)) \wedge \exists x \exists y \neg (R(x,y) \rightarrow \neg R(y,x))$

ist semantisch äquivalent zur pränexen Form

$\forall x \forall u \forall y \forall z \exists v \exists w(\neg R(x,x) \wedge (R(u,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(u,z)) \wedge \neg (R(v,w) \rightarrow \neg R(w,v)))$

ist semantisch äquivalent zur pränexen KNF

$\forall x \forall u \forall y \forall z \exists v \exists w(\neg R(x,x) \wedge (\neg R(u,y) \vee \neg R(y,z) \vee R(u,z)) \wedge R(v,w) \wedge R(w,v))$

ist erfüllbarkeitsäquivalent zur Skolemform

$\forall x \forall u \forall y \forall z(\neg R(x,x) \wedge (\neg R(u,y) \vee \neg R(y,z) \vee R(u,z)) \wedge R(f1(x,u,y,z),f2(x,u,y,z)) \wedge R(f2(x,u,y,z),f1(x,u,y,z)))$

ist erfüllbarkeitsäquivalent zur Klauselform

$\{ \{\neg R(x,x)\},\{\neg R(u,y),\neg R(y,z),R(u,z) \}, \{R(f1(x,u,y,z),f2(x,u,y,z))\}, \{R(f2(x,u,y,z),f1(x,u,y,z)\} \}$

Formales Ableiten (Klauselform)

Ausgehend von der Umstellung

$(A1 \wedge A2 \wedge \neg H) = (\neg H \wedge A1 \wedge A2) =$

ergibt sich einfachere Form:

ist semantisch äquivalent zur pränexen KNF

$\exists v \exists w(\forall x \forall u \forall y \forall z\ (R(v,w) \wedge R(w,v) \wedge \neg R(x,x) \wedge (\neg R(u,y) \vee \neg R(y,z) \vee R(u,z)))$

ist erfüllbarkeitsäquivalent zur Skolemform

$\forall x \forall u \forall y \forall z (R(c,d) \wedge (R(d,c) \wedge \neg R(x,x) \wedge (\neg R(u,y) \vee \neg R(y,z) \vee R(u,z)))$

ist erfüllbarkeitsäquivalent zur Klauselform

$\{ \{\neg R(x,x)\}, \{\neg R(u,y), \neg R(y,z), R(u,z)\}, \{R(c,d)\}, \{R(d,c)\} \}$