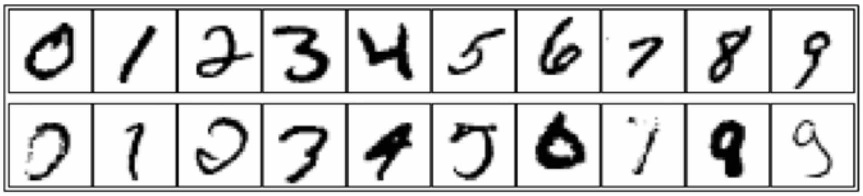
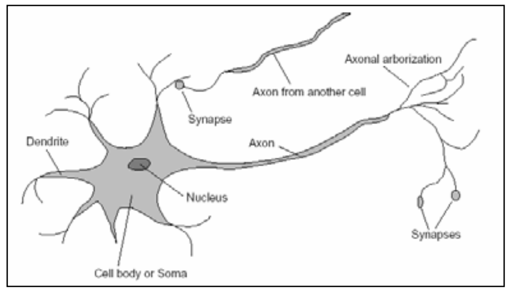
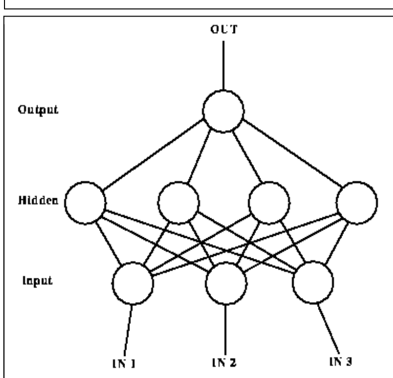
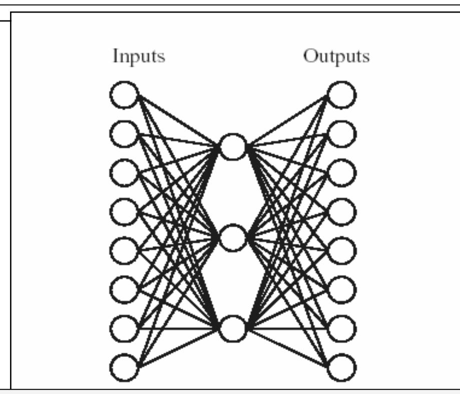
„Massive Parallelität“: Neuronale Netze





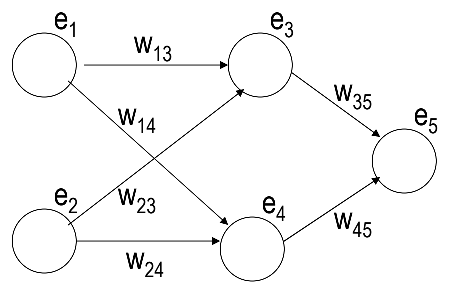
„Massive Parallelität“: Neuronale Netze





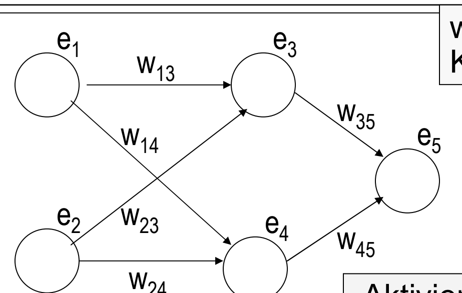
- Knoten: Neuronen
  Neuronen können erregt („aktiviert“) sein
- Kanten: Übertragung von Aktivierungen
  an Nachbar-Neuronen

„Massive Parallelität“: Neuronale Netze



- Kanten sind gewichtet
- Übertragene Aktivierung abhängig von Gewicht w_{ij}

„Massive Parallelität“: Neuronale Netze



$w_{ij} = 0$, falls keine Kante zwischen e_i und e_j

Aktivierung zum Zeitpunkt t :

$act_t : E \rightarrow R$

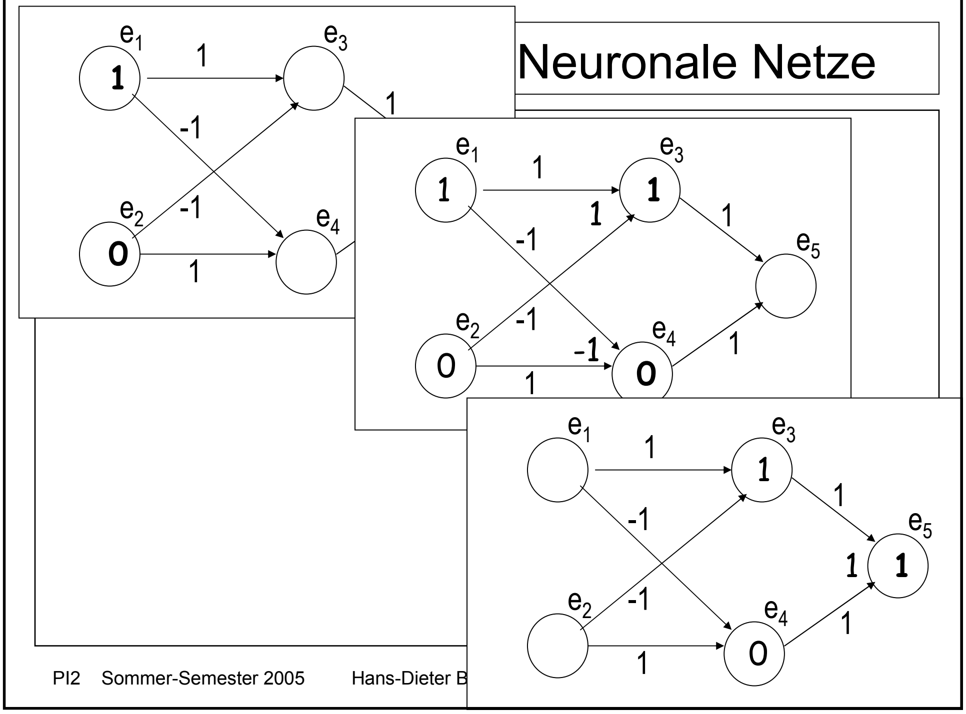
Propagierung von Aktivierungen z.B. gemäß:

$act_{t+1}(e_i) = 1$,

falls $w_{1i} * act_t(e_1) + w_{2i} * act_t(e_2) + \ldots + w_{5i} * act_t(e_5) > 0$

$act_{t+1}(e_i) = 0$, sonst

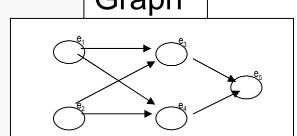
Neuronale Netze



Statische/dynamische Modelle

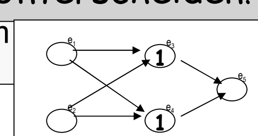
- Beschreibung statischer Zusammenhänge
  - Semantisches Netz
  - Klassendiagramm
  - Zustandsdiagramm (als Struktur)
  - Neuronales Netz (als Struktur)

Modell: Graph



Unterscheiden!

- Beschreibung dynamischer Abläufe
  - Aktueller Zustand im Zustandsdiagramm
  - Aktivierung im Neuronalen Netz



Modell:
Wechselnde Beschriftungen des Graphen

Erfordert Angaben für Übergänge (Transitionen) zwischen Zuständen, Aktivierungen usw.

Darstellungsformen für Graphen

- Adjazenz-Matrix:
  - Ausgangs-Knoten v als Zeilen
  - Eingangs-Knoten v′ als Spalten

  Matrix-Elemente:

  $m_{v,v'} = 1$, falls $[v,v'] \in E$
  $m_{v,v'} = 0$, falls $[v,v'] \notin E$

  bzw. bei Kanten-Beschriftungen auch:

  $m_{v,v'} = \beta([v,v'])$

  dabei spezieller Wert für $[v,v'] \notin E$, z.B. $\beta([v,v'])=0$

Darstellungsformen

- Inzidenz-Matrix:
  - Knoten v als Zeilen
  - Kanten e als Spalten

  Matrix-Elemente:

  $m_{v,e} = +1$, falls $e= [v,v'] \in E$
  $m_{v,e} = -1$, falls $e= [v',v] \in E$
  $m_{v,e} = 0$, sonst

Weitere Definitionen zu Graphen

- $G' = [V',E']$ ist Teilgraph von $G=[V,E]$,
  falls $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$ mit $E' \subseteq V' \times V'$

- Einschränkung von $G=[V,E]$ auf $V' \subseteq V$:
  $$G|V' =_{Def} [V', E \cap V' \times V']$$

- Für $e = [v,v'] \in E$: source(e) $=_{Def}$ v , target(e)$=_{Def}$ v′

- Eingangsvalenz (fan-in), Ausgangsvalenz (fan-out)
  fan-in(v) $=_{Def}$ card ({ e | $\exists v' \in V$: $e= [v',v] \in E$ })
  = card ({ $e \in E$ | target(e) = v })
  fan-out(v) $=_{Def}$ card ({ e | $\exists v' \in V$: $e= [v,v'] \in E$ })
  = card ({ $e \in E$ | source(e) = v })

Weg (Pfad) in einem Graphen

Gerichteter Weg

- Als Folge von Knoten
  $p = v_o, ..., v_n$ mit $\forall i (i \in \{ 1,...,n\} \rightarrow [v_{i-1},v_i] \in E)$
  n ist die *Länge* des Weges ($n \geq 0$)
  v_o = Anfang(p) v_n =Ende(p)
- Als Folge von Kanten
  $p = e_1, ..., e_n$ mit $\forall i(i \in \{1,...,n-1\} \rightarrow \text{target}(e_i)=\text{source}(e_{i+1}))$

- Ungerichteter Weg:
  $p = v_o, ..., v_n$ mit $\forall i(i \in \{1,...,n\} \rightarrow [v_{i-1},v_i] \in E \vee [v_i,v_{i-1}] \in E)$

Weg (Pfad) in einem Graphen

Einfacher Weg:

$p = v_0, \ldots, v_n$ mit $\forall i\ \forall j \in \{0,\ldots,n\}: v_i = v_j \rightarrow i = j$

Masche:

Zwei unterschiedliche einfache Wege p und q der Länge >0 mit Anfang(p)=Anfang(q) , Ende(p)=Ende(q)

(„Einfache“ Masche: Teilwege bilden keine Masche)

Zyklus in gerichteten Graphen:

Einfacher Weg p der Länge >0 mit Ausnahmebedingung Anfang(p)=Ende(p)

d.h. $v_0 = v_n$ und $\forall i \forall j \in \{0,\ldots,n-1\}: v_i = v_j \rightarrow i=j \vee \{i,j\} = \{0,n\}$

DAG (directed acyclic Graph): gerichteter Graph ohne Zyklen

Erreichbarkeit, Zusammenhang

v′ ist *erreichbar* von v,
falls ein gerichteter Weg p existiert
mit Anfang(p)=v , Ende(p)=v′ .

Die Relation *„Erreichbarkeit“* ist die *reflexive, transitive Hülle* der Relation E .

G heißt *zusammenhängend*,
wenn zu je zwei Knoten v,v′∈ V
ein ungerichteter (!) Weg p existiert
mit Anfang(p)=v , Ende(p)=v′

G heißt *stark zusammenhängend*,
wenn zu je zwei Knoten v,v′∈ V
ein gerichteter (!) Weg p existiert
mit Anfang(p)=v , Ende(p)=v′

wenn jeder Knoten v′ ∈ V von jedem Knoten v∈ V erreichbar ist.

Probleme für Graphen

- Ist ein Knoten v von einem Knoten v_0 *erreichbar*?
- Ist G *(stark) zusammenhängend*?
- Ist G *azyklisch?*
- Existiert ein *Hamilton-Kreis?* (Hamilton-Kreis: Zyklus, der ganz V umfaßt).
- Existiert ein *Euler-Kreis*? (Euler-Kreis: Zyklus, der jede Kante genau einmal enthält).
- *k-Färbungsproblem*: Existiert eine Knotenbeschriftung $\alpha: V \to \{1,...,k\}$ mit $\forall v\ \forall v'([v,v'] \in E \to \alpha(v) \neq \alpha(v'))$

Konstruktion der erreichbaren Knoten

Sei $G=[V,E]$ ein Graph, $v_0 \in V$.

$M(v_0) =_{Def} \{ v \mid v \text{ erreichbar von } v_0 \}$

$M_i(v_0)$ sind die mit Wegen der Länge kleiner gleich i erreichbaren v

Konstruktion:

- Schritt 0: $M_0(v_0) := \{ v_0 \}$
- Schritt i: $M_i(v_0) := M_{i-1}(v_0) \cup \{ v' \mid \exists\, v \in M_{i-1}(v_0) : [v,v'] \in E \}$
- Abbruch, falls $M_i(v_0) = M_{i-1}(v_0)$

Satz:

Der Algorithmus bricht nach höchstens card(V) Schritten ab. Beim Abbruch gilt $M_{i-1}(v_0) = M(v_0)$.

Konstruktion der erreichbaren Knoten

Folgerungen

Für endliche Graphen G ist entscheidbar,
- ob ein Knoten v‘ von einem Knoten v erreichbar ist.
- ob G stark zusammenhängend ist.
- ob G zusammenhängend ist.

Wenn v‘ von einem Knoten v erreichbar ist, so auch mit einem Weg der Länge $l < card(V)$.

Weitere Sätze und Komplexitätsbetrachtungen in Theoretischer Informatik