

Konstruktion einer stabilen, nicht äquationalen Theorie

- Diplomarbeit -

Humboldt-Universität zu Berlin

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II

Institut für Mathematik

eingereicht von: Olaf Beyersdorff

geboren: am 18.08.1973 in: Greifswald

Betreuer: Prof. Dr. A. Baudisch

Berlin, den 10. Oktober 2000

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Äquationale Theorien	4
3	Die freie Pseudoebene	7
4	Der freie Pseudoraum von Baudisch und Pillay	10
5	Der freie Pseudoraum von Hrushovski und Srouf	13
6	Die Beziehung zwischen Σ und Γ	19
7	Die Vollständigkeit von Γ	28
8	Die ω -Stabilität von Γ	35
9	Die Nichtäquationalität von Γ	52
	Literatur	57
	Erklärung	59
	Thesen	60

1 Einleitung

Stabilität ist ein sehr erfolgreiches und in den letzten Jahrzehnten stark untersuchtes modelltheoretisches Konzept. In stabilen Theorien läßt sich eine Unabhängigkeitsrelation angeben, mit deren Hilfe über Modelle stabiler Theorien weitreichende Strukturaussagen getroffen werden können. Von den Begriffen der Stabilitätstheorie ausgehend sind verschiedene Verallgemeinerungen, wie einfache Theorien, und Spezialfälle stabiler Theorien untersucht worden. Äquationale Theorien, die von Srouf (siehe [10] und [16]) eingeführt wurden, bilden eine solche Teilklasse der stabilen Theorien. Die äquationalen Theorien werden dadurch charakterisiert, daß alle definierbaren Mengen durch boolesche Kombinationen von Gleichungen beschrieben werden können. Hierbei heißt eine Formel eine Gleichung, falls, den aus der algebraischen Geometrie für Polynomgleichungen bekannten Sachverhalt verallgemeinernd, jeder Durchschnitt von Mengen, die durch Instanzen dieser Formel definiert werden, bereits zu einem endlichen Teildurchschnitt äquivalent ist.

In einem recht einfachen Argument kann gezeigt werden, daß äquationale Theorien stabil sind (siehe hierzu Kapitel 2). Die vorliegende Arbeit widmet sich der von Srouf gestellten Frage, ob die äquationalen Theorien eine echte Teilklasse der stabilen Theorien bilden. Der freie Pseudoraum von Hrushovski und Srouf, welcher hier beschrieben wird, gibt auf diese Frage eine positive Antwort. Die Theorie dieses Pseudoraumes ist das erste und bisher einzige bekannte Beispiel einer stabilen und nicht äquationalen Theorie. Der freie Pseudoraum stellt ein 3-dimensionales Analogon zu der erstmals von Lachlan in [8] vorgestellten Pseudoebene dar, die ein bereits längere Zeit untersuchtes Objekt ist. Insbesondere wurde in [3] gezeigt, daß die 1-basierten („1-based“) oder auch schwach normalen Theorien dadurch gekennzeichnet sind, keine vollständige Typ-definierbare Pseudoebene zu enthalten. Speziell ist also die freie Pseudoebene ein typisches Beispiel einer stabilen, nicht 1-basierten Theorie. Da durch den Begriff der Äquationalität 1-basierte Theorien in natürlicher Weise verallgemeinert werden (siehe [6]), motiviert dies den Ansatz, eine stabile, nicht äquationale Theorie in einer höherdimensionalen Variante der freien Pseudoebene zu suchen.

Der freie Pseudoraum wurde von Hrushovski und Srouf in der unveröffentlichten Arbeit [4] entwickelt. Es wird dort zunächst allgemeiner auf äquationale Theorien eingegangen und dann in einem zweiten Teil der freie Pseudoraum als Beispiel einer stabilen, nicht äquationalen Theorie behandelt. Die Darstellung ist hierbei jedoch recht knapp und die Beweise nur skizzenhaft. Die Ideen zur Äquationalität im ersten Teil von [4] wurden von Junker und Kraus in [6] und [7] aufgegriffen und weiterentwickelt.

Unabhängig von Hrushovskis Arbeit haben Baudisch und Pillay in [1] einen weiteren freien Pseudoraum vorgestellt. Die Motivation ist hier eine andere. Der freie Pseudoraum von Baudisch und Pillay ist ein Beispiel einer

stabilen, nicht CM-trivialen Theorie (zur CM-Trivialität, einem Begriff von Hrushovski, siehe [5] und [12]). Damit wird gezeigt, daß die in [14] von Pillay entworfene Hierarchie n -üppiger Theorien („ n -ample theories“) bis zur zweiten Stufe echt ist. Die erste Stufe der 1-üppigen Theorien bilden hierbei wiederum die nicht 1-basierten Theorien, während die 2-üppigen Theorien den nicht CM-trivialen Theorien entsprechen.

Die Pseudoräume in [1] und [4] sind axiomatisch recht unterschiedlich gefaßt. Insbesondere ist die Sprache in Hrushovskis Beispiel durch Farben für Punkte und Geraden sowie zusätzliche Inzidenzbeziehungen gegenüber [1] reichhaltiger. In dem Vorgehen zur Untersuchung der Theorie der Pseudoräume weisen die Darstellungen jedoch viele Gemeinsamkeiten auf.

Die vorliegende Arbeit verfolgt nun zwei Ziele: zum einen soll eine Ausarbeitung der im zweiten Teil von [4] angegebenen Resultate vorgelegt werden, zum anderen wird die Beziehung zwischen den beiden Pseudoräumen untersucht. Hierzu wird in Kapitel 6 gezeigt, daß man durch Fortlassen der Farben des Pseudoraumes von Hrushovski und Srouf den Pseudoraum von Baudisch und Pillay erhält, die Theorie des einen Raumes ist also das Redukt der anderen.

In Kapitel 2 wird kurz auf äquationale Theorien eingegangen, um die für diese Arbeit nötigen Begriffe und Resultate bereitzustellen. Einen guten Überblick über die bisherigen Erkenntnisse zu äquationalen Theorien vermitteln die Artikel [6],[7] und [10], aus welchen auch die Darstellung in Kapitel 2 entlehnt ist. Da beide genannten Pseudoräume starken Gebrauch von dem Konzept der freien Pseudoebene machen, wird dieses kurz in Kapitel 3 erläutert. Die Kapitel 4 und 5 sind den Axiomensystemen der freien Pseudoräume gewidmet. Die Konsistenz des Axiomensystems Γ des freien Pseudoraums von Hrushovski und Srouf zeige ich unter Benutzung der Konsistenz und des Standardmodells der Theorie Σ aus [1]. In Kapitel 6 wird der schon oben erwähnte Zusammenhang der Pseudoräume erörtert. Die Verfahrensweise ist hier, wie auch zum Teil in den folgenden Kapiteln, kombinatorisch geprägt. Anschließend wird unter Verwendung spieltheoretischer Techniken in den Kapiteln 7 und 8 die Vollständigkeit sowie die ω -Stabilität von Γ bewiesen. Hierbei habe ich mich hauptsächlich an dem Vorgehen in [1] orientiert und die dortige Beweisführung an die Situation in Γ angepaßt. Letztlich werden in Kapitel 9 Morleyränge in Γ berechnet und, der Darstellung in [4] folgend, gezeigt, daß die Theorie Γ nicht äquational ist.

Die modelltheoretische Notation dieser Arbeit folgt der allgemeinen Konvention (siehe [2] oder [15]). Für die verwendeten Stabilitätstheoretischen Begriffe sei auf [9] und [13] verwiesen.

2 Äquationale Theorien

Für diesen Abschnitt sei T eine vollständige Theorie in der Sprache L . \bar{M} sei ein Monstermodell von T . Im folgenden werden L -Formeln der Form $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ ohne Parameter betrachtet, wobei \bar{x} und \bar{y} verschiedene Parametertupel seien. Sei Δ eine Menge von L -Formeln der eben angegebenen Form. Eine Menge X heißt Δ -definierbar, falls es eine Formel $\phi(\bar{x}, \bar{y}) \in \Delta$ und Parameter $\bar{a} \in \bar{M}$ gibt, so daß X durch $\phi(\bar{x}, \bar{a})$ definiert wird.

Eine Familie $\{A_i : i \in I\}$ von Mengen besitzt die absteigende Durchschnittseigenschaft, falls es für jedes $J \subseteq I$ eine endliche Teilmenge $J_0 \subseteq J$ mit $\bigcap_{j \in J} A_j = \bigcap_{j \in J_0} A_j$ gibt. Dies ist offenbar dazu äquivalent, daß es keine unendliche, echt absteigende Kette von Durchschnitten der A_i gibt.

Definition 2.1 *Eine L -Formel $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ ist eine Gleichung in \bar{x} , falls $\{\phi(\bar{M}, \bar{a}) : \bar{a} \in \bar{M}\}$ die absteigende Durchschnittseigenschaft besitzt.*

Anders ausgedrückt ist für eine Gleichung ϕ jede unendliche Konjunktion von Instanzen $\bigwedge_{j \in J} \phi(\bar{x}, \bar{a}_j)$ zu einer endlichen Konjunktion $\bigwedge_{j \in J_0} \phi(\bar{x}, \bar{a}_j)$ mit einem endlichen $J_0 \subseteq J$ äquivalent.

Die Theorie T heißt äquational, falls jede Formel äquivalent zu einer booleschen Kombination von Gleichungen ist.

Aus der Definition von Gleichungen ist unmittelbar ersichtlich, daß endliche Konjunktionen von Gleichungen wieder Gleichungen ergeben. Die nächste Bemerkung zeigt dies auch für endliche Disjunktionen.

Bemerkung 2.2 *Jede endliche Disjunktion von Gleichungen ist eine Gleichung.*

BEWEIS. Sei $\phi(\bar{x}, \bar{y}) = \bigvee_{i=1}^n \psi_i(\bar{x}, \bar{y}_i)$ mit $\bar{y} = \bar{y}_1 \dots \bar{y}_n$ und Gleichungen $\psi_1(\bar{x}, \bar{y}_1), \dots, \psi_n(\bar{x}, \bar{y}_n)$. Sei $\Delta = \{\psi_1(\bar{x}, \bar{y}_1), \dots, \psi_n(\bar{x}, \bar{y}_n)\}$. Endliche Durchschnitte von Δ -definierbaren Mengen können dann ebenfalls durch Gleichungen definiert werden.

Angenommen, $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ ist keine Gleichung. Dann gibt es eine unendliche, echt absteigende Kette $X_1 \supset X_2 \supset \dots$, wobei die X_i endliche Durchschnitte von ϕ -definierbaren Mengen sind. X_1 läßt sich als $X_1 = Y_1 \cup \dots \cup Y_k$ schreiben, wobei Y_1, \dots, Y_k endliche Durchschnitte Δ -definierbarer Mengen sind. Nun gibt es einen Index l , $1 \leq l \leq k$, und eine unendliche Folge $j_1 < j_2 < \dots$, so daß $Y_l \supset Y_l \cap X_{j_1} \supset Y_l \cap X_{j_2} \supset \dots$ eine unendliche, echt absteigende Kette ist. Ebenso kann ich $Y_l \cap X_{j_1}$ als endliche Vereinigung von Durchschnitten Δ -definierbarer Mengen schreiben. Auf diese Weise fortfahrend erhalte ich eine unendliche, echt absteigende Kette von Durchschnitten von Δ -definierbaren Mengen. Dann gibt es eine Formelmengemenge $\Delta' \subseteq \Delta$ und eine unendliche Teilkette der eben konstruierten Kette, so daß sämtliche Mengen dieser Teilkette

von allen Formeln aus Δ' Gebrauch machen. Sei o.B.d.A. $\Delta' = \{\psi_1, \dots, \psi_m\}$ mit $m \leq n$. Die Formel

$$\psi(\bar{x}, \bar{y}_1 \dots \bar{y}_m) = \psi(\bar{x}, \bar{y}_1) \wedge \dots \wedge \psi(\bar{x}, \bar{y}_m)$$

ist dann eine Gleichung, und die obige Teilkette besteht aus Durchschnitten von ψ -definierbaren Mengen. Dies ist ein Widerspruch. \square

Die Menge der Gleichungen ist damit abgeschlossen gegenüber positiven booleschen Kombinationen.

Bemerkung 2.3 *Eine äquationale Theorie T ist stabil.*

BEWEIS. Sei A eine Menge der Mächtigkeit λ . Ein Typ $p \in S_1(A)$ wird durch seine ϕ -Teile $\{\phi(x, \bar{a}) \in p : \bar{a} \in A\}$ für alle L -Formeln $\phi(x, \bar{y})$ beschrieben. Ist ϕ eine Gleichung, so ist ein solcher ϕ -Teil bereits durch eine endliche Menge von Instanzen von ϕ bestimmt. Für die Wahl dieser endlichen Menge gibt es λ viele Möglichkeiten. Ist die Theorie T äquational, so gibt es also über A nur $\lambda^{|\mathcal{L}|}$ viele Typen. Für $\lambda^{|\mathcal{L}|} = \lambda$ gilt folglich $|S_1(A)| = \lambda$, und T ist stabil. \square

Eine andere Möglichkeit des Beweises von Bemerkung 2.3 ist der Nachweis, daß Gleichungen stabile Formeln sind, d.h. nicht die Ordnungseigenschaft besitzen. Dies wird in [6] gezeigt. Wie bereits eingangs gesagt, ist es das Ziel dieser Arbeit zu zeigen, daß die Umkehrung von Bemerkung 2.3 nicht richtig ist.

In äquationalen Theorien, welche nach obiger Bemerkung stabil sind, wird die Gabelungsrelation (das Forking) durch Gleichungen kontrolliert. Nachfolgende Ausführungen entstammen [4] bzw. [7] und sollen dies näher erläutern.

Für einen Typ p und eine Gleichung $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ sei

$$\phi_p(\bar{x}) = \bigwedge \{\phi(\bar{x}, \bar{c}) : p \vdash \phi(\bar{x}, \bar{c}) \text{ mit } \bar{c} \in \bar{M}\}.$$

Da ϕ eine Gleichung ist, ist $\phi_p(\bar{x})$ äquivalent zu einer endlichen Konjunktion und kann als erststufige Formel aufgefaßt werden. Analog zu der in stabilen oder einfachen Theorien gegebenen Unabhängigkeitsrelation läßt sich nun äquationale Unabhängigkeit erklären.

Definition 2.4 *Seien $A \subseteq B$ Mengen und \bar{c} ein Tupel von Elementen. Dann ist \bar{c} äquational unabhängig von B über A , falls für jede Gleichung $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ mit $l(\bar{x}) = l(\bar{c})$ die Formel $\phi_{tp(\bar{c}/B)}(\bar{x})$ fast über A ist.*

Eine stabile (oder einfache) Theorie heißt fast äquational, falls Nichtgabelung mit äquationaler Unabhängigkeit übereinstimmt.

Äquationale Theorien sind fast äquational. In [7] wird gezeigt, daß äquationale Unabhängigkeit mit lokaler Nichtgabelung bzgl. der Gleichungen der Theorie (im Sinne der lokalen Stabilitätstheorie, wie sie in [13] dargestellt wird)

zusammenfällt. Weiter wird in [7] der Begriff der Fast-Äquationalität auf beliebige Theorien ausgedehnt und die Frage aufgeworfen, ob es eine einfache Theorie gibt, die nicht fast äquational ist, wobei die Autoren diesbezüglich eine positive Vermutung äußern. Alle bisher bekannten einfachen Theorien sind fast äquational, insbesondere ist die Theorie des in dieser Arbeit konstruierten freien Pseudoraumes zwar nicht äquational, aber fast äquational, welches schon in [4] angemerkt ist.

3 Die freie Pseudoebene

Zu Beginn soll die freie Pseudoebene vorgestellt werden, ein Konzept, welches auf Lachlan zurückgeht. Der Begriff der freien Pseudoebene wird für das weitere von grundlegender Bedeutung sein.

Die Sprache besteht aus einstelligen Prädikaten B und C für Geraden und Punkte sowie einer zweistelligen Relation I für die Inzidenzbeziehung zwischen Geraden und Punkten. Das Axiomensystem Δ der freien Pseudoebene besteht aus folgenden Axiomen:

- $\Delta 1)$ Jedes Element ist entweder ein Punkt oder eine Gerade.
- $\Delta 2)$ $I \subseteq (B \times C) \cup (C \times B)$ ist eine symmetrische Relation zwischen Geraden und Punkten.
- $\Delta 3)$ Jeder Punkt liegt mittels I auf unendlich vielen Geraden. Umgekehrt enthält jede Gerade unendlich viele Punkte.
- $\Delta 4)$ Es gibt keine Kreise, d.h. es existieren nicht paarweise verschiedene Elemente x_0, \dots, x_n mit $I(x_i, x_{i+1})$, $0 \leq i \leq n - 1$, und $I(x_n, x_0)$.

Das Standardmodell N_0 von Δ hat die folgende Form. Der Grundbereich von N_0 ist $\omega^{<\omega}$ (d.h. die Menge der endlichen Folgen natürlicher Zahlen). Die Menge der Geraden von N_0 besteht aus den Folgen aus $\omega^{<\omega}$ von gerader Länge. Die Folgen ungerader Länge bilden die Menge der Punkte. Die Inzidenzbeziehung $I(x, y)$ gilt, falls x ein direkter Vorgänger oder Nachfolger von y ist. Offensichtlich ist N_0 ein abzählbares Modell von Δ , welches zudem zusammenhängend ist, d.h. je zwei Elemente können durch einen Weg aus Geraden und Punkten miteinander verbunden werden. Ohne Beweis sei hier bemerkt, daß Δ vollständig ist. Die Theorie Δ der freien Pseudoebene ist somit die Theorie der unendlichen, unendlich verzweigten Bäume.

Als nächstes soll eine Modifikation der eben beschriebenen freien Pseudoebene eingeführt werden, die dadurch entsteht, daß Geraden und Punkte zusätzlich Farben erhalten. Die gefärbte Pseudoebene ist nicht von eigenständigem Interesse, wird aber als Konstruktionselement in den nächsten Kapiteln Verwendung finden, weswegen sie an dieser Stelle studiert werden soll. Die Sprache wird um einstellige Relationen C_r, C_w, B_r und B_w für rote bzw. weiße Punkte und rote bzw. weiße Geraden bereichert. Zu den oben angegebenen Axiomen $\Delta 1)$ bis $\Delta 4)$ treten noch drei weitere, die Farben betreffende Axiome hinzu.

- $\Delta 5)$ Jede Gerade ist entweder rot oder weiß, d.h. sie erfüllt entweder B_r oder B_w . Gleiches gilt für Punkte.
- $\Delta 6)$ Jeder Punkt liegt auf unendlich vielen roten und unendlich vielen weißen Geraden.

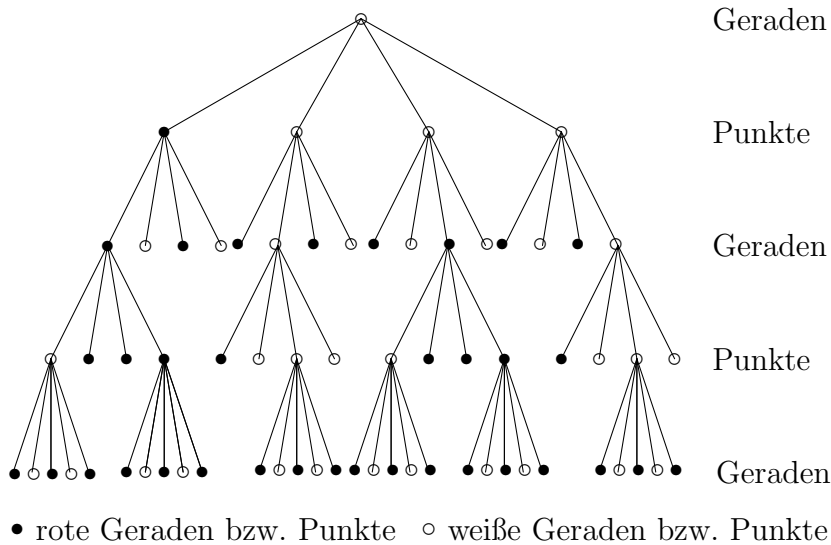


Abbildung 1: Die freie gefärbte Pseudoebene

$\Delta 7$) Auf jeder roten (bzw. weißen) Gerade b gibt es genau einen weißen (bzw. roten) Punkt c , welcher der Ausnahmepunkt von b genannt wird.

Die Menge der Axiome $\Delta 1$) bis $\Delta 7$) sei mit Δ' bezeichnet. Modelle von Δ' heißen freie gefärbte Pseudoebenen.

Das Standardmodell N'_0 der gefärbten Pseudoebene entsteht aus dem Standardmodell N_0 von Δ durch Einfärben der Geraden und Punkte. Die Geraden werden wie folgt gefärbt:

$$\begin{aligned} B_r(N'_0) &= \{\eta : \eta \in B(N'_0), \eta(l(\eta)) \text{ gerade}\} \\ B_w(N'_0) &= \{\eta : \eta \in B(N'_0), \eta(l(\eta)) \text{ ungerade}\} \end{aligned}$$

Dadurch liegt, wie in Abbildung 1 veranschaulicht, jeder Punkt in unendlich vielen roten und unendlich vielen weißen Geraden, wodurch $\Delta 6$) erfüllt wird.

Jetzt ist noch die Farbe der Punkte anzugeben. Ist der unmittelbare Vorgängerpunkt c einer Gerade b in $B(N'_0)$ von einer anderen Farbe als b , so ist c der Ausnahmepunkt von b , und alle Nachfolger von b werden mit der Farbe von b versehen. Haben b und c die gleiche Farbe, so ist der Ausnahmepunkt unter den Nachfolgern von b frei wählbar, und alle anderen Punkte werden wie b gefärbt (siehe hierzu Abbildung 1, wo der Ausnahmepunkt stets der Nachfolger „ganz links“ ist). Hierdurch wird $\Delta 7$) erfüllt. N'_0 ist somit ein Modell von Δ' .

Folgendes Lemma wird an späterer Stelle nützlich sein.

Lemma 3.1 *Seien M und N zwei abzählbare zusammenhängende freie gefärbte Pseudoebenen. Dann sind M und N isomorph.*

BEWEIS. Ich werde einen Isomorphismus f direkt angeben. Seien $b \in M$ und $b' \in N$ zwei Geraden derselben Farbe. Setze $f(b) = b'$. Erweitere f nun zu

einer Bijektion zwischen den Punkten auf b und b' . Dabei werde der Ausnahmepunkt von b auf den Ausnahmepunkt von b' abgebildet. Wähle jetzt einen beliebigen Punkt $c \in b$. Nach Konstruktion von f besitzen c und $f(c)$ dieselbe Farbe. Der Punkt c liegt wegen $\Delta 6$) auf unendlich vielen roten und unendlich vielen weißen Geraden. Das gleiche gilt für $f(c)$. Erweitere nun f zu einer Bijektion zwischen den c und $f(c)$ enthaltenden Geraden unter Berücksichtigung der Geradenfarben. Dies werde für jeden Punkt $c' \in b$ so getan. Wähle dann wieder eine c' enthaltende von b verschiedene Gerade b'' und erweitere f zu einer Bijektion zwischen den Punkten auf b'' und denen auf $f(b'')$. In dieser Weise werde fortgefahren. Da wegen $\Delta 4$) zwei Geraden höchstens einen Punkt gemeinsam haben und wegen des Zusammenhanges von M und N die Pseudoebenen durch das oben beschriebene Verfahren ausgeschöpft werden, kommt durch diese Vorschrift ein Isomorphismus f zwischen M und N zustande. \square

Korollar 3.2 *Die Theorie Δ' der gefärbten Pseudoebene ist vollständig.*

4 Der freie Pseudoraum von Baudisch und Pillay

In diesem Abschnitt soll ein 3-dimensionales Analogon zu der im letzten Kapitel betrachteten freien Pseudoebene vorgestellt werden, wie es in [1] entwickelt wurde. Ich werde hier nur einen kurzen Abriß der dort dargestellten Resultate geben, für die Details sei auf [1] verwiesen.

Zu den Punkten und Geraden der freien Pseudoebene treten Ebenen als neue Objekte hinzu. Ebenen, Geraden und Punkte werden durch einstellige Relationen A, B, C kenntlich gemacht. Es gibt zwischen Ebenen und Geraden eine Inzidenzrelation J sowie eine entsprechende Relation I zwischen Geraden und Punkten. Die Sprache L besteht somit aus den einstelligen Relationen A, B, C sowie den zweistelligen Relationen I und J . Der freie Pseudoraum wird folgendermaßen axiomatisiert:

$\Sigma 0$) Jedes Element erfüllt genau eine der Relationen A, B, C . $J \subseteq (A \times B) \cup (B \times A)$ und $I \subseteq (B \times C) \cup (C \times B)$ sind symmetrische Relationen.

Vor der Angabe der übrigen Relationen muß etwas Terminologie festgelegt werden, welche für den Rest dieser Arbeit benutzt werden wird.

Wie bereits in $\Sigma 0$) geschehen, bezeichne A die Menge der Ebenen, B die der Geraden und C die Menge der Punkte. Ebenen werden im folgenden meist $a, a', a_i \dots$, Geraden $b, b', b_i \dots$ und Punkte $c, c', c_i \dots$ genannt. Wird ein Element in dieser Weise bezeichnet, so soll sich auch ohne nähere Erklärung verstehen, ob es sich hierbei um eine Ebene, Gerade oder einen Punkt handelt.

Eine Gerade b oder eine Ebene a wird mit den auf ihr liegenden Punkten identifiziert, d.h. ich setze

$$\begin{aligned} a &= \{c \in C : \text{es existiert ein } b \in B \text{ mit } J(a, b) \text{ und } I(b, c)\} \\ b &= \{c \in C : I(b, c)\}. \end{aligned}$$

Ausdrücke der Form $c \in b$, $b \subset a$ oder $a \cap b$ werden dadurch sinnvoll und dienen der Abkürzung der ihnen entsprechenden Beziehungen der Inzidenzrelationen I und J .

Ferner werde ich folgende Definition benutzen:

Definition 4.1 (i) Sei a eine Ebene. Dann sei

$$\begin{aligned} B(a) &= \{b \in B : J(a, b)\} \\ C(a) &= \{c \in C : c \in a\}. \end{aligned}$$

Analog werden für einen Punkt c die Mengen $A(c)$ und $B(c)$ definiert.

(ii) Seien d_0, \dots, d_n Elemente, d.h. Punkte, Geraden oder Ebenen. Die Folge (d_0, \dots, d_n) heißt Sequenz, falls für alle $0 \leq i \leq n - 1$ entweder $I(d_i, d_{i+1})$ oder $J(d_i, d_{i+1})$ gilt. Ist außerdem für alle $0 \leq i < j \leq n$ mit $(i, j) \neq (0, n)$ noch $d_i \neq d_j$ erfüllt, so wird die Sequenz (d_0, \dots, d_n) als Weg zwischen d_0 und d_n bezeichnet. Sind dabei alle Elemente d_i Ebenen oder Geraden, so spreche ich von AB -Wegen. Ebenso sind BC -Wege erklärt. Wege heißen mitunter auch ABC -Wege. Die Länge eines Weges sei die Anzahl der verschiedenen Elemente, welche auf diesem Weg vorkommen, d.h. die Länge des obigen Wegs ist n oder $n + 1$.

(iii) Ein Kreis ist ein Weg (d_0, \dots, d_n) mit $d_0 = d_n$.

Es können jetzt die übrigen Axiome des Axiomensystems Σ formuliert werden.

$\Sigma 1)(a)$ (A, B, J) ist eine freie Pseudoebene. Dual dazu gilt:

$\Sigma 1)(b)$ (B, C, I) ist eine freie Pseudoebene.

$\Sigma 2)(a)$ Für jede Ebene a ist $(B(a), C(a), I)$ eine freie Pseudoebene, und dual dazu gilt:

$\Sigma 2)(b)$ Für jeden Punkt c ist $(A(c), B(c), J)$ eine freie Pseudoebene.

$\Sigma 3)(a)$ Der Durchschnitt zweier verschiedener Ebenen ist entweder leer oder ein Punkt oder eine Gerade. Die duale Bedingung hierzu ist:

$\Sigma 3)(b)$ Sind c und c' zwei verschiedene Punkte, so ist die Menge der Ebenen, welche c und c' enthalten, entweder leer oder einelementig oder besteht genau aus den Ebenen, welche eine gemeinsame Gerade enthalten.

$\Sigma 4)(a)$ Sei a eine Ebene und $X = (a, b, \dots, b', a)$ ein Kreis der Länge n . Dann existiert ein BC -Weg zwischen b und b' der Länge höchstens $n - 1$, welcher nur Punkte aus X und Geraden aus a enthält.

$\Sigma 4)(b)$ Sei c ein Punkt und $X = (c, b, \dots, b', c)$ ein Kreis der Länge n . Dann existiert ein AB -Weg der Länge höchstens $n - 1$, welcher aus Ebenen aus X und den Punkt c enthaltenden Geraden besteht.

Aus den Axiomen ist sofort ersichtlich, daß sich Punkte und Ebenen vollkommen dual zueinander verhalten, d.h. die Rolle der Punkte und Ebenen ist vertauschbar. Entsprechend werden viele Argumente unter Ausnutzung der Dualitätseigenschaft geführt: es genügt die entsprechende Eigenschaft für Punkte und Geraden nachzuweisen, für die Ebenen und Geraden folgt dieselbe Eigenschaft dann unter Ausnutzung der dualen Axiome. In Kapitel 6 wird gezeigt, daß es nicht unbedingt notwendig ist, diese Dualität axiomatisch zu

fordern, sie liegt in der Natur des Pseudoraumes und folgt bereits aus der ersten Hälfte (den (a)-Axiomen) von Σ .

In [1] wird ein abzählbares zusammenhängendes Standardmodell M_0 von Σ angegeben, dessen Konstruktion im nächsten Kapitel dazu benutzt werden wird, ein Modell des freien Pseudoraumes von Hrushovski und Srour zu erhalten. Ferner wird gezeigt, daß die Theorie Σ vollständig, ω -stabil und nicht CM-trivial ist.

5 Der freie Pseudoraum von Hrushovski und Srour

In diesem Kapitel soll ein weiterer freier Pseudoraum vorgestellt werden. Dieser wird durch das Axiomensystem Γ des freien Pseudoraumes von Hrushovski und Srour aus [4] beschrieben. Der freie Pseudoraum von Hrushovski und Srour hat viele Gemeinsamkeiten mit dem durch Σ gegebenen Raum, es gibt jedoch gegenüber Σ einige Erweiterungen. Vor der Angabe der Axiome soll das System Γ kurz beschrieben werden.

Wie in dem freien Pseudoraum des letzten Abschnitts bestehen Modelle von Γ aus Punkten, Geraden und Ebenen. Es gibt Relationen für die Inzidenzbeziehungen zwischen Punkten und Geraden und zwischen Geraden und Ebenen sowie direkte Inzidenzbeziehungen zwischen Punkten und Ebenen. Die Geraden sind entweder rot oder weiß, wobei die Farbe durch einstellige Relationen B_r und B_w auf den Geraden festgelegt wird. Die Punkte sind ebenfalls rot oder weiß gefärbt, wobei die Farbe eines Punktes über die beiden zweistelligen Relationen I_r und I_w zwischen Punkten und Ebenen geregelt wird. Ein Punkt kann somit die Farbe von Ebene zu Ebene wechseln. Mittels I_r und I_w , welche direkte Inzidenzbeziehungen zwischen Punkten und Ebenen sind, besteht eine Ebene aus einem roten und einem weißen Bereich. Eine rote Gerade in einer Ebene enthält nur Punkte aus dem roten Bereich dieser Ebene bis auf genau einen Punkt aus dem weißen Bereich, den Ausnahmepunkt der Geraden auf dieser Ebene. Ähnliches gilt für weiße Geraden. Die Geraden und Punkte einer Ebene bilden damit eine freie gefärbte Pseudoebene. Schließlich gibt es Axiome, die besagen, daß Modelle von Γ maximal kreisfrei sind.

Die Sprache L' für Γ besteht aus einstelligen Relationen A, B, B_r, B_w und C für Ebenen, Geraden (rote bzw. weiße) und Punkte sowie zweistelligen Relationen I, J, I_r und I_w für die verschiedenen Inzidenzbeziehungen. Die Sprache L' ist somit eine Erweiterung der im letzten Kapitel angegebenen Sprache L . Das Axiomensystem Γ in der Sprache L' aus [4] enthält die folgenden Axiome:

$\Gamma 0$) Jedes Element erfüllt genau eine der Relationen A, B, C . Die Geraden sind entweder rot oder weiß, d.h. jedes Element, welches B erfüllt, erfüllt auch genau eine der Relationen B_r und B_w .

$I \subset (B \times C) \cup (C \times B)$ ist symmetrisch und steht für die Inzidenzbeziehung zwischen Geraden und Punkten. Eine Gerade $b \in B$ wird mit $\{c \in C : I(b, c)\}$ identifiziert.

$\Gamma 1$) $I_r, I_w \subset (A \times C) \cup (C \times A)$, $I_r \cap I_w = \emptyset$. I_r und I_w sind symmetrisch und stehen für die Inzidenz zwischen roten bzw. weißen Punkten und Ebenen. Eine Ebene a wird identifiziert mit $\{c \in C : I_r(c, a) \vee I_w(c, a)\}$.

Der rote bzw. weiße Bereich einer Ebene a wird mit $a_r = \{x : I_r(x, a)\}$ bzw. $a_w = \{x : I_w(x, a)\}$ bezeichnet.

$\Gamma 2)$ $J \subset (A \times B) \cup (B \times A)$ ist die symmetrische Inzidenzbeziehung zwischen Ebenen und Geraden. Für alle $a \in A, b \in B$ gilt:

$$J(a, b) \leftrightarrow \forall x (I(x, b) \rightarrow I_r(x, a) \vee I_w(x, a)).$$

$\Gamma 3)$ Der Durchschnitt zweier verschiedener Geraden ist leer oder ein Punkt.

$\Gamma 4)$ Jede Gerade enthält unendlich viele Punkte. Die Menge der Geraden ist nicht leer.

$\Gamma 5)$ Für jede Ebene a und jeden Punkt $c \in a$ gibt es unendlich viele rote und unendlich viele weiße Geraden, welche in a liegen und c enthalten.

$\Gamma 6)$ Für jede rote (bzw. weiße) Gerade b in einer Ebene a gibt es genau einen Punkt $c \in a_w \cap b$ (bzw. $c \in a_r \cap b$). c heißt der Ausnahmepunkt von b auf a .

$\Gamma 7)$ Für jede Gerade b und jeden Punkt $c \in b$ gibt es unendlich viele Ebenen a mit $b \subset a$, so daß c der Ausnahmepunkt von b auf a ist.

$\Gamma 8)$ Sind $b_1, \dots, b_n, n \geq 2$, verschiedene Geraden und gilt $b_i \cap b_{i+1} \neq \emptyset, 1 \leq i \leq n-1$, dann ist $b_1 \cap b_n = \emptyset$, oder es gibt einen Punkt c mit $c \in b_i$ für alle $i = 1, \dots, n$.

$\Gamma 9)$ Ebenen sind nicht leer.

$\Gamma 10)$ Der Durchschnitt zweier verschiedener Ebenen ist entweder leer oder ein Punkt oder eine Gerade.

$\Gamma 11)$ Sind $a_1, \dots, a_n, n \geq 2$, verschiedene Ebenen und ist $a_i \cap a_{i+1}$ eine Gerade für $i = 1, \dots, n-1$, so gilt $a_1 \cap a_n = \emptyset$, oder $a_1 \cap a_n$ ist ein Punkt, oder a_1, \dots, a_n enthalten eine gemeinsame Gerade.

$\Gamma 12)$ Sind a_1, a_2, a_3 verschiedene Ebenen mit $a_i \cap a_j \neq \emptyset, 1 \leq i, j \leq 3$, so haben a_1, a_2, a_3 einen Punkt gemeinsam.

$\Gamma 13)$ Sind $a_1, \dots, a_n, n \geq 3$, verschiedene Ebenen mit $a_i \cap a_{i+1} \neq \emptyset, 1 \leq i \leq n-1$, und $a_i \cap a_{i+2} = \emptyset, 1 \leq i \leq n-2$, so gilt $a_1 \cap a_n = \emptyset$.

Um eine einheitliche Notation zu erreichen, wurden die Bezeichnungen aus [4] denjenigen aus [1] angeglichen. In [4] werden A, B, B_r, B_w, C mit S, L, L_r, L_w, P und J mit I_{LS} bezeichnet. Außerdem sind die Inzidenzbeziehungen in [4] nicht symmetrisch (z.B. $I \subset P \times L$), so daß $\Gamma 0), \Gamma 1)$ und $\Gamma 2)$ entsprechend angepaßt wurden.

Die im letzten Kapitel definierten Begriffe Sequenzen, Wege und Kreise werden auch auf Modelle von Γ angewendet, wobei die Definitionen leicht modifiziert werden. Außer den Inzidenzen I und J sollen in Sequenzen, Wegen und Kreisen nämlich auch die direkten Punkt- Ebene- Inzidenzen I_r und I_w verwendet werden dürfen, so daß Wege im Sinne von Γ nicht notwendig auch Wege im Sinne von Σ sein müssen. Durch Einschieben von Geraden in die direkten Übergänge zwischen Punkten und Ebenen lassen sich jedoch diese neuen Wege in Γ stets in Wege gemäß Σ verwandeln. Sequenzen sind also für das weitere Folgen von direkt zueinander inzidenten Elementen, wobei alle Inzidenzrelationen aus L' verwendet werden können. Wege sind minimale Sequenzen ohne Wiederholungen von Elementen im Innern dieser Sequenzen, und Kreise sind Wege, die mit demselben Element beginnen und enden.

Im Gegensatz zu dem freien Pseudoraum von Baudisch und Pillay tritt hier die Dualität zwischen Punkten und Ebenen aus dem Axiomensystem nicht so klar zutage. Wegen der Farbgebung (Punkte sind rot oder weiß, und Ebenen haben keine Farben) kann es auch keine volle Dualität geben. Läßt man die Farben jedoch unberücksichtigt, so ist auch hier die Rolle der Punkte und Ebenen vertauschbar. Hierauf werde ich im nächsten Kapitel genauer eingehen.

Als erstes werde ich die Konsistenz von Γ zeigen. Dazu konstruiere ich ein Modell M'_0 , welches durch Einfärben der Geraden des Standardmodells M_0 aus [1] gewonnen wird.

Wie in [1] werden Geraden und Ebenen als freie Pseudoebene $\omega^{<\omega}$ definiert, wobei die Ebenen von M'_0 der Menge $\{\eta \in \omega^{<\omega} : l(\eta) \text{ gerade}\}$ und die Geraden $\{\eta \in \omega^{<\omega} : l(\eta) \text{ ungerade}\}$ entsprechen. Die Inzidenzbeziehung $J(\eta, \tau)$ gelte, falls η unmittelbarer Vorgänger oder Nachfolger von τ ist. Für gerades η bezeichne $B(\eta)$ die Geraden in η , d.h.

$$B(\eta) = \{\eta \frown \langle i \rangle : i \in \omega\} \cup \{\eta \mid (l(\eta) - 1)\}.$$

Die Geraden werden in Analogie zu dem Vorgehen in Kapitel 3 wie folgt gefärbt:

$$\begin{aligned} B_r(M'_0) &= \{\eta : \eta \in B(M'_0), \eta(l(\eta)) \text{ gerade}\} \\ B_w(M'_0) &= \{\eta : \eta \in B(M'_0), \eta(l(\eta)) \text{ ungerade}\} \end{aligned}$$

Dadurch enthält, wie in Abbildung 2 veranschaulicht, jede Ebene unendlich viele rote und unendlich viele weiße Geraden. Die Ebenen und Geraden bilden also eine freie gefärbte Pseudoebene, in der die Ebenen die Rolle der Punkte der Pseudoebene übernehmen und deren Farben nicht berücksichtigt werden.

Nun werden schrittweise die Punkte hinzugefügt und die Relation I definiert. Die Punkte von C ergeben sich dann als $\bigcup\{C(\eta) : l(\eta) \text{ gerade}\}$, so daß

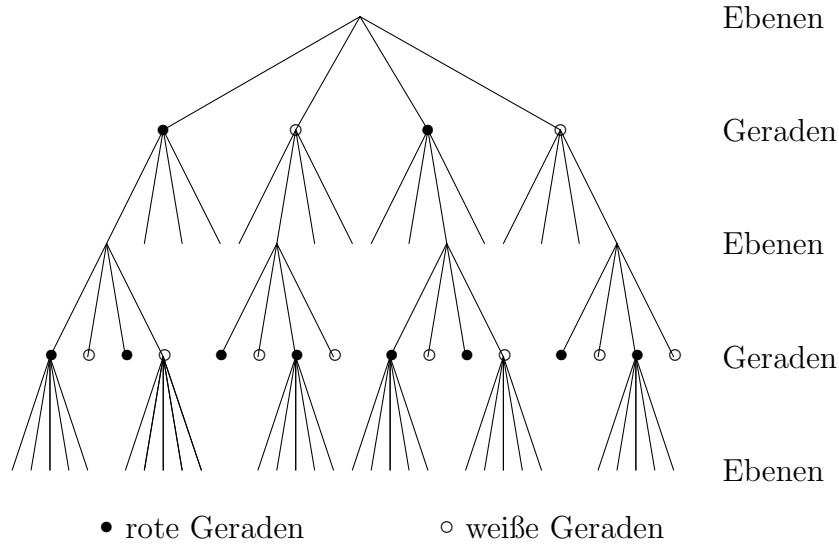


Abbildung 2: Die freie Pseudoebene (A, B, J) des Standardmodells M'_0

für jedes η $(B(\eta), C(\eta), I)$ eine zusammenhängende abzählbare freie gefärbte Pseudoebene bildet.

Sei zunächst $C(\langle \rangle)$ eine abzählbare Menge von Punkten. Die Geraden $B(\langle \rangle)$ sind bereits gefärbt, wobei $B(\langle \rangle)$ durch Wahl von (A, B, J) unendlich viele rote und unendlich viele weiße Geraden enthält. Auf $B(\langle \rangle) \cup C(\langle \rangle)$ sei eine Relation $I_{\langle \rangle}$ so definiert, daß $(B(\langle \rangle), C(\langle \rangle), I_{\langle \rangle})$ eine zusammenhängende abzählbare freie gefärbte Pseudoebene bildet. Die Farben der Punkte, welche in der gefärbten Pseudoebene durch einstellige Relationen $C_r(x)$ und $C_w(x)$ angegeben wurden, wird hier mittels der Relationen $I_r(x, \langle \rangle)$ und $I_w(x, \langle \rangle)$ kenntlich gemacht. Die Farben der Punkte $C(\langle \rangle)$ in den Ebenen der Länge 2 werden erst im nächsten Schritt festgelegt.

Seien nun $C(\eta)$ und I_η bereits konstruiert für alle η der Länge höchstens $2n$. η habe die Länge $2n + 2$, d.h. η ist Ebene, und es sei $\tau = \eta \mid (2n + 1)$ die unmittelbare Vorgängergerade von η . Sei weiter C^0 die Menge der Punkte auf der Geraden τ und sei C^1 eine abzählbare Menge neuer Elemente. Wie im Induktionsanfang ist auch hier die Farbe der Punkte aus C^0 in den Ebenen der Länge $2n + 2$ noch nicht festgelegt. Diese werden erst unten bestimmt, wobei dem Axiom $\Gamma 7$) Rechnung zu tragen ist.

Nun wird I_η auf $B(\eta) \cup C^0 \cup C^1$ so definiert, daß $(B(\eta), C^0 \cup C^1, I_\eta)$ eine zusammenhängende freie gefärbte Pseudoebene ist, wobei die Gerade τ keine neuen Punkte erhält, d.h. $I_\eta(\tau, c)$ gilt genau für $c \in C^0$. Die Farben der Punkte sind in jeder Ebene frei wählbar und werden, wie schon bei $(B(\langle \rangle), C(\langle \rangle), I_{\langle \rangle})$ besprochen, durch die Relationen $I_r(x, \eta)$ und $I_w(x, \eta)$ angezeigt. Zusätzlich wird der Ausnahmepunkt von τ so gewählt, daß es für jedes $c \in C^0$ unendlich viele η mit $l(\eta) = 2n + 2$ und $\eta \mid (2n + 1) = \tau$ gibt, so daß c Ausnahmepunkt von τ auf η ist. Dies ist möglich, weil C^0 abzählbar ist und τ ebenfalls abzählbar viele Nachfolgerebenen η besitzt, auf welchen der

Ausnahmepunkt von τ beliebig gewählt werden kann. Hierdurch wird $\Gamma 7)$ erfüllt.

Die Menge C der Punkte von M'_0 ist die Vereinigung aller so konstruierten Mengen $C(\eta)$, und die Inzidenzrelation I zwischen den Punkten und Geraden ist die Vereinigung aller I_η . Die Beziehungen I_r und I_w zwischen den Punkten und Ebenen ergeben sich durch die entsprechende Färbung der Punkte auf den Ebenen η .

Sei M_0 das L -Redukt von M'_0 . Dann ist M_0 das in [1] konstruierte Standardmodell der Theorie Σ , und die Axiome Σ gelten mithin in M'_0 . Ich werde zeigen, daß M'_0 auch Γ erfüllt.

Lemma 5.1 M'_0 erfüllt die Axiome $\Gamma 0)$ bis $\Gamma 2)$ und $\Gamma 5)$ bis $\Gamma 7)$.

BEWEIS. Die Gültigkeit von $\Gamma 0)$ bis $\Gamma 2)$ ist klar. $\Gamma 5)$ bis $\Gamma 7)$ ergeben sich direkt aus der Konstruktion von M'_0 . \square

Lemma 5.2 Jedes Modell von Σ erfüllt $\Gamma 3)$ und $\Gamma 4)$ sowie $\Gamma 8)$ bis $\Gamma 11)$.

BEWEIS. $\Sigma \models \Gamma 3)$: wegen $\Sigma 1)(b)$.

$\Sigma \models \Gamma 4)$: ebenfalls wegen $\Sigma 1)(b)$.

$\Sigma \models \Gamma 8)$: ebenfalls wegen $\Sigma 1)(b)$.

$\Sigma \models \Gamma 9)$: wegen $\Sigma 1)(a)$.

$\Sigma \models \Gamma 10)$: $\Gamma 10)$ entspricht genau dem Axiom $\Sigma 3)(a)$.

$\Sigma \models \Gamma 11)$: wegen $\Sigma 1)(a)$ und $\Sigma 3)(a)$. \square

Lemma 5.3 Jedes Modell von Σ erfüllt $\Gamma 12)$.

BEWEIS. Seien a_1, a_2, a_3 verschiedene Ebenen und c_1, c_2, c_3 Punkte mit $c_1 \in a_2 \cap a_3$, $c_2 \in a_1 \cap a_3$, $c_3 \in a_1 \cap a_2$. Es ist zu zeigen, daß ein Punkt c existiert mit $c \in a_1 \cap a_2 \cap a_3$. Falls $c_1 \in a_1$, so ist $c = c_1$ ein solcher gesuchter Punkt. Ebenso, falls $c_2 \in a_2$ oder $c_3 \in a_3$. Sei also

$$c_i \notin a_i \text{ für } i = 1, \dots, 3. \quad (1)$$

Ich werde zeigen, daß dies unmöglich ist. Zunächst sind c_1, c_2 und c_3 paarweise verschieden. Es existiert also ein Kreis

$$(a_1, b_3, c_3, b'_3, a_2, b_1, c_1, b'_1, a_3, b_2, c_2, b'_2, a_1)$$

mit paarweise verschiedenen $b_1, b_2, b_3, b'_1, b'_2, b'_3$. Die Wahl solcher Geraden ist möglich wegen (1) und weil $(B(a_i), C(a_i), I)$ eine freie Pseudoebene bildet. Nach $\Sigma 4)(a)$ gibt es einen Weg X aus Geraden und Punkten zwischen b_3 und

b'_2 , welcher nur Geraden aus a_1 und Punkte aus $\{c_1, c_2, c_3\}$ enthält. c_1 kann in X wegen $c_1 \notin a_1$ nicht vorkommen. Es ist also entweder

- (a) $X = (b_3, c_3, b'_2)$ oder
- (b) $X = (b_3, c_2, b'_2)$ oder
- (c) $X = (b_3, c_3, b', c_2, b'_2)$ mit $b' \subset a_1$.

In jedem Fall gibt es eine Gerade $b''_1 \subset a_1$ mit $c_3 \in b''_1$ und $c_2 \in b''_1$ (nämlich in (a) $b''_1 = b'_2$, in (b) $b''_1 = b_3$ und in (c) $b''_1 = b'$). Analog erhält man durch Ausnutzung von $c_2 \notin a_2$ und $c_3 \notin a_3$ Geraden $b''_2 \in a_2$ und $b''_3 \in a_3$ mit $c_1, c_3 \in b''_2$ und $c_1, c_2 \in b''_3$. Wegen (1) sind b''_1, b''_2 und b''_3 paarweise verschieden, und es gibt einen Kreis aus Geraden und Punkten

$$(b''_1, c_3, b''_2, c_1, b''_3, c_2, b''_1)$$

im Widerspruch zu $\Sigma 1)(b)$. □

Lemma 5.4 *Jedes Modell von Σ erfüllt $\Gamma 13$.*

BEWEIS. Seien a_1, \dots, a_n , $n \geq 3$, verschiedene Ebenen mit $c_i \in a_i \cap a_{i+1}$, $1 \leq i < n$, und $a_i \cap a_{i+2} = \emptyset$, $1 \leq i < n - 1$. Es ist zu zeigen, daß $a_1 \cap a_n = \emptyset$. Der Nachweis hiervon erfolgt per Induktion über n . Für $n = 3$ ist dies klar. Sei $n > 3$ und $\Gamma 13$) gelte für alle $3 \leq k < n$. Dann ist nach Induktionsvoraussetzung

$$a_i \cap a_j = \emptyset \text{ für } 1 \leq i < j \leq n \text{ mit } i + 1 \neq j \text{ und } (i, j) \neq (1, n). \quad (2)$$

Angenommen, es existiert ein Punkt $c_n \in a_1 \cap a_n$. Ich konstruiere einen Widerspruch ähnlich wie im Beweis des vorigen Lemmas. Nach Voraussetzung und wegen (2) gibt es einen Kreis

$$(a_1, b, c_1, b', a_2, \dots, a_n, b'', c_n, b''', a_1).$$

Die Anwendung von $\Sigma 4)(a)$ liefert einen Weg X aus Geraden und Punkten zwischen b und b''' , welcher nur Geraden aus a_1 und Punkte aus $\{c_1, \dots, c_n\}$ enthält. Wegen (2) können c_2, \dots, c_{n-1} nicht in X vorkommen. Es ist also entweder

- (a) $X = (b, c_1, b''')$ oder
- (b) $X = (b, c_n, b''')$ oder
- (c) $X = (b, c_1, b_1, c_n, b''')$ mit $b_1 \subset a_1$.

In jedem Fall gibt es also wieder eine Gerade b_1 , welche c_1 und c_n enthält. Analog erhält man mit (2) Geraden b_2, \dots, b_n mit $c_{i-1} \in b_i$ und $c_i \in b_i$, $2 \leq i \leq n$. Wegen (2) sind alle b_1, \dots, b_n verschieden, und es gibt einen Kreis

$$(b_1, c_1, b_2, c_2, \dots, b_n, c_n, b_1)$$

im Widerspruch zu $\Sigma 1)(b)$. □

Korollar 5.5 M'_0 ist ein Modell von Γ , und somit ist Γ konsistent.

6 Die Beziehung zwischen Σ und Γ

In diesem Abschnitt sollen die gegenseitigen Abhängigkeiten der Axiomensysteme Σ und Γ untersucht werden. Dies ist einerseits insofern von Interesse, als es die Beziehung zwischen diesen doch recht verschiedenartig formulierten Axiomensystemen beleuchtet, andererseits wird es bequem sein, bei den späteren Betrachtungen zu Γ die gut handhabbaren Axiome von Σ heranziehen zu können. Im letzten Abschnitt wurde bereits gezeigt, daß in Σ die meisten Axiome von Γ gelten, mit Ausnahme der die Farben und die andersartigen Inzidenzbeziehungen betreffenden Axiome. Hier soll nun gezeigt werden, daß der durch Γ axiomatisierte freie Pseudoraum auch die Axiome aus Σ erfüllt. Zuvor seien jedoch zwei Bemerkungen zum Axiomensystem Σ eingeschaltet.

Lemma 6.1 *Jedes Modell von $\Sigma 0)$, $\Sigma 1)$ und $\Sigma 2)(a)$ erfüllt $\Sigma 2)(b)$.*

BEWEIS. Sei c ein Punkt. Es ist zu zeigen, daß $(A(c), B(c), J)$ eine freie Pseudoebene ist. Hierzu sind die Axiome $\Delta 1)$ bis $\Delta 4)$ zu überprüfen. Die Gültigkeit von $\Delta 1)$ und $\Delta 2)$ ist klar nach $\Sigma 0)$.

Für $\Delta 3)$ sei $a \in A(c)$. Nach $\Sigma 2)(a)$ bildet $(B(a), C(a), I)$ eine freie Pseudoebene. Wegen $c \in C(a)$ gibt es unendlich viele Geraden, welche in a liegen und c enthalten. In $(A(c), B(c), J)$ enthält folglich jede Ebene unendlich viele Geraden. Daß jede Gerade b in unendlich vielen Ebenen liegt, ergibt sich mit $\Sigma 1)(a)$, da jede Ebene $a \supset b$ auch c enthält. Die in $\Delta 4)$ geforderte Kreisfreiheit von $(A(c), B(c), J)$ folgt sofort aus der Kreisfreiheit von (A, B, J) gemäß $\Sigma 1)(a)$. \square

Lemma 6.2 *Jedes Modell von $\Sigma 0)$, $\Sigma 1)$ und $\Sigma 3)(a)$ erfüllt $\Sigma 3)(b)$.*

BEWEIS. Seien c und c' zwei verschiedene Punkte. Gibt es keine oder genau eine Ebene, welche c und c' enthält, so ist $\Sigma 3)(b)$ für c und c' erfüllt.

Seien also a und a' zwei verschiedene Ebenen, welche beide c und c' enthalten. Dann ist $\{c, c'\} \subseteq a \cap a'$, und wegen $\Sigma 3)(a)$ gibt es eine Gerade b mit $c, c' \in b$ und $a \cap a' = b$. Nach $\Sigma 1)(b)$ ist b bereits durch c und c' eindeutig bestimmt, und somit sind die Ebenen, welche c und c' enthalten, genau diejenigen, in welchen die Gerade b liegt. \square

Betrachte nun für die Axiome $\Gamma 5)$ und $\Gamma 7)$ die schwächeren Aussagen $\Gamma 5')$ und $\Gamma 7')$.

$\Gamma 5')$ Für jede Ebene a und jeden Punkt $c \in a$ gibt es unendlich viele Geraden, welche in a liegen und c enthalten.

$\Gamma 7')$ Jede Gerade liegt in unendlich vielen Ebenen.

$\Gamma 0')$ und $\Gamma 2')$ mögen aus $\Gamma 0)$ und $\Gamma 2)$ durch Weglassen der die Farbrelationen B_r, B_w und I_r, I_w betreffenden Sätze entstehen. Das Axiomensystem Γ' in der Sprache L bestehe aus den Axiomen $\Gamma 0'), \Gamma 2'), \Gamma 3), \Gamma 4), \Gamma 5'), \Gamma 7')$ sowie $\Gamma 8)$ bis $\Gamma 13)$. Offenbar gilt dann:

Bemerkung 6.3 *Jedes Modell von Γ ist Modell von Γ' .*

Ziel ist es, die Systeme Σ und Γ' als äquivalent herauszustellen. Hierzu soll zunächst aus den Axiomen von Γ' das Axiom $\Sigma 4)(a)$ hergeleitet werden. Dies erfordert einige Vorüberlegungen.

Lemma 6.4 *In einem Modell von Γ' sei*

$$X = (a, b, c_0, a_1, c_1, \dots, c_{n-1}, a_n, c_n, b', a)$$

ein Kreis, bestehend aus Ebenen $a = a_0, a_1, \dots, a_n$, Geraden b, b' sowie Punkten c_0, \dots, c_n . Dann existiert ein BC-Weg Y

$$Y = (b, c'_0, b'_1, c'_1, \dots, c'_{m-1}, b'_m, c'_m, b')$$

mit $\{c'_0, \dots, c'_m\} \subseteq \{c_0, \dots, c_n\}$ und $c'_i \in a$, $0 \leq i \leq m$. Außerdem ist $b'_i \subset a$, $1 \leq i \leq m$.

BEWEIS. Der letzte Satz folgt aus dem ersten Teil der Behauptung, sei nämlich $a'_i \neq a$ eine Ebene mit $b'_i \subset a'_i$. Dann ist $c'_{i-1}, c'_i \in a'_i \cap a$, mithin $b'_i = a'_i \cap a$ und also $b'_i \subset a$. Es bleibt der erste Teil der Behauptung zu zeigen. Dies geschieht per Induktion über n . Da für den Fall $n = 2$ in der Argumentation stets $\Gamma 12)$ benutzt wird und erst für $n \geq 3$ auf $\Gamma 13)$ zurückgegriffen werden kann, müssen die Induktionsanfänge im folgenden stets bis $n = 2$ ausgeführt werden.

Induktionsanfang. Für $n = 0$ liegt $X = (a, b, c_0, b', a)$ vor, und die Behauptung ist unmittelbar klar.

Für $n = 1$ ist $X = (a, b, c_0, a_1, c_1, b', a)$, d.h. $c_0, c_1 \in a \cap a_1$. Dann existiert eine Gerade $b'' = a \cap a_1$, und somit gibt es die Sequenz (b, c_0, b'', c_1, b') . Falls $b = b''$ oder $b'' = b'$ kann die Sequenz entsprechend verkürzt werden. Solches Kürzen im Innern einer Sequenz wird im folgenden nicht immer explizit erwähnt werden.

Für $n = 2$ ist $X = (a, b, c_0, a_1, c_1, a_2, c_2, b', a)$. Wegen $\Gamma 12)$ existiert ein Punkt $c \in a \cap a_1 \cap a_2$.

1.Fall: $c = c_0$, d.h. insbesondere $c \neq c_2$. Dann existiert $b'' = a \cap a_2$ mit $c_0, c_2 \in b''$. Somit erhalte ich den gesuchten Weg Y aus der Sequenz (b, c_0, b'', c_2, b') .

2.Fall: $c = c_1$, mithin $c \neq c_0$ und $c \neq c_2$. Dann existieren Geraden $b'' = a \cap a_1$ sowie $b''' = a \cap a_2$ mit $c_0, c_1 \in b''$ und $c_1, c_2 \in b'''$. Es gibt daher die Sequenz $(b, c_0, b'', c_1, b''', c_2, b')$.

3.Fall: $c = c_2$. Wie im 1. Fall.

4.Fall: $c \neq c_0$, $c \neq c_1$ und $c \neq c_2$. Dann existieren Geraden $b_0 = a \cap a_1$, $b_1 = a_1 \cap a_2$ und $b_2 = a_2 \cap a$, d.h. es gibt die Sequenz $(a, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, a)$. Dann ist $b_0 = b_1 = b_2$. Weil nämlich a, a_1, a_2 paarweise verschieden sind, enthalten sie nach $\Gamma 11$) eine gemeinsame Gerade b'' , welche wegen $\Gamma 10$) mit b_0, b_1 und b_2 übereinstimmt, d.h. $b'' = b_0 = b_1 = b_2$. Somit habe ich die Sequenz (b, c_0, b_0, c_2, b') .

Induktionsschritt. Sei die Behauptung gezeigt für $k < n$, $n \geq 3$. Falls es einen Index i mit $1 \leq i \leq n - 1$ und $c_i \in a$ gibt, so wähle $b'' \subset a$ mit $c_i \in b''$. Dann gibt es Wege $(a, b, c_0, \dots, a_i, c_i, b'', a)$ und $(a, b'', c_i, a_{i+1}, \dots, a_n, c_n, b', a)$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es dann BC -Wege, welche die Geraden b und b'' bzw. b'' und b' verbinden und nur Punkte aus $\{c_0, \dots, c_n\}$ benutzen, die in a liegen. Durch Zusammensetzen dieser Wege ergibt sich dann der gesuchte BC -Weg zwischen b und b' . Ich treffe daher folgende

Annahme 1 $c_i \notin a$ für $1 \leq i \leq n - 1$.

Falls i und j existieren mit $0 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, $i \neq j, j - 1$ und $c_i \in a_j$, so läßt sich der Weg X verkürzen zu

$$\begin{aligned} X' &= (a, b, c_0, \dots, a_i, c_i, a_j, c_j, \dots, b', a) && \text{falls } i < j - 1 \text{ bzw.} \\ X' &= (a, b, c_0, \dots, c_{j-1}, a_j, c_i, a_{i+1}, \dots, b', a) && \text{falls } i > j. \end{aligned}$$

Dann liefert die Induktionsvoraussetzung angewendet auf X' die Behauptung. Zusätzlich zu Annahme 1 treffe ich daher

Annahme 2 $c_i \notin a_j$ für $0 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, $i \neq j, j - 1$.

Falls schließlich c_0 und c_n auf einer gemeinsamen Gerade b'' liegen, ergibt sich der in der Behauptung gesuchte Weg Y direkt als (b, c_0, b'', c_n, b') . Ich nehme daher noch an

Annahme 3 c_0 und c_n liegen nicht auf einer gemeinsamen Gerade.

Aus Annahme 1 bis 3 werde ich einen Widerspruch ableiten, mithin tritt für ein gegebenes X eine dieser Annahmen nicht ein, und die Behauptung ist gezeigt. Zunächst gibt es wegen $\Gamma 13$) einen Index j , $0 \leq j \leq n - 2$ mit $a_j \cap a_{j+2} \neq \emptyset$. Sei etwa $c \in a_j \cap a_{j+2}$. Für diese Situation zeige ich folgende

Behauptung 1 *Gibt es unter den Annahmen 1 bis 3 einen Punkt $c \in a_i \cap a_{i+2}$ mit $0 \leq i \leq n - 2$, so existiert ein BC -Weg Y' , welcher b und b' verbindet und höchstens die Punkte c_0, c_n und c enthält. Falls c in Y' vorkommt, ist $c \in a$.*

BEWEIS DER BEHAUPTUNG 1. 1. Fall: $i = 0$, d.h. $c \in a \cap a_2$. Dann existiert $b'' \subset a$ mit $c \in b''$, und somit gibt es Kreise $(a, b, c_0, a_1, c_1, a_2, c, b'', a)$ sowie $(a, b'', c, a_2, \dots, a_n, c_n, b', a)$. Zweifache Anwendung der Induktionsvoraussetzung liefert dann BC -Wege zwischen b und b'' bzw. b'' und b' , welche wegen Annahme 1 nur Punkte aus $\{c_0, c_n, c\}$ enthalten. Durch Zusammensetzen dieser Wege erhalte ich dann einen BC -Weg, welcher b und b' verbindet.

2. Fall: $1 \leq i \leq n-2$. Dann gibt es einen Kreis $(a, b, \dots, a_i, c, a_{i+2}, \dots, b', a)$, und nach Induktionsvoraussetzung existiert ein BC -Weg, welcher wegen Annahme 1 höchstens die Punkte c_0, c_n, c enthält.

In beiden Fällen wird $c \in a$ durch die Anwendung der Induktionsvoraussetzung sichergestellt, falls c in Y' vorkommt. \square

Den eben gefundenen Weg Y' untersuche ich genauer in der

Behauptung 2 *Unter den Voraussetzungen von Behauptung 1 kommt der Punkt c in dem Weg Y' aus Behauptung 1 vor, und es ist $c \neq c_0$ und $c \neq c_n$.*

BEWEIS DER BEHAUPTUNG 2. Der in Behauptung 1 gefundene Weg Y' benutzt nur die Punkte c_0, c_n und c . Es sind daher folgende Situationen möglich:

- (i) $Y' = (b, c_0, b')$. Widerspruch zu Annahme 3.
 $Y' = (b, c_n, b')$. Ebenso.
 $Y' = (b, c, b')$. Wegen Annahme 3 folgt dann $c \neq c_0$ und $c \neq c_n$.
- (ii) $Y' = (b, c_0, b'', c_n, b')$. Widerspruch zu Annahme 3.
 $Y' = (b, c_0, b'', c, b')$. Dann ist $c \neq c_n$ wegen Annahme 3 und $c \neq c_0$, weil Y' ein Weg ist.
 $Y' = (b, c, b'', c_n, b')$. Analog.
- (iii) $Y' = (b, c_0, b'', c, b''', c_n, b')$. Dann ist wieder $c \neq c_0$ und $c \neq c_n$ wegen der Wegeigenschaft von Y' .

Damit ist Behauptung 2 in allen Fällen gezeigt. \square

Durch Anwendung der Behauptungen 1 und 2 auf den wegen $\Gamma(13)$ existierenden Punkt $c \in a_j \cap a_{j+2}$, $0 \leq j \leq n-2$, erhalte ich einen BC -Weg zwischen b und b' , der den Punkt c und möglicherweise auch c_0 und c_n enthält. Dieser Weg sei für das folgende Y_1 genannt.

Als nächstes zeige ich, daß der Punkt c in allen Ebenen a_i liegt. Dies ist die

Behauptung 3 *Es gilt $c \in a_i$ für alle $1 \leq i \leq n$.*

BEWEIS DER BEHAUPTUNG 3. Den Beweis führe ich induktiv mit der folgenden

Behauptung. Wenn $c \in a_i$ und $c \in a_j$, $0 \leq i < j \leq n + 1$ (mit der Vereinbarung $a_0 = a_{n+1} = a$), so ist $c \in a_k$ für alle $i \leq k \leq j$.

Der Beweis hiervon erfolgt per Induktion über $l = j - i$.

Induktionsanfang. Für $l = 1$ ist nichts zu zeigen. Sei $l = 2$, d.h. $c \in a_i \cap a_{i+2}$. Dann ist wegen $\Gamma 12)$ $a_i \cap a_{i+1} \cap a_{i+2} \neq \emptyset$. Sei $c' \in a_i \cap a_{i+1} \cap a_{i+2}$. Die Behauptungen 1 und 2 angewendet auf c' liefern dann einen BC -Weg Y_2 zwischen b und b' , welcher den Punkt c' und außerdem eventuell c_0 und c_n enthält. Weil (B, C, I) eine freie Pseudoebene ist, sind BC -Wege eindeutig, somit ist $Y_1 = Y_2$ und daher auch $c = c'$, d.h. $c \in a_{i+1}$.

Induktionsschritt. Sei $l \geq 3$, und die Behauptung sei gezeigt für alle $k < l$. Dann liegt die Situation $(a_i, c_i, \dots, c_{i+l-1}, a_{i+l}, c, a_i)$ vor. Wegen $\Gamma 13)$ gibt es einen Index m mit $i \leq m \leq i + l - 2$ und $a_m \cap a_{m+2} \neq \emptyset$. Sei $c' \in a_m \cap a_{m+2}$. Wieder durch Anwendung der Behauptungen 1 und 2 auf c' gibt es dann einen BC -Weg Y_2 zwischen b und b' , welcher nach den getroffenen Annahmen nur die Punkte c_0, c_n und c' benutzt. Dann ist wieder $Y_1 = Y_2$ und somit $c = c'$. Damit ist $c \in a_i \cap a_{m+1} \cap a_{i+l}$ und die Induktionsvoraussetzung der Behauptung liefert $c \in a_{i+k}$, $0 \leq k \leq l$. \square

Mit Behauptung 3 ist wegen $c \in a$ und Annahme 1 $c \neq c_i$, $1 \leq i \leq n - 1$. Zusammen mit Behauptung 2 ergibt sich $c \neq c_i$, $0 \leq i \leq n$. Dies bedeutet $c, c_i \in a_i \cap a_{i+1}$, $0 \leq i \leq n$. Wegen $\Gamma 10)$ existieren dann Geraden $b_i = a_i \cap a_{i+1}$ mit $c, c_i \in b_i$, $0 \leq i \leq n$. Aufgrund von Annahme 2 sind die Geraden b_0, \dots, b_{n-1} paarweise verschieden. Wäre nämlich $b_i = b_j$, $0 \leq i < j \leq n - 1$, so folgte $c_i \in b_i = b_j = a_j \cap a_{j+1}$, d.h. $c_i \in a_{j+1}$ im Widerspruch zu Annahme 2. Mit dem gleichen Argument sind auch die Geraden b_1, \dots, b_n paarweise verschieden. Außerdem liefert Annahme 3 die Beziehung $b_0 \neq b_n$, so daß insgesamt b_0, \dots, b_n paarweise verschieden sind. Folglich gibt es einen AB -Kreis

$$(a, b_0, a_1, b_1, \dots, b_{n-1}, a_n, b_n, a)$$

im Widerspruch zu $\Gamma 11)$. Dies ist der gewünschte Widerspruch zum gleichzeitigen Eintreten der Annahmen 1 bis 3. \square

Satz 6.5 *Jedes Modell von Γ' erfüllt $\Sigma 4)(a)$.*

BEWEIS. Sei $X = (a, b, \dots, b', a)$ ein ABC -Kreis. Zu zeigen ist die Existenz eines BC -Weges Y zwischen b und b' mit Punkten aus X , welche in a liegen. Um das vorige Lemma anwenden zu können, forme ich X in einen Kreis X' um, welcher außer b und b' keine weiteren Geraden enthält. Hierzu werden folgende Schritte a) bis c) auf dem inneren Teil b, \dots, b' von X ausgeführt:

- a) Jede Sequenz der Art a_1, b_1, c_1 wird durch a_1, c_1 ersetzt. Analog wird jede Sequenz c_1, b_1, a_1 zu c_1, a_1 verkürzt.

- b) Jedes Auftreten von c_1, b_1, c_2 wird durch c_1, a_1, c_2 ersetzt, wobei a_1 eine die Gerade b_1 enthaltende Ebene ist, welche noch nicht in X vorkommt.
- c) Schließlich wird jede Sequenz der Form a_1, b_1, a_2 durch a_1, c_1, a_2 ersetzt, wobei c_1 ein beliebiger Punkt aus b_1 ist, welcher nicht in X vorkommt.

Zum Schluß wird noch der folgende Punkt angewendet:

- d) Falls der aus X mittels der Schritte a) bis c) entstandene Kreis mit a, b, a_1 beginnt, so wähle einen beliebigen Punkt c_0 aus b , welcher nicht in X vorkommt, und ersetze a, b, a_1 durch a, b, c_0, a_1 . Ebenso, falls der Weg mit a_n, b', a endet, füge einen beliebigen noch nicht in X enthaltenen Punkt $c_n \in b'$ ein, so daß sich a_n, c_n, b', a ergibt.

Der so entstandene Kreis X' hat die Form

$$X' = (a, b, c_0, a_1, c_1, \dots, a_n, c_n, b', a)$$

und enthält nur noch Ebenen, die Geraden b und b' und alle Punkte aus X sowie die unter c) und d) hinzugefügten Punkte. Die Anwendung von Lemma 6.4 auf X' liefert einen BC -Weg Y zwischen b und b' mit Punkten aus X' und Geraden aus a . Da die neuen Punkte aus der Anwendung von obigen Schritten c) und d) beliebig aus unendlich vielen Möglichkeiten gewählt wurden, können wegen der Eindeutigkeit von BC -Wegen in Y nur Punkte aus dem ursprünglichen Kreis X auftreten. Der Weg Y erfüllt daher die Bedingungen der Behauptung von $\Sigma 4)(a)$. \square

Letztlich ist noch $\Sigma 4)(b)$ aus Γ herzuleiten. Zunächst wird ein zu Lemma 6.4 analoges Resultat bereitgestellt. Der Beweis fällt hier jedoch wesentlich einfacher aus.

Lemma 6.6 *In einem Modell von Γ' sei $X = (c, b, a_0, c_0, \dots, c_{n-1}, a_n, b', c)$ ein Kreis, bestehend aus Ebenen a_0, \dots, a_n , Geraden b, b' sowie Punkten c_0, \dots, c_{n-1} . Dann existiert ein AB -Weg Y*

$$Y = (b, a'_0, b'_0, \dots, b'_{m-1}, a'_m, b')$$

mit $\{a'_0, \dots, a'_m\} \subseteq \{a_0, \dots, a_n\}$ und $c \in a'_i$, $0 \leq i \leq m$. Außerdem ist $c \in b'_i$, $0 \leq i \leq m-1$.

BEWEIS. $c \in b'_i$ folgt aus $c \in a'_i \cap a'_{i+1} = b'_i$. Es ist daher nur der erste Teil der Behauptung zu zeigen. Dies geschieht per Induktion über n .

Induktionsanfang. Für $n = 0$ liegt $X = (c, b, a_0, b', c)$ vor, und die Behauptung gilt offenbar.

Im Fall $n = 1$ ist $X = (c, b, a_0, c_0, a_1, b', c)$ und wegen $c, c_0 \in a_0 \cap a_1$ gibt es eine Gerade $b_0 = a_0 \cap a_1$. Mithin habe ich die Sequenz (b, a_0, b_0, a_1, b') .

Für $n = 2$ ist $X = (c, b, a_0, c_0, a_1, c_1, a_2, b', c)$. Aufgrund von $\Gamma 12$) existiert ein Punkt $c' \in a_0 \cap a_1 \cap a_2$.

1. *Fall:* $c' = c_0$. Dann ist $c_0 \in a_2$, und es gibt den Kreis $(c, b, a_0, c_0, a_2, b', c)$. Nun kann weiter wie im Fall $n = 1$ verfahren werden.

2. *Fall:* Die Behandlung von $c' = c_1$ erfolgt analog dem 1. Fall.

3. *Fall:* $c' = c$, also insbesondere $c' \neq c_0$ und $c' \neq c_1$. Dann existieren Geraden $b_0 = a_0 \cap a_1$ sowie $b_1 = a_1 \cap a_2$, und es gibt die Sequenz $(b, a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b')$. Die im zweiten Teil der Behauptung geforderte Bedingung $c \in a_1$ ist auch erfüllt.

4. *Fall:* $c' \neq c$, $c' \neq c_0$ und $c' \neq c_1$. Dann existieren Geraden $b_0 = a_0 \cap a_1$, $b_1 = a_1 \cap a_2$ und $b_2 = a_2 \cap a_0$, d.h. es gibt die Sequenz $(a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, a_0)$. Dann ist $b_0 = b_1 = b_2$ (siehe hierzu die entsprechende Stelle im Beweis von Lemma 6.4). Somit habe ich die Sequenz (b, a_0, b_0, a_2, b') .

Induktionsschritt. Sei die Behauptung gezeigt für $k < n$, $n \geq 3$. Wegen $\Gamma 13$) existiert ein Index i , $0 \leq i \leq n - 2$ mit $a_i \cap a_{i+2} \neq \emptyset$. Sei $c' \in a_i \cap a_{i+2}$. Die Anwendung der Induktionsvoraussetzung auf

$$(c, b, a_0, \dots, c_{i-1}, a_i, c', a_{i+2}, c_{i+2}, \dots, a_n, b', c)$$

liefert den gesuchten AB -Weg Y . □

Satz 6.7 *Jedes Modell von Γ' erfüllt auch $\Sigma 4$)(b).*

BEWEIS. Sei $X = (c, b, \dots, b', c)$ ein ABC -Kreis. Gesucht ist ein AB -Weg zwischen b und b' mit Ebenen aus X , welche c enthalten. Genau wie im Beweis von Satz 6.5 wird der Kreis X nun in einen Kreis X' transformiert, der außer b und b' keine Geraden enthält. Dies geschieht durch Anwendung der im Beweis von Satz 6.5 angegebenen Schritte a) bis c) auf das Innere b, \dots, b' von X . Punkt d) wird ersetzt durch:

d') Falls der so aus X konstruierte Weg mit c, b, c_0 beginnt, so wähle eine in diesem Weg noch nicht vorkommende Ebene a_0 mit $b \subset a_0$ und ersetze c, b, c_0 durch c, b, a_0, c_0 . Analog, falls der Weg mit c_{n-1}, b', c endet, füge eine neue Ebene $a_n \supset b'$ ein.

Der durch Transformation in den Schritten a) bis c) und d') aus X entstandene Weg X' hat nun die Form

$$X' = (c, b, a_0, c_0, \dots, a_{n-1}, c_{n-1}, a_n, b', c).$$

Die Anwendung von Lemma 6.6 auf X' liefert einen AB -Weg Y zwischen b und b' mit Ebenen aus X' und Geraden, welche c enthalten. Die in den Schritten b) und d') hinzugefügten Ebenen können in Y wegen der Eindeutigkeit von AB -Wegen nicht auftreten, da in b) und d') die Ebenen aus unendlich

vielen Möglichkeiten gewählt werden können. Somit erfüllt Y die Bedingungen der Behauptung von $\Sigma 4)(b)$. \square

Die Beziehung zwischen Σ und Γ kann nun folgendermaßen charakterisiert werden:

Satz 6.8 Σ und Γ' sind äquivalent.

BEWEIS. Im letzten Kapitel wurde bereits gezeigt, daß aus Σ die Axiome $\Gamma 3), \Gamma 4)$ sowie $\Gamma 8)$ bis $\Gamma 13)$ folgen. Die restlichen Axiome von Γ' sind offensichtlich auch in jedem Modell von Σ erfüllt, weswegen $\Sigma \models \Gamma'$ gilt.

Für die Umkehrung sei M eine L -Struktur mit $M \models \Gamma'$. Wegen $\Gamma 0')$ und $\Gamma 2')$ erfüllt M auch $\Sigma 0)$. Für die Gültigkeit von $\Sigma 1)$ und $\Sigma 2)(a)$ in M sind die Axiome aus Δ für die entsprechenden Pseudoebenen zu überprüfen. Die die Definition der Inzidenzbeziehung betreffenden Axiome $\Delta 1)$ und $\Delta 2)$ gelten offenbar in jedem Fall. Für $\Delta 3)$ ist zu überprüfen, daß jedes Element mittels der bezeichneten Inzidenzrelation zu unendlich vielen Elementen der jeweils anderen Sorte inzident ist. Zunächst zu $\Sigma 1)$. Wegen $\Gamma 4)$ enthält jede Gerade unendlich viele Punkte. Umgekehrt liegt nach $\Gamma 5')$ jeder Punkt auf unendlich vielen Geraden. Außerdem enthält nach $\Gamma 5')$ jede Ebene unendlich viele Geraden. Daß jede Gerade in unendlich vielen Ebenen enthalten ist, wird in $\Gamma 7')$ ausgesagt.

Für $\Sigma 2)(a)$ ist bei $\Delta 3)$ nur sicherzustellen, daß jeder Punkt in einer Ebene auf unendlich vielen Geraden in ebendieser Ebene liegt. Dies leistet $\Gamma 5')$.

Schließlich ist für $\Delta 4)$ die Kreisfreiheit nachzuweisen. AB -Kreise existieren nicht nach $\Gamma 10)$ und $\Gamma 11)$. Wegen $\Gamma 3)$ und $\Gamma 8)$ gibt es auch keine BC -Kreise. Dann gibt es natürlich in der in $\Sigma 2)(a)$ postulierten Pseudoebene auch keine Kreise.

$\Sigma 3)(a)$ entspricht genau $\Gamma 10)$. Wegen der Lemmata 6.1 und 6.2 gelten $\Sigma 2)(b)$ und $\Sigma 3)(b)$ in M . Die Gültigkeit von $\Sigma 4)$ in M wird in den Sätzen 6.5 und 6.7 ausgesagt. \square

Korollar 6.9 Σ ist das L -Redukt von Γ , d.h. ist M eine L' -Struktur mit $M \models \Gamma$, so gilt in $M|L$ das Axiomensystem Σ .

Mit Korollar 6.9 wird es möglich, die Axiome aus Σ auch in Modellen von Γ einzusetzen. Insbesondere erweist sich dies bei den Axiomen $\Sigma 4)(a)$ und $\Sigma 4)(b)$ als sehr vorteilhaft, da diese in der praktischen Argumentation besser einsetzbar scheinen als ihre Gegenstücke $\Gamma 12)$ und $\Gamma 13)$. Den Gebrauch von $\Sigma 4)(a)$ und $\Sigma 4)(b)$ werde ich auch auf Kreise im Sinne von Γ ausdehnen, in denen also direkte Übergänge von Punkten zu Ebenen möglich sind. Dies ist insofern unbedenklich, als stets neue, in dem Kreis noch nicht vorkommende Geraden eingeschoben werden können, so daß sich Kreise im ursprünglichen Sinn von Σ ergeben.

Mit dem letzten Korollar klärt sich auch die schon früher angesprochene Frage nach der Dualität der Punkte und Ebenen in Modellen von Γ . Berücksichtigt man die Farben nicht, so sind Punkte und Ebenen gleichberechtigt. Dadurch wird es möglich, auch in Beweisen zu Γ , bei denen es nur auf die Zusammenhangsverhältnisse und nicht auf die Farben ankommt, Dualitätsargumente zu verwenden.

Darüber, daß diese Dualität im Pseudoraum ein natürliches Konzept ist, welches nicht einmal axiomatisch gefordert werden muß, gibt das nächste Korollar Auskunft.

Korollar 6.10 *Jedes Modell von $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2(a), \Sigma_3(a)$ und $\Sigma_4(a)$ erfüllt bereits Σ .*

BEWEIS. In der L -Struktur M gelte $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2(a), \Sigma_3(a)$ und $\Sigma_4(a)$. Nach den Lemmata 6.1 und 6.2 erfüllt M dann auch $\Sigma_2(b)$ und $\Sigma_3(b)$. Im Beweis von $\Sigma \models \Gamma'$ wurden nur die oben bezeichneten Axiome von Σ benutzt. Insbesondere verwenden die Beweise der Lemmata 5.3 und 5.4 nicht $\Sigma_4(b)$. Es ist daher $M \models \Gamma'$ und mit Satz 6.8 dann $M \models \Sigma$. \square

7 Die Vollständigkeit von Γ

Der Beweis der Vollständigkeit von Γ orientiert sich an der in [1] gelieferten Beweiskette. Es ist jedoch wegen der zusätzlichen direkten Inzidenz zwischen Punkten und Ebenen sowie den in der Sprache L nicht vorhandenen Farben in den Details einige Aufmerksamkeit nötig, so daß, auch der besseren Lesbarkeit wegen, die vollständige Argumentation, welche zum Teil direkt aus [1] übernommen ist, hier gegeben werden soll.

Bemerkung 7.1 *Sei M ein Modell von Γ . Seien b und b' Geraden in einer Ebene a aus M . Dann liegt jeder BC -Weg zwischen b und b' innerhalb von a , d.h. jedes Element des Weges ist zu a inzident.*

Dual dazu enthält jedes Element eines AB -Weges, welcher zwei, einen gemeinsamen Punkt enthaltende Geraden verbindet, diesen Punkt.

BEWEIS. Als Modell von Γ erfüllt M nach Satz 6.5 auch $\Sigma 4)(a)$. Nach $\Sigma 4)(a)$ gibt es dann einen BC -Weg zwischen b und b' , dessen Geraden und Punkte alle in a liegen. Da die Geraden und Punkte von M eine freie Pseudoebene bilden, ist dies der eindeutig bestimmte BC -Weg zwischen b und b' .

Dual hierzu folgt der zweite Teil der Behauptung mit Hilfe von Axiom $\Sigma 4)(b)$. \square

Lemma 7.2 *Seien M und N abzählbare Modelle von Γ . Sei M AB -zusammenhängend, d.h. die aus den Ebenen und Geraden des Raumes bestehende Pseudoebene ist zusammenhängend. Ferner sei für jede Ebene a aus M die Pseudoebene $(B(a), C(a), I)$ zusammenhängend. Analoges gelte für N . Dann sind M und N isomorph.*

BEWEIS. Ich definiere einen Isomorphismus f wie folgt. Zu Beginn wähle ich Ebenen $a \in M$ und $a' \in N$. Setze $f(a) = a'$. Die gefärbten Pseudoebenen $(B(a), C(a), I)$ in M und $(B(a'), C(a'), I)$ in N sind zusammenhängend und daher nach Lemma 3.1 isomorph. Sei f um diesen Isomorphismus erweitert.

Für jedes $b \subset a$ erweitere f zu einer Bijektion zwischen den Ebenen aus $A(b)$ und $A(f(b))$ unter Berücksichtigung der Ausnahmepunkte von b und $f(b)$ in diesen Ebenen. Wegen $\Gamma 7)$ gibt es nämlich für jeden Punkt $c \in b$ abzählbar viele Ebenen, in denen c der Ausnahmepunkt von b ist. Ebenso ist $f(c)$ abzählbar oft Ausnahmepunkt von $f(b)$ auf Ebenen aus $A(f(b))$. Der Isomorphismus f sei nun so um eine Bijektion zwischen $A(b)$ und $A(f(b))$ erweitert, daß eine Ebene $a_1 \in A(b)$, in der b den Ausnahmepunkt c besitzt, auf eine Ebene aus $A(f(b))$ abgebildet wird, in welcher $f(c)$ der Ausnahmepunkt von $f(b)$ ist.

Für alle $a_1 \in A(b)$ und $f(a_1) \in A(f(b))$ dehne f nun zu einem Isomorphismus zwischen den durch a_1 und $f(a_1)$ bestimmten gefärbten Pseudoebenen

aus Geraden und Punkten aus. Auf diese Weise werde f weiter konstruiert. Wegen $\Gamma 10$) können die Isomorphismen zwischen den durch die Ebenen bestimmten BC -Pseudoebenen gemäß Lemma 3.1 korrekt definiert werden. Aufgrund des AB -Zusammenhangs von M und N entsteht so ein Isomorphismus zwischen M und N . \square

Korollar 7.3 *M erfülle die Zusammenhangsvoraussetzungen des letzten Lemmas. Dann ist M Ebenen-homogen, d.h. sind a und a' zwei Ebenen aus M , so existiert ein Automorphismus von M , welcher a auf a' abbildet.*

BEWEIS. In Lemma 7.2 wurde ein Isomorphismus f zwischen Modellen M und N mit $f(a) = a'$ konstruiert, wobei $a \in M$ und $a' \in N$ zu Beginn beliebig gewählt wurden. Mit $N = M$ ist dies die Behauptung. \square

Es folgen einige den Zusammenhang betreffende Begriffe.

Definition 7.4 *Sei D eine Unterstruktur eines Modells M von Γ (oder Σ).*

- (i) *Sei $W(x, y)$ die Äquivalenzrelation, die besagt, daß es einen Weg zwischen x und y gibt. D heißt 1-zusammenhängend, falls für alle verschiedenen Elemente $d, e \in D$ die Relation $W(d, e)$ gilt. D ist eine 1-zusammenhängende Komponente von M , falls D eine Äquivalenzklasse bzgl. W ist. Eine 1-zusammenhängende Komponente wird im folgenden auch kurz Zusammenhangskomponente oder einfach Komponente genannt.*
- (ii) *D heißt 2-zusammenhängend, falls für je zwei verschiedene Elemente d, e aus D entweder d und e direkt zueinander inzident sind oder es sowohl einen Weg (d, d_0, \dots, d_n, e) mit $d_i \in A \cup B$ als auch einen Weg (d, e_0, \dots, e_m, e) mit $e_i \in B \cup C$ gibt. Eine maximale 2-zusammenhängende Menge heißt 2-zusammenhängende Komponente.*

Satz 7.5 *Je zwei abzählbare 2-zusammenhängende Modelle von Γ sind isomorph.*

BEWEIS. Sei M ein abzählbares 2-zusammenhängendes Modell von Γ . Wegen des 2-Zusammenhangs ist M AB -zusammenhängend. Betrachte nun für jede Ebene a in M die freie Pseudoebene $(B(a), C(a), I)$. Zwischen je zwei Geraden b und b' aus $B(a)$ gibt es einen BC -Weg in M . Nach Bemerkung 7.1 benutzt dieser Weg nur Elemente aus $B(a) \cup C(a)$. Die Pseudoebene $(B(a), C(a), I)$ ist folglich zusammenhängend. Damit erfüllt M die Voraussetzungen aus Lemma 7.2. Die Anwendung dieses Lemmas liefert dann die Behauptung. \square

Bemerkung 7.6 Die 2-zusammenhängenden Komponenten lassen sich folgendermaßen charakterisieren. Sei M ein Modell von Γ und D eine 2-zusammenhängende Komponente von M , bestehend aus Ebenen A' , Geraden B' und Punkten C' , d.h. $D = A' \cup B' \cup C'$. Dann gilt:

(i) B' ist eine maximale Teilmenge der Menge der Geraden B von M mit der Eigenschaft, daß zwischen je zwei Geraden aus B' sowohl AB - als auch BC -Wege existieren.

(ii) $A' = \{a \in A : \text{es existiert ein } b \in B' \text{ mit } J(a, b)\}$

(iii) $C' = \{c \in C : \text{es existiert ein } b \in B' \text{ mit } I(b, c)\}$

Umgekehrt ist jede Menge D' , welche die Eigenschaften (i) bis (iii) erfüllt, eine 2-zusammenhängende Komponente von M .

BEWEIS. Sei $D = A' \cup B' \cup C'$ eine 2-zusammenhängende Komponente von M . Dann erfüllt B' nach Definition die Eigenschaft (i). Sei $a \in A'$ und $d \in D$ ein beliebiges von a verschiedenes Element. Dann existiert ein Weg (a, d_0, \dots, d_n, d) , so daß (d_0, \dots, d_n) ein AB -Weg in D ist. d_0 ist dann eine Gerade aus B' , welche in a liegt. Dies zeigt (ii). Unter Ausnutzung der Existenz von BC -Verbindungen zwischen je zwei Elementen aus D folgt analog (iii).

Daß jede (i) bis (iii) erfüllende Menge D' 2-zusammenhängend ist, ergibt sich sofort nach Definition. Mit der Maximalität von B' in (i) ist D' dann auch eine 2-zusammenhängende Komponente. \square

Lemma 7.7 Sei D eine 2-zusammenhängende Komponente eines Modells M von Γ , und seien a_1, a_2 verschiedene Ebenen aus D . Dann ist der Durchschnitt von a_1 und a_2 ebenfalls in D .

BEWEIS. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden. Sei $a_1 \cap a_2$ eine Gerade b . In D gibt es einen AB -Weg zwischen a_1 und a_2 . Dieser ist wegen der Eindeutigkeit von AB -Wegen in M der Weg (a_1, b, a_2) , mithin ist $b \in D$.

Nunmehr ist noch der Fall, daß der Durchschnitt der Ebenen ein Punkt c ist, zu untersuchen. Angenommen, $c \notin D$. Seien $b_1 \subset a_1$ und $b_2 \subset a_2$ Geraden, welche c enthalten. Dann sind nach Bemerkung 7.6 auch $b_1, b_2 \notin D$. Seien weiter $b'_1 \subset a_1$ und $b'_2 \subset a_2$ Geraden aus D . Diese existieren nach Bemerkung 7.6. In D können b'_1 und b'_2 durch einen BC -Weg $(b'_1, c_0, \dots, c_n, b'_2)$ verbunden werden. Dann liefert $\Sigma 4)(a)$ angewendet auf den Kreis

$$(a_1, b'_1, c_0, \dots, c_n, b'_2, a_2, b_2, c, b_1, a_1)$$

einen BC -Weg zwischen b'_1 und b_1 . Außerdem lassen sich b'_1 und b_1 durch den AB -Weg (b'_1, a_1, b_1) verbinden. Mit b'_1 ist dann auch $b_1 \in D$ im Widerspruch zur Annahme. \square

Satz 7.8 *Sei D eine 2-zusammenhängende Komponente eines Modells M von Γ . Dann ist D ein Modell von Γ .*

BEWEIS. Die Axiome $\Gamma 0)$ bis $\Gamma 3)$ gelten offenbar in jeder Unterstruktur von M .

Zu $\Gamma 4)$: Wegen Bemerkung 7.6 enthält jede Gerade aus D unendlich viele Punkte.

Zu $\Gamma 5)$: Sei $c \in D$ ein Punkt und $a \in D$ eine Ebene, welche c enthält. Sei weiter b eine Gerade mit $c \in b$ und $b \subset a$. Weil b über c mit jedem Element aus D mit einem BC -Weg und über a mit einem AB -Weg verbunden werden kann, ist auch $b \in D$. Dann gehören alle Geraden in der durch b bestimmten Zusammenhangskomponente der freien Pseudoebene $(B(a), C(a), I)$ zu D . Sei nämlich b' eine Gerade dieser Komponente. Dann gibt es in a einen BC -Weg zwischen b und b' und außerdem den AB -Weg (b, a, b') . Somit sind alle in a liegenden Geraden, welche c enthalten, auch in D . Damit ist $\Gamma 5)$ erfüllt.

Zu $\Gamma 6)$: Es ist nur zu zeigen, daß der Ausnahmepunkt einer Geraden $b \in D$ auf einer Ebene $a \in D$ auch in D liegt. Nach Bemerkung 7.6 liegen aber alle Punkte, welche zu b inzident sind, in D , folglich auch der Ausnahmepunkt.

Zu $\Gamma 7)$: Wiederum wegen 7.6 sind alle Ebenen, welche eine Gerade $b \in D$ enthalten, in D . Es gibt daher für einen gegebenen Punkt $c \in b$ unendlich viele Ebenen a mit $b \subset a$, auf denen c der Ausnahmepunkt von b ist.

$\Gamma 8)$ und $\Gamma 9)$ gelten in D wegen Bemerkung 7.6. Die Gültigkeit von $\Gamma 10)$ bis $\Gamma 13)$ ergibt sich aus dem letzten Lemma bzw. der universellen Formulierung der Axiome. \square

Lemma 7.9 *Seien X, Y zwei verschiedene 2-zusammenhängende Komponenten eines Modells M von Γ . Dann ist der Durchschnitt von X und Y entweder leer oder eine Ebene oder ein Punkt.*

BEWEIS. Wegen Bemerkung 7.6 enthalten X und Y keine gemeinsame Gerade. Seien a, a' zwei verschiedene Ebenen in $X \cap Y$. Dann gibt es sowohl in X als auch in Y AB -Wege zwischen a und a' . Da in M keine AB -Kreise existieren, müssen X und Y eine gemeinsame Gerade besitzen. Daher ist $X = Y$. Analog kann es höchstens einen Punkt im Durchschnitt von X und Y geben. Angenommen nun, $X \cap Y$ enthält eine Ebene a und einen Punkt c . Dann gibt es einen Kreis

$$(a, b_0, c_0, \dots, b_n, c, b_{n+1}, c_{n+1}, \dots, b_m, a),$$

wobei $b_i \in X$ für $i \leq n$ und $b_i \in Y$ für $i > n$. Nach Bemerkung 7.1 liegen alle b_i in der Ebene a . Dann gibt es jedoch zwischen je zwei der b_i sowohl AB - als auch BC -Wege, womit sie in derselben 2-zusammenhängenden Komponente liegen, d.h. $X = Y$. \square

Gegenüber der Situation in [1] tritt hier, manches Argument etwas erschwerend, der Umstand hinzu, daß BC -Verbindungen zwischen Ebenen in 2-zusammenhängenden Mengen nicht notwendig mit einer Gerade beginnen müssen, sondern auch die Form

$$(a, c_0, b_1, c_1, \dots, b_n, c_n, a')$$

annehmen können. Gleiches gilt für AB -Verbindungen zwischen Punkten. Folgende Bemerkung zeigt, daß wenigstens für 2-Zusammenhangskomponenten stets Geraden eingeschoben werden können. Im allgemeinen muß dies für 2-zusammenhängende Mengen jedoch nicht der Fall sein.

Bemerkung 7.10 *Sei X eine 2-Zusammenhangskomponente, und seien c ein Punkt aus X sowie a eine den Punkt c enthaltende Ebene aus X . Dann liegt jede Gerade b mit $c \in b \subset a$ ebenfalls in X .*

BEWEIS. Angenommen, die Gerade b mit $c \in b \subset a$ liegt in der von X verschiedenen 2-Zusammenhangskomponente X' . Nach Bemerkung 7.6 liegen dann a und c ebenfalls in X' , und somit ist $\{a, c\} \subseteq X \cap X'$ im Widerspruch zu Lemma 7.9. \square

Lemma 7.11 *Sei M ein Modell von Γ , und sei X ein Kreis. Dann gibt es eine 2-zusammenhängende Komponente D von M mit $x \in D$ für alle $x \in X$, d.h. der Kreis X liegt in D .*

BEWEIS. Nach Bemerkung 7.6 genügt es zu zeigen, daß alle Geraden aus X durch AB - und BC -Wege verbunden werden können. Seien zunächst b und b' Geraden aus X mit Abstand 2 in dem Kreis, d.h. es gibt einen Weg (b, d, b') aus X . Angenommen, d ist eine Ebene. Dann sichert die Anwendung von $\Sigma 4)(a)$ auf X die Existenz eines BC -Weges zwischen b und b' . Falls d ein Punkt ist, so liefert $\Sigma 4)(b)$ einen AB -Weg zwischen b und b' . Induktiv folgt dann die Existenz von AB - und BC -Wegen zwischen je zwei Geraden des Kreises X . \square

Korollar 7.12 *Sei M ein Modell von Γ . Dann gibt es keinen Kreis der Form*

$$(D_0, d_0, D_1, d_1, \dots, D_n, d_n, D_0).$$

Hierbei seien D_i paarweise verschiedene 2-zusammenhängende Komponenten von M und d_i Punkte oder Ebenen mit $d_i \in D_i \cap D_{i+1}$, $0 \leq i \leq n$, (wobei $D_{n+1} = D_0$ gesetzt sei).

Satz 7.13 *Sei M ein ω -saturiertes Modell von Γ . Sei ferner Λ die Menge der 2-zusammenhängenden Komponenten von M und $\Omega = A \cup C$. Dann*

läßt sich eine symmetrische Inzidenzrelation L zwischen Λ und Ω definieren mittels $L(D, d)$, falls $d \in D$. Weiter ist (Λ, Ω, L) eine freie Pseudoebene mit unendlich vielen Zusammenhangskomponenten, welche den Zusammenhangskomponenten von M entsprechen.

BEWEIS. Wegen der ω -Saturiertheit besitzt M unendlich viele Zusammenhangskomponenten. Daher besteht auch (Λ, Ω, L) aus unendlich vielen Komponenten. Es sind nun die Axiome Δ für (Λ, Ω, L) nachzuprüfen. Wegen Bemerkung 7.6 enthält jede 2-zusammenhängende Komponente D unendlich viele Ebenen und Punkte. Sei umgekehrt a eine Ebene in D . Die freie Pseudoebene $(B(a), C(a), I)$ enthält aufgrund der ω -Saturiertheit von M unendlich viele Komponenten. Sind $b, b' \in B(a)$ aus verschiedenen Zusammenhangskomponenten von $(B(a), C(a), I)$, so gibt es nach Bemerkung 7.1 keinen BC -Weg zwischen b und b' in M . Daher liegen b und b' in verschiedenen 2-Zusammenhangskomponenten von M . Mithin gilt $L(a, D')$ für unendlich viele $D' \in \Lambda$. Dual hierzu liegt auch jeder Punkt in unendlich vielen 2-Zusammenhangskomponenten. Die Kreisfreiheit von (Λ, Ω, L) schließlich ist nach Korollar 7.12 gegeben. \square

Der letzte Satz gibt einen guten Überblick über die Struktur genügend saturierter Modelle von Γ . Ein solches Modell besteht zunächst aus verschiedenen Zusammenhangskomponenten, von denen sich jede wieder aus unendlich vielen 2-Zusammenhangskomponenten zusammensetzt. Die 2-Zusammenhangskomponenten hängen dabei über die Ebenen und Punkte des Raumes zusammen, d.h. jede 2-Zusammenhangskomponente verbindet sich über jede ihrer Ebenen und Punkte mit unendlich vielen weiteren 2-Zusammenhangskomponenten. Abzählbare 2-Zusammenhangskomponenten sind aber nach Satz 7.5 und Satz 7.8 sämtlich isomorph. Diese Einsichten ermöglichen es jetzt, mit dem nächsten Satz den Beweis der Vollständigkeit von Γ zu führen.

Außerdem erklärt Satz 7.13 die Beschaffenheit von Wegen in Modellen von Γ genauer. Wege verlaufen durch verschiedene 2-Zusammenhangskomponenten, und der Wechsel zwischen zwei solchen Komponenten kann nur über das Schnittstellenelement der jeweiligen 2-Zusammenhangskomponenten erfolgen. Ich formuliere dies noch einmal in folgendem Korollar:

Korollar 7.14 *Seien X_1 und X_2 zwei nicht disjunkte 2-Zusammenhangskomponenten. Nach Lemma 7.9 ist dann $X_1 \cap X_2$ ein Punkt oder eine Ebene. Dann benutzt jeder Weg von einem Element aus X_1 zu einem Element aus X_2 den Punkt bzw. die Ebene aus $X_1 \cap X_2$.*

Satz 7.15 *Das Axiomensystem Γ ist vollständig.*

BEWEIS. Seien M und N ω -saturierte Modelle von Γ . Dann erfüllen M und N die Behauptung des vorigen Satzes. Mit dem Satz von Löwenheim und

Skolem lassen sich abzählbare elementare Unterstrukturen M_1 von M und N_1 von N finden, welche ebenfalls die Behauptung aus Satz 7.13 erfüllen. Ich werde zeigen, daß M_1 und N_1 isomorph sind. Wegen der ω_1 -Universalität von ω -saturierten Modellen zeigt dies die Vollständigkeit von Γ .

Da M_1 und N_1 beide abzählbar viele Komponenten besitzen, genügt es, einen Isomorphismus zwischen zwei Zusammenhangskomponenten M'_1 von M_1 und N'_1 von N_1 anzugeben. Fixiere für das folgende 2-zusammenhängende Komponenten D von M'_1 und D' von N'_1 . Nach Satz 7.8 sind D und D' Modelle von Γ und als solche nach Satz 7.5 isomorph mittels eines Isomorphismus f . Wähle nun eine beliebige Ebene a in D . a liegt außerdem noch in abzählbar vielen anderen 2-zusammenhängenden Komponenten von M'_1 . Sei D_1, D_2, \dots eine Aufzählung derselben. Ebenso sei D'_1, D'_2, \dots eine Aufzählung aller von D' verschiedenen 2-zusammenhängenden Komponenten von N'_1 , welche $f(a)$ enthalten. Wegen Lemma 7.9 ist $D_i \cap D_j = \{a\}$ für $i \neq j$ sowie $D'_i \cap D'_j = \{f(a)\}$. D_i und D'_i sind wiederum abzählbare 2-zusammenhängende Modelle von Γ und als solche isomorph nach Satz 7.5 mittels eines Isomorphismus f_i . Wegen der Homogenität der D_i gemäß Korollar 7.3 kann $f_i(a) = f(a)$ angenommen werden. Die Vereinigung der Isomorphismen f_i bildet dann nach Lemma 7.9 wieder einen Isomorphismus. Dieser Prozeß wird für jede Ebene und jeden Punkt von D fortgesetzt. Dabei wird auf die Farben allein durch die Isomorphismen f_i Rücksicht genommen. Satz 7.13 sichert, daß auf diese Weise ein Isomorphismus zwischen M'_1 und N'_1 entsteht. \square

8 Die ω -Stabilität von Γ

Dieses Kapitel behandelt die ω -Stabilität von Γ . Hierbei wird die Charakterisierung der Stabilität über die Anzahl der Typen genutzt, d.h. ich zeige, daß über jedem abzählbaren Modell von Γ nur abzählbar viele Typen existieren. Vorbereitend werden abgeschlossene Mengen definiert und eine Typenanalyse über abgeschlossenen Mengen durchgeführt. Dies geschieht in Lemma 8.7, von welchem sich Varianten sowohl in [1] als auch in [4] finden. Unter Ausnutzung von Lemma 8.7 wird dann mittels eines Ehrenfeucht-Fraïssé-Spieles gezeigt, daß der Typ einer abgeschlossenen Menge bereits durch ihren Isomorphietyp bestimmt wird. Dies liefert zusammen mit Lemma 8.17 den entscheidenden Schritt zum Beweis der Stabilität von Γ . Wie schon im letzten Kapitel ist auch hier das Grundgerüst des Beweises dem Vorgehen aus [1] nachempfunden, wobei sich jedoch, wie schon an früherer Stelle, die Argumentationen durch die zusätzlichen Farben und die direkten Punkt-Ebenen-Relationen technisch aufwendiger gestalten.

Für das folgende sei ein Monstermodell \bar{M} von Γ fixiert, d.h. \bar{M} ist ein saturiertes Modell einer genügend großen Mächtigkeit κ .

Definition 8.1 *Sei D eine Teilmenge von \bar{M} , d.h. $|D| < \kappa$. D heißt abgeschlossen, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:*

- (i) *Jeder AB-Weg (d, \dots, d') zwischen zwei Elementen d und d' aus D liegt vollständig in D . Ebenso liegt jeder BC-Weg (d, \dots, d') mit $d, d' \in D$ vollständig in D .*
- (ii) *Sind $d, d' \in D$ und gibt es in \bar{M} einen Weg zwischen d und d' , so gibt es auch einen Weg zwischen d und d' innerhalb von D .*
- (iii) *Ist a eine Ebene, welche die Gerade b enthält, und sind $a, b \in D$, so liegt der Ausnahmepunkt von b auf a ebenfalls in D .*

Besitzt D die Eigenschaften (i) und (ii), so werde die Menge als schwach abgeschlossen bezeichnet.

Die Definition abgeschlossener Mengen stammt aus [4], wo diese Mengen „closed“ heißen. In [1] werden schwach abgeschlossene Mengen „nice“ genannt.

Lemma 8.2 *Seien X eine 2-zusammenhängende Menge und D eine schwach abgeschlossene Menge. Dann ist $X \cap D$ 2-zusammenhängend.*

BEWEIS. Seien $d, e \in X \cap D$. Es ist die Existenz von AB- und BC-Wegen zwischen d und e in $X \cap D$ zu zeigen. Ich werde hier nur BC-Wege betrachten, die Existenz von AB-Wegen ergibt sich auf analoge Weise.

1. *Fall: $d, e \in B \cup C$. Da d und e in der 2-zusammenhängenden Menge X liegen, gibt es einen BC-Weg zwischen d und e . Dieser liegt auch in D .*

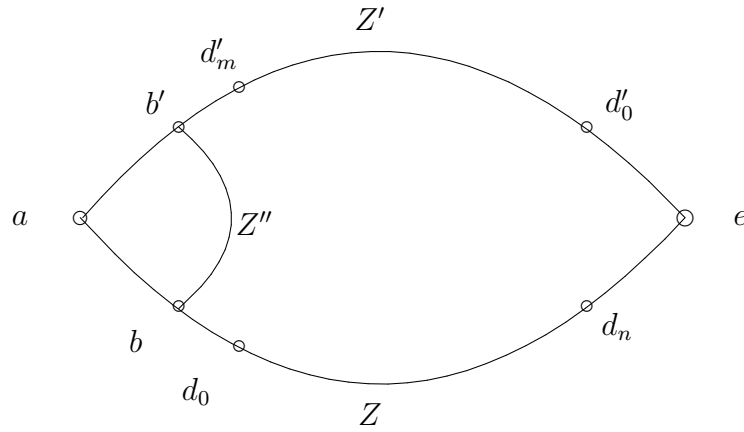


Abbildung 3: Fall 2 in Lemma 8.2

2. Fall: d ist eine Ebene a , und e ist ein Punkt oder eine Gerade. Sei $Z = (d_0, \dots, d_n)$ ein a und e verbindender BC -Weg innerhalb von X , d.h. es gibt den Weg (a, d_0, \dots, d_n, e) . Sei o.B.d.A. d_0 ein Punkt. Wähle eine Gerade b mit $d_0 \in b \subset a$. In D gibt es einen Weg $Z' = (d'_0, \dots, d'_m)$, so daß (e, Z', a) die Elemente e und a verbindet. O.B.d.A. sei d'_m ein Punkt. Wähle dann eine von b verschiedene Gerade b' mit $d'_m \in b' \subset a$. Nach eventuellem Kürzen entsteht aus

$$(a, b, Z, e, Z', b', a)$$

ein b und b' verbindender Kreis, aus welchem sich mit $\Sigma 4)(a)$ ein BC -Weg Z'' mit (b', Z'', b) ergibt. Nach eventuellem Kürzen erhalte ich aus der BC -Sequenz

$$(d'_m, b', Z'', b, Z, e)$$

einen BC -Weg zwischen den Elementen $d'_m, e \in B \cup C$ aus D . Dieser Weg ist als BC -Weg eindeutig und verbindet a und e innerhalb von D und somit auch innerhalb von $X \cap D$ wie gewünscht.

3. Fall: d und e sind Ebenen. Sei $d = a$ und $e = a'$. Die Argumentation verläuft ähnlich wie im vorigen Fall. Seien a und a' durch den BC -Weg $Z = (d_0, \dots, d_n)$ in X verbunden. Seien o.B.d.A. d_0, d_n Punkte. Wähle Geraden b und b' mit $d_0 \in b \subset a$ sowie $d_n \in b' \subset a'$. In D gibt es einen Weg $Z' = (d'_0, \dots, d'_m)$ mit (a', Z', a) . Seien wieder d'_0, d'_m Punkte und b'', b''' zwei von b und b' verschiedene Geraden mit $d'_m \in b'' \subset a$ sowie $d'_0 \in b''' \subset a'$. Die Anwendung von $\Sigma 4)(a)$ auf die aus

$$(a, b, Z, a', Z', b'', a) \quad \text{sowie} \\ (a', b''', Z', a, Z, b', a')$$

entstehenden Kreise liefert BC -Wege (b'', Z'', b) und (b', Z''', b''') . Dann ent-

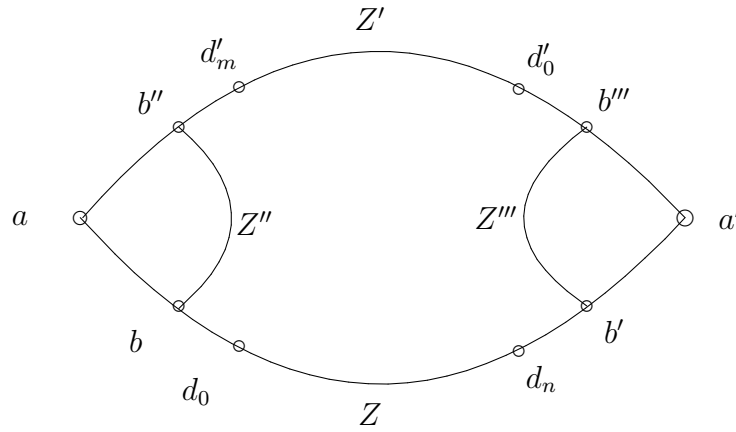


Abbildung 4: Fall 3 in Lemma 8.2

steht durch eventuelles Kürzen aus

$$(d'_m, b'', Z'', b, Z, b', Z''', b''', d'_0)$$

ein BC -Weg zwischen den in D gelegenen Elementen d'_m und d'_0 , welcher vollständig in D liegt. Über diesen Weg lassen sich dann a und a' wie gewünscht in $X \cap D$ verbinden.

□

Lemma 8.3 Sei D eine schwach abgeschlossene Menge mit $d, d' \in D$, und sei (d, Z, d') ein Weg zwischen d und d' mit $Z \cap D = \emptyset$. Dann liegen d und d' in einer gemeinsamen 2-Zusammenhangskomponente.

BEWEIS. Angenommen nicht. Seien X und Y verschiedene 2-zusammenhängende Komponenten mit $d \in X$ und $d' \in Y$. Wegen der Saturiertheit von \bar{M} bilden die 2-Zusammenhangskomponenten mit den Ebenen und Punkten wie in Satz 7.13 die freie Pseudoebene (Λ, Ω, L) . Dann gibt es einen eindeutigen Weg $(X, d_1, X_1, \dots, X_{m-1}, d_m, Y)$ mit $X_i \in \Lambda$, $1 \leq i \leq m-1$, und $d_i \in \Omega$, $1 \leq i \leq m$. Jeder Weg in \bar{M} zwischen d und d' muß nach Korollar 7.14 die Elemente d_1, \dots, d_m enthalten. Falls $m = 2$ und $d_1 = d$ sowie $d_2 = d'$, so enthält X_1 sowohl d als auch d' , und die Behauptung ist gezeigt. Andernfalls kommt für jedes i mit $d_i \neq d, d_i \neq d'$ das Element d_i in Z vor. Dies gilt aber auch für jedes andere Z' , so daß (d, Z', d') ein Weg ist. Weil D schwach abgeschlossen ist, gibt es einen solchen Weg Z' innerhalb von D . Dann ist jedoch $Z \cap D \neq \emptyset$ im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Folgende einfache Bemerkungen über schwach abgeschlossene Mengen werden im Beweisgang des nächsten Lemmas wiederholt zur Anwendung gelangen, weswegen sie hier zuvor betrachtet werden sollen.

Bemerkung 8.4 *Ist D eine schwach abgeschlossene Menge und b eine Gerade außerhalb von D , so gibt es höchstens eine Ebene in D , welche b enthält. Ebenso liegt höchstens ein Punkt von b in D . Ist analog a eine Ebene außerhalb von D , so liegt höchstens eine Gerade aus a in D . Ist c schließlich ein nicht in D gelegener Punkt, so befindet sich dieser höchstens auf einer Geraden aus D .*

BEWEIS. Angenommen, es gibt zwei verschiedene Ebenen $a, a' \in D$ mit $b \subset a, a'$. Dann liegt der AB -Weg (a, b, a') nicht in D im Widerspruch zur schwachen Abgeschlossenheit von D . Analog wird in den anderen Fällen argumentiert. \square

Bemerkung 8.5 *Sei D schwach abgeschlossen und b eine Gerade aus D .*

- (i) *Sei ferner $c \in b$ ein Punkt außerhalb von D , so daß $D \cup \{c\}$ ebenfalls schwach abgeschlossen ist. Gibt es dann eine Ebene $a \in D$ mit $c \in a$, so liegt bereits b in a . Dual gilt:*
- (ii) *Ist $a \supset b$ eine Ebene außerhalb von D , so daß $D \cup \{a\}$ schwach abgeschlossen ist, so gilt für jeden Punkt $c \in D$ mit $c \in a$ schon $c \in b$.*

BEWEIS. Zu (i): Angenommen, es gilt $b \not\subset a$. Nach Bemerkung 8.4 gibt es außer b keine weitere Gerade aus D , welche c enthält. c und a liegen aber in einer gemeinsamen 2-Zusammenhangskomponente X . Nach Lemma 8.2 ist dann auch $X \cap (D \cup \{c\})$ 2-zusammenhängend. Dann gibt es einen BC -Weg Z zwischen c und a in $X \cap (D \cup \{c\})$. Dieser muß die Gestalt

$$Z = (c, b, c_1, b_1, \dots, c_n, b_n, a)$$

mit $n \geq 1$ haben. Sei b' eine beliebige Gerade mit $c \in b' \subset a$. Dann ist $b' \not\subset D$ und daher verschieden von den in Z auftretenden Geraden. Es gibt somit den Kreis

$$(a, b', c, b, c_1, b_1, \dots, b_n, a).$$

Nach Bemerkung 7.1 verläuft dieser Kreis in a . Es ist aber $b \not\subset a$, welches den gewünschten Widerspruch gibt.

Zu (ii): Unter Konstruktion eines AB -Weges wird in einem zum obigen Vorgehen dualen Argument die Behauptung (ii) gezeigt. \square

Bemerkung 8.6 *Seien D eine schwach abgeschlossene Menge und $d \in D$ sowie $e \notin D$ zwei direkt zueinander inzidente Elemente. Existiert dann ein Weg zwischen e und einem Element $f \in D$, so gibt es auch einen Weg zwischen e und f , der nur Elemente aus $D \cup \{e\}$ benutzt.*

BEWEIS. Der Weg zwischen e und f kann zu einem Weg zwischen d und f verlängert werden. Da D schwach abgeschlossen ist, gibt es auch einen Weg zwischen d und f innerhalb von D , aus welchem sich der gesuchte Weg zwischen e und f mit Elementen aus $D \cup \{e\}$ ergibt. \square

Lemma 8.7 *Seien $D_1 \subseteq D_2$ abgeschlossene Mengen, und sei E_1 eine abgeschlossene Menge, welche mittels $f : D_1 \rightarrow E_1$ zu D_1 isomorph ist. Dann läßt sich f zu einem Isomorphismus zwischen D_2 und einer abgeschlossenen Menge $E_2 \supseteq E_1$ erweitern.*

BEWEIS. Falls ein $d \in D_2 \setminus D_1$ existiert, so daß es keinen Weg zwischen d und einem beliebigen Element aus D_1 gibt, so ist $D_1 \cup \{d\}$ abgeschlossen. Wegen der Sättiertheit von \bar{M} gibt es ein gleiches Element $e \in \bar{M}$, so daß e mit keinem Element aus E_1 durch einen Weg verbunden werden kann. Der Isomorphismus f kann dann durch $f(d) = e$ erweitert werden.

Andernfalls kann wegen der Abgeschlossenheit von D_2 ein Element $d \in D_2 \setminus D_1$ gewählt werden, so daß d direkt zu einem Element $d' \in D_1$ inzident ist. Je nach der Art der Elemente d und d' sind sechs Fälle zu unterscheiden.

Fall 1: d ist ein Punkt, der c genannt werde, und d' ist eine Gerade b . Somit gilt $c \in b$. Ich zeige zunächst, die

Behauptung 1 $D_1 \cup \{c\}$ ist abgeschlossen.

BEWEIS DER BEHAUPTUNG. BC -Wege zwischen c und D_1 müssen wegen der Abgeschlossenheitseigenschaft von D_1 über b verlaufen und liegen somit innerhalb von $D_1 \cup \{c\}$. Gibt es einen Weg zwischen c und einem Element aus D_1 , so existiert nach Bemerkung 8.6 auch ein solcher Weg innerhalb von $D_1 \cup \{c\}$. \square

Wegen der Sättiertheit von \bar{M} gibt es einen Punkt c' mit $c' \in f(b)$ und $c' \notin E_1$. Genau wie oben folgt die Abgeschlossenheit von $E_1 \cup \{c'\}$. Durch $f(c) = c'$ wird dann f zu einem Isomorphismus zwischen $D_1 \cup \{c\}$ und $E_1 \cup \{c'\}$ erweitert. Es ist hierfür zu zeigen:

- a) Falls $b' \in D_1$ und $c \in b'$ gilt, so ist $c' \in f(b')$.
- b) Ist $a \in D_1$ und $c \in a$, so gilt $c' \in f(a)$, und c hat dieselbe Farbe in a wie c' in $f(a)$.

Nach Bemerkung 8.4 gibt es außer b keine Gerade in D_1 , welche c enthält. Dies zeigt a). Für b) sei a eine Ebene aus D_1 , die c enthält. Nach Bemerkung 8.5(i) ist dann $b \subset a$. Wegen $c \notin D_1$ ist c nicht der Ausnahmepunkt von b auf a und hat somit dieselbe Farbe wie b . Das gleiche gilt auch für c' , womit b) erfüllt ist.

Fall 2: d ist eine Ebene, welche mit a bezeichnet werde, und d' ist eine Gerade b . Sei c der Ausnahmepunkt von b auf a . Wegen der Abgeschlossenheit von D_2 ist $c \in D_2$. Falls $c \notin D_1$ ist, kann Fall 1 auf c und b angewendet werden. Sei nun $c \in D_1$. Wegen der Dualität von Punkten und Ebenen ist mit D_1 dann in analoger Argumentation zu Fall 1 auch $D_1 \cup \{a\}$ abgeschlossen. Wähle nun eine Ebene $a' \notin E_1$, welche $f(b)$ enthält und auf dieser Geraden den Ausnahmepunkt $f(c)$ besitzt. $E_1 \cup \{a'\}$ ist dann ebenfalls abgeschlossen, und der Isomorphismus f kann durch $f(a) = a'$ erweitert werden. Hierzu ist wiederum nachzuweisen:

- a) Ist $b' \in D_1$ und $b' \subset a$, so ist auch $f(b') \subset a'$.
- b) Ist $c' \in D_1$ und $c' \in a$, so gilt $f(c') \in a'$, und die Farben der Punkte in den beiden Ebenen sind gleich.

Wie im vorigen Fall ergibt sich a) aus Bemerkung 8.4 und b) aus Bemerkung 8.5(ii).

Fall 3: d ist eine Gerade b und d' ist ein Punkt c . Eine weitere Fallunterscheidung wird hier zweckmäßig sein.

Fall 3(i): Es gibt keinen AB -Weg von b nach D_1 . Dann gilt:

Behauptung 2 $D_1 \cup \{b\}$ ist abgeschlossen.

BEWEIS DER BEHAUPTUNG. Jeder BC -Weg von b nach D_1 verläuft wegen der Abgeschlossenheit von D_1 über c und liegt daher in $D_1 \cup \{b\}$. AB -Wege zwischen b und D_1 gibt es nicht. Existiert ein beliebiger Weg zwischen b und einem Element aus D_1 , so gibt es nach Bemerkung 8.6 auch einen solchen Weg innerhalb von $D_1 \cup \{b\}$. \square

Wegen der Sätturiertheit von \bar{M} läßt sich eine Gerade $b' \in \bar{M} \setminus E_1$ von derselben Farbe wie b mit $f(c) \in b'$ finden, so daß b' mit keinem Element von E_1 durch einen AB -Weg verbunden werden kann. Hierzu muß die 2-Zusammenhangskomponente von b' verschieden sein von allen 2-Zusammenhangskomponenten der Geraden aus E_1 . Analog zu obiger Argumentation ist dann $E_1 \cup \{b'\}$ abgeschlossen, und es gilt:

Behauptung 3 Der Isomorphismus f wird durch $f(b) = b'$ erweitert.

BEWEIS DER BEHAUPTUNG. c ist der einzige Punkt aus D_1 , welcher auf b liegt, und es gibt keine Ebene aus D_1 , welche b enthält. Gleiches gilt für b' und E_1 . \square

Fall 3(ii): Es gibt eine Ebene $a \in D_1$ mit $b \subset a$. Sei c_0 der Ausnahmepunkt von b auf a . Es ist $c_0 \in D_2$. Da D_1 abgeschlossen ist, ist mit Bemerkung 8.4 entweder $c_0 = c$ oder $c_0 \notin D_1$. In der weiteren Argumentation werde ich nur auf den Fall $c_0 \in D_2 \setminus D_1$ eingehen. Ist nämlich $c_0 = c$, so vereinfachen sich die folgenden Betrachtungen in offensichtlicher Weise.

Behauptung 4 $D_1 \cup \{b, c_0\}$ ist abgeschlossen. Außerdem ist $D_1 \cup \{b\}$ schwach abgeschlossen.

BEWEIS DER BEHAUPTUNG. AB -Wege zwischen b und D_1 müssen durch a verlaufen. Analog gehen alle BC -Wege von b nach D_1 über c . BC -Wege zwischen c_0 und D_1 beginnen mit (c_0, b, c, \dots) . Ferner liefert jeder ABC -Weg zwischen b oder c_0 und einem Element $e \in D_1$ einen Weg zwischen c und e und damit einen Weg zwischen b bzw. c_0 und e innerhalb von $D_1 \cup \{b, c_0\}$. \square

Da f ein Isomorphismus zwischen D_1 und E_1 ist, gilt mit $c \in a$ auch $f(c) \in f(a)$. Aufgrund der Saturiertheit von \bar{M} läßt sich eine Gerade $b' \notin E_1$ mit $f(c) \in b' \subset f(a)$ von derselben Farbe wie b finden. Falls $c_0 = c$ ist, muß zusätzlich b' so gewählt werden, daß $f(c)$ der Ausnahmepunkt von b' auf $f(a)$ ist. Ist $c_0 \notin D_1$, so wähle ich die Gerade b' so, daß ihr Ausnahmepunkt c'_0 auf $f(a)$ nicht in E_1 liegt. Analog zu obiger Argumentation ist dann $E_1 \cup \{b', c'_0\}$ abgeschlossen, und es gilt:

Behauptung 5 Der Isomorphismus f kann durch $f(b) = b'$ und eventuell noch $f(c_0) = c'_0$ erweitert werden.

BEWEIS DER BEHAUPTUNG. Nach Bemerkung 8.4 ist c der einzige Punkt aus D_1 , welcher auf b liegt, und a ist die einzige Ebene aus D_1 , welche b enthält. Gleiches gilt für b' und E_1 .

Falls $c_0 \notin D_1$ ist, müssen ferner untersucht werden:

- a) Ist $b'' \in D_1$ und $c_0 \in b''$, so folgt $c'_0 \in f(b'')$.
- b) Ist a' eine Ebene aus D_1 mit $c_0 \in a'$, so gilt auch $c'_0 \in f(a')$, und die Farben der Punkte in den Ebenen sind gleich.

Zu a): Da $D_1 \cup \{b\}$ schwach abgeschlossen ist, folgt mit Bemerkung 8.4 aus $c_0 \in b'' \in D_1 \cup \{b\}$ bereits $b'' = b$ und damit die Behauptung $c'_0 \in f(b'') = b'$.

Zu b): Weil $D_1 \cup \{b\}$ und $D_1 \cup \{b, c_0\}$ schwach abgeschlossen sind, folgt mit Bemerkung 8.5(i) aus $c_0 \in a' \in D_1$ schon $b \subset a'$. Dann ist aber wegen der Abgeschlossenheit von D_1 nach Bemerkung 8.4 $a = a'$. Mithin ist $c'_0 \in f(a') = f(a)$. Da c_0 und c'_0 die Ausnahmepunkte von b bzw. b' auf a bzw. $f(a)$ sind, haben sie auch in diesen Ebenen dieselbe Farbe. \square

Fall 3(iii): Es gibt einen AB -Weg $Z = (b, \dots, e)$ zwischen b und einem Element $e \in D_1$ der Länge wenigstens drei, wobei angenommen werden kann, daß e das einzige Element aus D_1 auf diesem Weg ist. Da D_2 abgeschlossen ist, liegt der Weg Z jedoch vollständig innerhalb von D_2 .

Ist e eine Gerade, so ist das Element unmittelbar vor e in dem AB -Weg Z eine Ebene $a \in D_2 \setminus D_1$ mit $e \subset a$. Dann kann Fall 2 auf e und a angewendet werden.

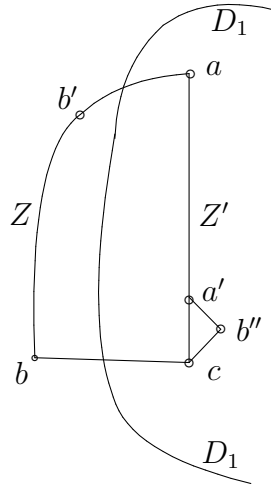


Abbildung 5: Fall 3(iii) in Lemma 8.7

Sei nun e eine Ebene a . Dann hat Z die Form (b, \dots, b', a) . Nach Lemma 8.3 liegen a und c in einer gemeinsamen 2-Zusammenhangskomponente X . Mit Lemma 8.2 ist auch $D_1 \cap X$ 2-zusammenhängend. Es gibt daher innerhalb von D_1 einen Weg $Z' = (a, \dots, a', c)$, in dem außer c keine Punkte auftreten. Nun wähle ich eine von den Geraden aus Z und Z' verschiedene Gerade b'' mit $c \in b'' \subset a'$ und erhalte so den Kreis

$$(c, b, \dots, b', a, \dots, a', b'', c),$$

in welchem außer c nur Ebenen und Geraden vorkommen. Axiom $\Sigma 4)(b)$ garantiert, daß alle Geraden dieses Kreises den Punkt c enthalten. Mithin ist b' eine Gerade aus $D_2 \setminus D_1$ mit $c \in b' \subset a$, und es kann Fall 3(ii) auf b', c und a angewendet werden.

Fall 4: d ist ein Punkt c und d' eine Ebene a .

Fall 4(i): Falls es keinen BC -Weg zwischen c und einem Element aus D_1 gibt, ist $D_1 \cup \{c\}$ abgeschlossen. Wähle nun einen Punkt c' außerhalb von E_1 , der in $f(a)$ liegt, dort dieselbe Farbe wie c in a hat und mit keinem Element aus E_1 durch einen BC -Weg verbunden werden kann. Dann wird durch $f(c) = c'$ der Isomorphismus f erweitert. Da es keine Gerade $b \in D_1$ mit $c \in b$ gibt und gleiches für c' und E_1 gilt, ist hierfür nur zu überprüfen, daß für $c \in a' \in D_1$ auch $c' \in f(a')$ erfüllt ist. Dies ergibt sich aus folgender

Behauptung 6 *Außer a gibt es keine Ebene in D_1 , welche c enthält.*

BEWEIS DER BEHAUPTUNG. Angenommen, $a' \in D_1$ ist eine von a verschiedene Ebene mit $c \in a'$. Nach Lemma 8.3 liegen a und a' in einer gemeinsamen 2-Zusammenhangskomponente X . Wegen Lemma 8.2 ist auch $D_1 \cap X$ 2-zusammenhängend, und a und a' können durch einen AB -Weg Z in D_1 verbunden werden. Wähle nun zwei verschiedene Geraden b und b' mit $c \in b \subset a$

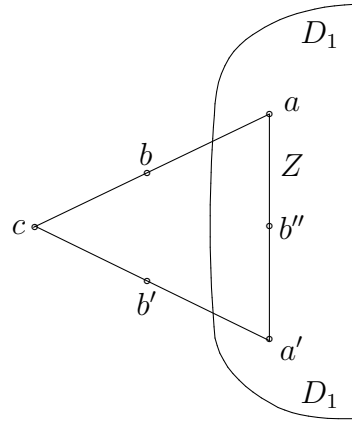


Abbildung 6: Behauptung 6 in Lemma 8.7

und $c \in b' \subset a'$.

Nach Voraussetzung sind $b, b' \notin D_1$. Dann gibt es den Kreis (c, b, a, Z, a', b', c) . Nach $\Sigma 4)(b)$ enthalten alle Geraden aus Z den Punkt c , insbesondere gibt es eine Gerade $b'' \in Z$ mit $c \in b'' \in D_1$ im Widerspruch zur Voraussetzung. \square

Fall 4(ii): Der Punkt c kann durch einen BC -Weg $Z = (c, \dots, e)$ mit einem Element e aus D_1 verbunden werden, wobei außer e in Z kein Element aus D_1 vorkommen möge. Ist e eine Gerade, so steht unmittelbar vor e in Z ein Punkt c' , und es kann Fall 1 auf c' und e angewendet werden. Ist hingegen e ein Punkt, so steht in Z vor e eine Gerade b' , und Fall 3 mit b' und e kann zur Anwendung gelangen.

Fall 5: d ist eine Gerade b und d' eine Ebene a . Sei c_0 der Ausnahmepunkt von b auf a . Da D_2 abgeschlossen ist, befindet sich c_0 in D_2 . Ist $c_0 \in D_2 \setminus D_1$, so kann Fall 4 auf a und c_0 angewendet werden. Ist hingegen $c_0 \in D_1$, so benutze ich Fall 3 mit c_0 und b .

Fall 6: d ist eine Ebene a und d' ein Punkt c . Ähnlich wie vorher bietet sich folgende Fallunterscheidung an:

Fall 6(i): Es gibt keinen AB -Weg zwischen a und D_1 . Es gilt dann

Behauptung 7 $D_1 \cup \{a\}$ ist abgeschlossen.

BEWEIS DER BEHAUPTUNG. AB -Wege zwischen a und D_1 gibt es nicht, und mit ABC -Wegen wird wie in Bemerkung 8.6 verfahren. \square

Aufgrund der Saturiertheit von \bar{M} ist es möglich, eine Ebene $a' \notin E_1$ mit $f(c) \in a'$ zu wählen, die nicht durch einen AB -Weg mit E_1 verbunden werden kann und in der $f(c)$ dieselbe Farbe hat wie c in a . Durch $f(a) = a'$ wird dann der Isomorphismus f erweitert. Dies folgt aus der

Behauptung 8 Außer c ist kein Punkt aus D_1 in a enthalten. Gleiches gilt für E_1 und a' .

Der Beweis erfolgt dual zum Beweis von Behauptung 6.

Fall 6(ii): a kann mit einem Element $e' \in D_1$ durch einen AB -Weg (a, \dots, e, e') verbunden werden, auf dem außer e' kein Element aus D_1 vorkommt. Je nachdem, ob e eine Ebene oder eine Gerade ist, kommt entweder Fall 2 oder Fall 5 auf e und e' zur Anwendung. \square

Korollar 8.8 *Sei D eine abgeschlossene Menge und \bar{d} eine Aufzählung derselben. Dann wird der Typ von \bar{d} bereits durch den quantorenfreien Typ von \bar{d} bestimmt, d.h. ist \bar{e} Aufzählung einer abgeschlossenen Menge E und ist $qftp(\bar{d}) = qftp(\bar{e})$, so gilt $tp(\bar{d}) = tp(\bar{e})$.*

BEWEIS. Wegen $qftp(\bar{d}) = qftp(\bar{e})$ sind D und E isomorph. Weil jede Menge aus \bar{M} in einer abgeschlossenen Menge (z.B. einem Modell) enthalten ist, kann, beginnend mit dem zwischen D und E gegebenen Isomorphismus, ein Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel gespielt werden.

Hierbei wählt Spieler I die Elemente des Monsters \bar{M} gemäß einer Aufzählung $a_\alpha, \alpha < \kappa$. Zu Beginn gibt es die abgeschlossenen Mengen $D_0 = D$ und $E_0 = E$ sowie den Isomorphismus $f_0 : D_0 \rightarrow E_0$. Im Schritt α existieren die abgeschlossenen Mengen D_β und $E_\beta, \beta < \alpha$, sowie Isomorphismen $f_\beta : D_\beta \rightarrow E_\beta$. Setze nun $D'_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} D_\beta$ und $E'_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} E_\beta$ sowie $f'_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} f_\beta$. Dann ist f'_α ein Isomorphismus zwischen D'_α und E'_α . Wähle nun eine abgeschlossene Menge D_α , welche D'_α und a_α enthält. Nach Lemma 8.7 gibt es eine abgeschlossene Menge $E_\alpha \supseteq E'_\alpha$ und einen Isomorphismus $f_\alpha : D_\alpha \rightarrow E_\alpha$, welcher f'_α erweitert. Spieler II wählt nun in Runde α das Element $f_\alpha(a_\alpha)$. Am Ende des Spiels gibt es einen Automorphismus f_κ von \bar{M} mit $f_\kappa(\bar{d}) = \bar{e}$. Daher ist $tp(\bar{d}) = tp(\bar{e})$. \square

Für späteren Gebrauch halte ich an dieser Stelle noch fest:

Korollar 8.9 *Die Menge der Punkte einer Geraden b ist ununterscheidbar über dieser Geraden b , d.h. sind \bar{c} und \bar{c}' zwei gleichlange Tupel von Punkten aus b , so gibt es einen Automorphismus f von \bar{M} mit $f(\bar{c}) = \bar{c}'$ und $f(b) = b$.*

BEWEIS. Seien $\bar{c} = c_1, \dots, c_n$ und $\bar{c}' = c'_1, \dots, c'_n$ zwei Tupel von Punkten aus b . Dann sind $\{c_1, \dots, c_n, b\}$ und $\{c'_1, \dots, c'_n, b\}$ offenbar zwei abgeschlossene zueinander isomorphe Mengen. Nach vorigem Korollar ist dann $tp(c_1, \dots, c_n, b) = tp(c'_1, \dots, c'_n, b)$ und daher $tp(\bar{c}/b) = tp(\bar{c}'/b)$. Mit den Sättigervoraussetzungen von \bar{M} ergibt sich hieraus die Behauptung. \square

Auf gleiche Weise erhält man:

Korollar 8.10 *Sei a eine Ebene. Dann sind je zwei Punkte aus dem roten Bereich a_r von a konjugiert zueinander über a .*

BEWEIS. Seien $c, c' \in a_r$. Dann sind $\{c, a\}$ und $\{c', a\}$ abgeschlossen und zueinander isomorph. Mit Korollar 8.8 ist $tp(c/a) = tp(c'/a)$, woraus die Behauptung folgt. \square

Für das nächste, zum Nachweis der Stabilität von Γ entscheidende Lemma 8.17 sind einige Vorbereitungen erforderlich. Zunächst sollen zwei neue Sprechweisen eingeführt werden.

Definition 8.11 *Seien D und D' zwei beliebige nicht disjunkte Mengen. Die Vereinigung von D und D' heißt frei über $D \cap D'$, falls für je zwei Elemente $d \in D$ und $d' \in D' \setminus D$ folgende Bedingungen erfüllt sind:*

- (i) *Gilt $I(d, d')$ oder $J(d, d')$, so ist bereits $d \in D \cap D'$.*
- (ii) *Falls $d \in D \setminus D'$ ist und $I_r(d, d')$ oder $I_w(d, d')$ gilt, so gibt es eine Gerade $b \in D \cap D'$, so daß b mittels I bzw. J direkt sowohl zu d als auch zu d' inzident ist.*

Nun definiere ich einen Abschlußoperator cl auf Teilmengen von \bar{M} . Für eine Menge D enthalte $cl(D)$ die Menge D selbst und zusätzlich für alle Geraden b und Ebenen a aus D mit $b \subset a$ auch den Ausnahmepunkt von b auf a . Dann gilt offenbar:

Bemerkung 8.12 *Ist D schwach abgeschlossen, so ist $cl(D)$ eine abgeschlossene Menge.*

BEWEIS. Für jeden neuen Ausnahmepunkt wird wie in der Behauptung 1 des Beweises von Lemma 8.7 argumentiert. \square

Für den Beweis von Lemma 8.17 sind folgende, eher technische Bemerkungen, Durchschnitte und Vereinigungen von abgeschlossenen Mengen betreffend, nötig.

Bemerkung 8.13 *Sind D und D' zwei abgeschlossene Mengen und ist $D_0 = D \cap D'$ zusammenhängend, so ist D_0 abgeschlossen.*

BEWEIS. Wegen des Zusammenhangs von D_0 gibt es zwischen je zwei Elementen aus D_0 einen Weg. AB - bzw. BC -Wege zwischen Elementen aus D_0 liegen wegen der Abgeschlossenheit von D und D' sowohl vollständig in D als auch vollständig in D' , mithin in D_0 . Gleiches gilt für die Ausnahmepunkte. \square

Bemerkung 8.14 *Seien D eine zusammenhängende abgeschlossene Menge und D' eine 2-zusammenhängende abgeschlossene Menge. Ferner seien D und D' nicht disjunkt, und der Durchschnitt enthalte Elemente $e_0 \in B \cup C$ und $e_1 \in A \cup B$, welche nicht notwendig verschieden sein müssen. Dann ist $D \cup D'$ schwach abgeschlossen. Ist darüber hinaus $D \cup D'$ freie Vereinigung von D und D' über $D \cap D'$, so ist $D \cup D'$ sogar abgeschlossen.*

BEWEIS. Da D und D' zwei zusammenhängende, nicht disjunkte Mengen sind, ist auch $D \cup D'$ zusammenhängend. Sei X ein AB -Weg zwischen $d \in D$ und $d' \in D'$. Weil D' 2-zusammenhängend ist, kann d' mit e_1 innerhalb von D' durch einen AB -Weg Y verbunden werden. Damit gibt es durch Zusammensetzen von X und Y einen AB -Weg zwischen d und e_1 , welcher wegen der Abgeschlossenheit von D innerhalb von D verläuft. Komposition dieses Weges mit dem rückwärtsgelaufenen Weg Y ergibt die AB -Verbindung zwischen d und d' innerhalb von $D \cup D'$. BC -Wege werden unter Benutzung von e_0 analog behandelt.

Es bleiben für den Zusatz der Behauptung die Ausnahmepunkte zu betrachten. Seien a eine Ebene und $b \subset a$ eine Gerade aus $D \cup D'$. Da sich D und D' frei über $D \cap D'$ vereinigen, sind a und b entweder beide in D oder beide in D' enthalten. Nach Abgeschlossenheit von D und D' findet sich dann auch der Ausnahmepunkt von b auf a in der Menge $D \cup D'$. \square

Bemerkung 8.15 *Seien D und D' zwei zusammenhängende abgeschlossene Mengen. D' sei in der 2-Zusammenhangskomponente E enthalten, und es gelte $D \cap E = \{e\}$, wobei e ein Punkt oder eine Ebene ist. Dann ist $D \cup D'$ abgeschlossen. Zudem ist die Vereinigung von D und D' frei über $\{e\}$.*

BEWEIS. Sei e eine Ebene a . Ich werde zunächst zeigen, daß jeder Weg von D nach D' über a verläuft. Angenommen, Z ist ein Weg zwischen $d \in D$ und $d' \in D'$, in welchem a nicht auftritt. Da D und D' zusammenhängend sind, gibt es in diesen Mengen Wege Y und Y' , die a und d bzw. d' und a verbinden. Aus der Sequenz (a, Y, Z, Y', a) läßt sich ein Kreis (a, b, \dots, b', a) gewinnen, wobei $b \notin E$ und $b' \in E$ ist. Die Wahl solcher Geraden ist nach Bemerkung 7.10 möglich. Wegen des Axioms $\Sigma 4)(a)$ gibt es einen BC -Weg zwischen b und b' . Andererseits gibt es den AB -Weg (b, a, b') , womit b und b' in einer gemeinsamen 2-Zusammenhangskomponente liegen, im Widerspruch zur obigen Wahl dieser Geraden. Wege zwischen D und D' müssen also über a verlaufen.

Hieraus ergibt sich unmittelbar, daß $D \cup D'$ freie Vereinigung von D und D' über $\{a\}$ ist. Außerdem kann es keine BC -Wege zwischen D und D' geben. AB -Wege zwischen D und D' benutzen die Ebene a und zerfallen somit in ein in D gelegenes Wegstück, welches bis a geht, und einen mit a beginnenden Teil in D' . Da D und D' zusammenhängend sind, können auch je zwei Elemente in $D \cup D'$ durch einen ABC -Weg verbunden werden. Weil die Vereinigung von D und D' frei über $\{a\}$ ist, liegen alle Paare $b' \subset a'$ aus $D \cup D'$ bereits entweder in D oder D' , mithin ist auch der Ausnahmepunkt von b' auf a' in $D \cup D'$ enthalten. Damit ist $D \cup D'$ abgeschlossen.

Ist der Durchschnitt von D und D' ein Punkt, wird unter Ausnutzung der Dualität von Ebenen und Punkten ebenso argumentiert. \square

Eine einfache Art, eine 2-zusammenhängende und schwach abgeschlossene Menge zu erhalten, wird im nächsten Lemma angegeben. Diese Konstruktion wird in der Beweisführung von Lemma 8.17 mehrfach Verwendung finden.

Lemma 8.16 *Seien e_0 ein Punkt oder eine Gerade und e_1 eine Gerade oder eine Ebene. Seien die Elemente e_0 und e_1 durch die Wege (e_0, X, e_1) und (e_0, Y, e_1) verbunden, wobei X ein BC -Weg und Y ein AB -Weg ist. Dann ist die Menge $D = \{e_0, e_1\} \cup X \cup Y$ eine 2-zusammenhängende, schwach abgeschlossene Menge.*

BEWEIS. Da D zusammenhängend ist, folgt aus dem 2-Zusammenhang auch die schwache Abgeschlossenheit. Nach Bemerkung 7.6 genügt es folglich zu zeigen, daß es zwischen je zwei Geraden von D sowohl AB - als auch BC -Wege gibt. Ich kann daher annehmen, daß $X \cap Y = \emptyset$ ist. Ist X oder Y leer, so liefert die Anwendung von Bemerkung 7.1 die Behauptung.

Seien nun X und Y nicht leer. Dann gibt es den Kreis $Z = (e_0, X, e_1, Y^{-1}, e_0)$, wobei Y^{-1} den rückwärts durchlaufenen Weg Y bedeute. Sei b eine Gerade in $X \cup \{e_0, e_1\}$. In dem Kreis Z tritt dann eine Sequenz (b, c, b') mit einem Punkt c und einer Geraden b' auf. Das Axiom $\Sigma 4(b)$, angewendet auf den Kreis Z , liefert dann eine Ebene aus $Y \cup \{e_1\}$, welche den Punkt c enthält.

Genauso ist jede Gerade in $Y \cup \{e_0, e_1\}$ zu einem Punkt in $X \cup \{e_0\}$ inzident. Hieraus lassen sich AB - und BC -Wege zwischen je zwei Geraden aus D gewinnen. \square

Lemma 8.17 *Seien D eine abgeschlossene Menge und $d \in \bar{M}$ ein beliebiges Element. Dann gibt es eine endliche abgeschlossene Menge D' , welche d enthält, so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:*

- (i) $D \cup D'$ ist abgeschlossen,
- (ii) $D \cap D'$ ist abgeschlossen, und
- (iii) die Vereinigung von D und D' ist frei über $D \cap D'$.

BEWEIS. Ist $d \in D$, so ist $D' = \{d\}$ die gesuchte Menge. Ich nehme daher $d \notin D$ an. Falls die Zusammenhangskomponente X von d mit D disjunkt ist, kann wiederum $D' = \{d\}$ gewählt werden. Gilt dies nicht, so kann der Teil von D , welcher nicht in X liegt, offenbar vernachlässigt werden. Ich nehme daher $D \subseteq X$ an. Insbesondere ist D dann zusammenhängend.

Ich zeige das Lemma zunächst unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß d in einer 2-Zusammenhangskomponente E liegt, welche die Menge D schneidet. Nach der Größe dieses Durchschnitts sind zwei Fälle zu unterscheiden.

1. *Fall:* $D \cap E$ ist einelementig. Sei $D \cap E = \{e\}$. In E gibt es einen BC -Weg X sowie einen AB -Weg Y mit (d, X, e) und (d, Y, e) . Sei $D' = cl(X \cup Y \cup$

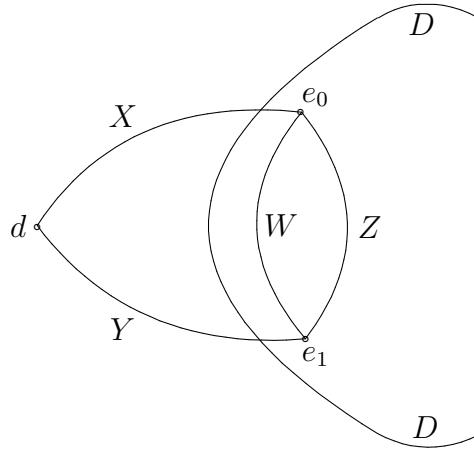


Abbildung 7: Fall 2 in Lemma 8.17

$\{d, e\}$). D' ist dann nach Bemerkung 8.12 und Lemma 8.16 abgeschlossen. Ist e eine Gerade, so folgt mit Bemerkung 7.6 $D = \{e\}$, und die Behauptung gilt offenbar für D' . Sei nun e ein Punkt oder eine Ebene. Weil $D' \subset E$ und $D \cap E = \{e\}$ gelten, erfüllt D' nach Bemerkung 8.15 die Bedingungen (i) bis (iii) der Behauptung.

2. *Fall:* $D \cap E$ enthält wenigstens zwei Elemente. Dann gibt es in $D \cap E$ zwei verschiedene Elemente e_0 und e_1 , so daß e_0 ein Punkt oder eine Gerade und e_1 eine Gerade oder eine Ebene ist. In E gibt es einen BC -Weg X und einen AB -Weg Y mit (d, X, e_0) und (d, Y, e_1) . Ich kann ferner annehmen, daß e_0 und e_1 so gewählt sind, daß $X \cap D = \emptyset$ sowie $Y \cap D = \emptyset$ gelten. Nach Bemerkung 8.2 ist $D \cap E$ 2-zusammenhängend, und e_0 und e_1 können folglich durch Wege (e_0, W, e_1) und (e_0, Z, e_1) verbunden werden, wobei W ein BC -Weg und Z ein AB -Weg ist. Sei $D'' = \{d, e_0, e_1\} \cup X \cup Y \cup W \cup Z$. Dann gilt:

Behauptung 1 D'' ist schwach abgeschlossen und 2-zusammenhängend.

BEWEIS DER BEHAUPTUNG. Der Beweis von Behauptung 1 erfolgt ähnlich wie der von Lemma 8.16. Da D'' zusammenhängend ist, folgt mit dem 2-Zusammenhang von D'' auch die schwache Abgeschlossenheit. Es genügt folglich zu zeigen, daß es zwischen je zwei Geraden aus D'' sowohl AB - als auch BC -Wege innerhalb von D'' gibt.

Sei hierzu beispielsweise b eine Gerade aus $X \cup \{d\}$. Dann erhält man aus X, Y und Z einen Kreis, in welchem eine Sequenz der Form (b, c, b') mit einem Punkt c und einer Geraden b' auftritt. Nach Axiom $\Sigma 4)(b)$ gibt es dann in $Y \cup Z \cup \{d, e_1\}$ eine Ebene, welche b enthält. Ebenso wird für Geraden aus W argumentiert. Mit $\Sigma 4)(a)$ enthalten auch alle Geraden aus Y und Z Punkte aus $X \cup W \cup \{d, e_0\}$. Dies liefert die Behauptung. \square

Mit Bemerkung 8.12 ist $D' = cl(D'')$ abgeschlossen. D' wird sich als die ge-

suchte endliche Menge erweisen. Bedingung (i), d.h. die Abgeschlossenheit von $D \cup D'$, ergibt sich mit der noch zu zeigenden Bedingung (iii) und Bemerkung 8.14. Die Bemerkung 8.13 zeigt, daß $D \cap D'$ abgeschlossen ist. Dies erfüllt Bedingung (ii).

Es verbleibt der Nachweis von Bedingung (iii). Hierzu soll zunächst die BC -Relation I überprüft werden. Angenommen, es gibt einen Punkt $c \in D' \setminus D$ und eine Gerade $b \in D \setminus D'$ mit $c \in b$. Dann gibt es eine Gerade b' aus D' , die den Punkt c enthält. Liegt b' in D , so ist mit Bemerkung 8.4 $b = b'$ und somit $b \in D'$. Ist hingegen $b' \notin D$, so gilt $b' \in X \cup Y \cup \{d\}$. Mit den Lemmata 8.2 und 8.3 gibt es dann eine BC -Verbindung (b, \dots, e_0) innerhalb von D . Da D' 2-zusammenhängend ist, gibt es innerhalb dieser Menge eine BC -Sequenz (e_0, \dots, b', c) , und es entsteht so der BC -Kreis $(b, \dots, e_0, \dots, b', c, b)$, welches den gewünschten Widerspruch ergibt. Ebenso wird vorgegangen, falls $b \in D' \setminus D$ und $c \in D \setminus D'$ ist sowie im Fall der AB -Relation J .

Zum Schluß sind für Bedingung (iii) noch die AC -Relationen I_r und I_w zu betrachten. Sei $a \in D' \setminus D$ und $c \in D \setminus D'$. Mit Lemma 8.3 gibt es einen BC -Weg $W' = (c, b, \dots, e_0)$ innerhalb von D . Ich wähle nun eine Gerade $b' \notin D' \cup W'$ mit $c \in b' \subset a$. Weil D' 2-zusammenhängend ist, gibt es auch in D' eine Gerade $b'' \subset a$. Diese Gerade b'' kann mit e_0 in D' durch einen BC -Weg verbunden werden. Da b' von b und b'' verschieden ist, erhalte ich aus der Sequenz

$$(a, b', c, b, \dots, e_0, \dots, b'', a)$$

durch Kürzen einen Kreis $(a, b', c, b, \dots, b'', a)$, in dem außer a nur Geraden und Punkte auftreten. Wegen $\Sigma 4)(a)$ ist dann b eine Gerade in D mit $c \in b \subset a$. Es wurde aber schon oben bei Anlaß der AB -Relation J gezeigt, dass dann $b \in D \cap D'$ ist. Es ist folglich b eine Gerade von der gesuchten Art. Die Konstellation $c \in D' \setminus D$ und $a \in D \setminus D'$ mit $c \in a$ wird dual hierzu behandelt. Dies beendet den Nachweis, daß die Vereinigung von D und D' über dem Durchschnitt dieser Mengen frei ist, und damit auch den Beweis der Behauptung in dem Fall, daß d in einer zu D nicht disjunkten 2-Zusammenhangskomponente E liegt.

Nun wird der allgemeine Fall behandelt. Hierfür wird, [1] folgend, nachstehende Notation nützlich sein. Seien E und E' zwei 2-Zusammenhangskomponenten innerhalb einer gemeinsamen Zusammenhangskomponente. Der Abstand $d(E, E')$ sei die eindeutig bestimmte natürliche Zahl n , so daß es in der freien Pseudoebene (Λ, Ω, L) den Weg

$$(E = E_0, d_0, E_1, d_1, \dots, E_{n-1}, d_{n-1}, E_n = E')$$

gibt, d.h. E_0, \dots, E_n sind 2-Zusammenhangskomponenten und $d_i \in E_i \cap E_{i+1}$ ist eine Ebene oder ein Punkt.

Nun zum Beweis der Behauptung im allgemeinen Fall. Seien E und E' 2-Zusammenhangskomponenten mit $d \in E$ und $E' \cap D \neq \emptyset$, so daß $d(E, E')$

minimal ist. Da die 2-Zusammenhangskomponenten zusammen mit den Ebenen und Punkten die freie Pseudoebene (Λ, Ω, L) bilden, sind E und E' eindeutig bestimmt. Der Weg minimaler Länge zwischen E und E' bestehe wie oben aus E_i, d_i .

Der Fall $n = 0$ wurde bereits eingangs behandelt. Ich nehme daher $n > 0$ an. Es ist weiterhin $d_{n-1} \notin D$ und $d_{n-1} \in E'$. Obiger Spezialfall der Behauptung ist somit auf d_{n-1} und D anwendbar und liefert eine endliche abgeschlossene Menge $D'_n \subset E'$, welche d_{n-1} enthält und (i) bis (iii) der Behauptung erfüllt.

Seien nun für $1 \leq i \leq n-1$ X_i BC - und Y_i AB -Wege in E_i mit (d_{i-1}, X_i, d_i) und (d_{i-1}, Y_i, d_i) . Ebenso seien X_0 und Y_0 die Elemente d und d_0 verbindende BC - bzw. AB -Wege, d.h. es gilt (d, X_0, d_0) sowie (d, Y_0, d_0) . Ich setze jetzt $D''_i = X_i \cup Y_i \cup \{d_{i-1}, d_i\}$ für $1 \leq i \leq n-1$ sowie $D''_0 = X_0 \cup Y_0 \cup \{d, d_0\}$. Nach Bemerkung 8.16 sind die Mengen D''_i , $0 \leq i \leq n-1$, schwach abgeschlossen, und nach Bemerkung 8.12 sind dann $D'_i = cl(D''_i)$, $0 \leq i \leq n-1$, abgeschlossene Mengen.

Die Menge D'_i liegt sicher in der 2-Zusammenhangskomponente E_i , und daher ist $D'_i \cap D'_{i+1} = \{d_i\}$ für $0 \leq i \leq n-1$. Durch wiederholte Anwendung von Bemerkung 8.15 ist dann die Menge $D' = \bigcup_{i=0}^n D'_i$ auch abgeschlossen. Da $D \cup D'_n$ bereits abgeschlossen ist, folgt ebenfalls mit Bemerkung 8.15 die Abgeschlossenheit von $D \cup D'$. Wegen $D' \cap D = D'_n \cap D$ ist der Durchschnitt der Mengen abgeschlossen. D' erfüllt also bereits (i) und (ii).

Da die Vereinigung von D und D'_n frei über deren Durchschnitt ist, bleibt für (iii) zu zeigen, daß die Freiheitsbedingungen auch für Elemente aus $D' \setminus D'_n$ zutreffen. Weil $(E_0, d_0, \dots, d_{n-1}, E_n)$ der kürzeste d und D verbindende Weg mit eindeutig bestimmten 2-Zusammenhangskomponenten $E = E_0$ und $E' = E_n$ ist, kann es aber aus $\bigcup_{i=0}^{n-1} E_i$ kein zu einem Element aus D direkt inzidentes Element geben. Damit ist $D' \cup D$ frei über $D' \cap D$, und D' erfüllt die Forderungen (i) bis (iii) der Behauptung. \square

Satz 8.18 Γ ist ω -stabil.

BEWEIS. Sei M ein abzählbares Modell von Γ . Zum Nachweis der ω -Stabilität genügt es zu zeigen, daß es über M nur abzählbar viele 1-Typen gibt. Als Modell ist M eine abgeschlossene Menge. Sei $d \in \bar{M}$ ein beliebiges Element. Nach Lemma 8.17 gibt es eine endliche abgeschlossene Menge D_d , welche d enthält und bezüglich M und d die Behauptungen (i) bis (iii) des vorigen Lemmas erfüllt. Sei $D = M \cap D_d$. Sei nun e ein weiteres Element aus \bar{M} und D_e die entsprechende, gemäß Lemma 8.17 gewählte, endliche abgeschlossene Menge. Angenommen, es gilt $D_d \cap M = D_e \cap M = D$, und D_d und D_e sind isomorph mittels eines Isomorphismus f , welcher auf D die Identität ist. Weil sich sowohl D_d und M als auch D_e und M frei über D vereinigen, läßt sich f zu einem Isomorphismus f' zwischen $M \cup D_d$ und $M \cup D_e$ mit $f'|_M = id$

erweitern. Es gibt nämlich keine Elemente $d \in M \setminus D_d$ und $d' \in D_d \setminus M$, die mittels I oder J in Relation stehen. Gleiches gilt auch für M und D_e . Ist nun a eine Ebene in $D_d \setminus M$ und c ein Punkt aus $M \setminus D_d$ mit $c \in a$, so gibt es wegen der Freiheit von $M \cup D_d$ eine Gerade $b \in M \cap D_d$ mit $c \in b \subset a$. Dann gilt aber auch $c \in b = f(b) \subset f(a)$. Da D_d und D_e abgeschlossene Mengen sind und c außerhalb dieser Mengen liegt, ist c weder der Ausnahmepunkt von b auf a noch auf $f(a)$. Der Punkt c hat also auch in a dieselbe Farbe wie in $f(a)$. Für $c \in D_d \setminus M$ und $a \in M \setminus D_d$ mit $c \in a$ ist die Situation analog. Damit ist die Existenz des Isomorphismus f' gesichert.

Dies bedeutet jedoch $qftp(D_d M) = qftp(D_e M)$. Da $D_d \cup M$ und $D_e \cup M$ abgeschlossene Mengen sind, ist dann mit Korollar 8.8 $tp(D_d M) = tp(D_e M)$ und insbesondere $tp(d/M) = tp(e/M)$.

Für die Wahl der endlichen Menge D in dem abzählbaren Modell M gibt es abzählbar viele verschiedene Möglichkeiten. Für ein fixiertes endliches $D \subset M$ gibt es wiederum nur abzählbar viele Isomphietypen des Paares (D_d, D) . Die Wahl der Menge D und der Isomphietyp von (D_d, D) bestimmen aber nach obigen Ausführungen $tp(d/M)$. Somit gibt es nur abzählbar viele 1-Typen über M . \square

9 Die Nichtäquationalität von Γ

In diesem letzten Kapitel zeige ich, daß die Theorie Γ nicht äquational ist. Speziell läßt sich der rote Bereich einer Ebene nicht durch eine Gleichung beschreiben. Zuvor muß hierfür der Morleyrang dieses roten Teils berechnet werden. Dies geschieht unter Benutzung der im letzten Kapitel gezeigten Resultate zur Quantorenelimination in Γ .

Lemma 9.1 *Sei a eine Ebene. Dann gilt für den roten Teil a_r dieser Ebene $MR(a_r) = \omega$ und $MD(a_r) = 1$.*

BEWEIS. Zunächst berechne ich $MR(a)$. Hierfür benutze ich die Äquivalenz von Morleyrang und Cantor-Bendixson-Rang in ω -saturierten Modellen. Sei M ein die Ebene a enthaltendes, hinreichend saturiertes Modell. $p \in S(M)$ besitzt dann Morleyrang α , falls p in dem Stone-Raum $\{p \in S(M) : MR(p) \geq \alpha\}$ isoliert ist. Der Morleyrang der die Punkte der Ebene a beschreibenden Formel $\theta(x) = I_r(x, a) \vee I_w(x, a)$ ergibt sich dann als

$$MR(\theta) = \sup\{MR(p) : \theta(x) \in p \in S(M)\}.$$

Der Morleygrad von θ berechnet sich mittels

$$MD(\theta) = |\{p \in S(M) : \theta \in p, MR(p) = MR(\theta)\}|.$$

Es sind also für alle Punkte $c \in a$ die Morleyränge $MR(tp(c/M))$ zu bestimmen.

Zunächst betrachte ich diejenigen in der Ebene a gelegenen Punkte aus \bar{M} , die mit M durch einen BC -Weg verbunden werden können. Hierzu zeige ich per Induktion über n die folgende Behauptung:

Behauptung 1 *Sind d und d' Geraden oder Punkte aus a und ist $X = (d' = d_0, d_1, \dots, d_{n-1}, d_n = d)$ ein verbindender BC -Weg, welcher außer d' keine Elemente aus M enthält, so gibt es eine Formel ϕ , welche $tp(d/M)$ in*

$$S_{MR \geq n}(M) := \{p \in S(M) : MR(p) \geq n\}$$

isoliert, d.h. es ist $MR(tp(d/M)) = n$.

In der Formel ϕ wird hierbei die Art des BC -Weges zwischen d und d' beschrieben. Sind nämlich d und e zwei die Formel ϕ erfüllende Elemente mit $tp(d/M), tp(e/M) \in S_{MR \geq n}(M)$ und sind $(d', d_1, \dots, d_{n-1}, d)$ sowie $(d', e_1, \dots, e_{n-1}, e)$ die entsprechenden BC -Wege zwischen d' und d bzw. e , so sind $D_1 = cl(M \cup \{d_1, \dots, d_{n-1}, d\})$ und $E_1 = cl(M \cup \{e_1, \dots, e_{n-1}, e\})$ zwei zueinander isomorphe abgeschlossene Mengen.

BEWEIS DER BEHAUPTUNG. *Induktionsanfang.* Für $n = 0$ ist $d = d'$ und somit $d \in M$. $tp(d/M)$ ist damit algebraisch, weswegen $MR(tp(d/M)) = 0$ gilt und die Behauptung offenbar richtig ist.

Induktionsschritt. Sei die Behauptung gezeigt für alle BC -Wege der Länge n , und seien d' und d durch den BC -Weg $X = (d', d_1, \dots, d_{n-1}, d)$ verbunden. Nach Induktionsvoraussetzung ist $tp(d_{n-1}/M)$ in $S_{MR \geq n-1}(M)$ isoliert. Sei $\phi(x)$ eine isolierende Formel. Ich gebe eine Formel ψ an, welche $tp(d/M)$ in $S_{MR \geq n}(M)$ isoliert. Hierfür unterscheide ich zwei Fälle nach der Art des Elementes d .

1.Fall: d ist ein Punkt c . In Abhängigkeit von der Farbe von c in a sei dann die Formel

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \exists y(\phi(y) \wedge I(x, y)) \wedge I_r(x, a) \quad \text{bzw.} \\ \psi(x) &= \exists y(\phi(y) \wedge I(x, y)) \wedge I_w(x, a). \end{aligned}$$

Für je zwei Punkte c und c' mit $\models \psi(c)$ und $\models \psi(c')$ sowie $tp(c/M), tp(c'/M) \in S_{MR \geq n}(M)$ ist dann $tp(c/M) = tp(c'/M)$ zu zeigen.

Seien hierzu $X = (d', d_1, \dots, d_{n-1}, c)$ und $X' = (d', e_1, \dots, e_{n-1}, c')$ die durch die Formel ψ bezeichneten BC -Wege zwischen d' und c bzw. c' . Wegen $tp(c/M), tp(c'/M) \in S_{MR \geq n}(M)$ gilt nach Induktionsvoraussetzung $X \cap M = X' \cap M = \{d'\}$. Weiter sind nach Induktionsvoraussetzung $D_1 = cl(M \cup \{d_1, \dots, d_{n-1}\})$ und $E_1 = cl(M \cup \{e_1, \dots, e_{n-1}\})$ zwei isomorphe abgeschlossene Mengen.

Genau wie in Fall 1 des Beweises von Lemma 8.7 sind dann $D_1 \cup \{c\}$ und $E_1 \cup \{c'\}$ abgeschlossen und isomorph. Mit Korollar 8.8 ergibt sich $tp(D_1 c) = tp(E_1 c')$ und damit $tp(c/M) = tp(c'/M)$ wie oben behauptet.

2.Fall: d ist eine Gerade b . $tp(b/M)$ wird dann im Raum $S_{MR \geq n}(M)$ isoliert durch

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \exists y(\phi(y) \wedge I(x, y)) \wedge J(x, a) \wedge B_r(x) \quad \text{bzw.} \\ \psi(x) &= \exists y(\phi(y) \wedge I(x, y)) \wedge J(x, a) \wedge B_w(x). \end{aligned}$$

Zum Nachweis hiervon seien b und b' zwei diese Formel erfüllende Elemente mit $tp(b/M), tp(b'/M) \in S_{MR \geq n}(M)$. Es ist $tp(b/M) = tp(b'/M)$ zu zeigen.

Wie im vorigen Fall seien hierzu $X = (d', d_1, \dots, d_{n-1}, b)$ sowie $X' = (d', e_1, \dots, e_{n-1}, b')$ die in der Formel ψ angegebenen Wege zwischen d' und b bzw. b' . Nach Induktionsvoraussetzung gilt $X \cap M = X' \cap M = \{d'\}$. Seien $D_1 = cl(M \cup \{d_1, \dots, d_{n-1}\})$ und $E_1 = cl(M \cup \{e_1, \dots, e_{n-1}\})$. Die Mengen D_1 und E_1 sind nach Induktionsvoraussetzung zueinander isomorph. Seien weiter c_0 und c'_0 die Ausnahmepunkte der Geraden b und b' auf a .

Da keine BC -Kreise auftreten können, sind entweder $c_0 = d_{n-1}$ und dann auch $c'_0 = e_{n-1}$ oder $c_0 \notin D_1$ und $c'_0 \notin E_1$. Dann sind nach Fall 5 aus Lemma 8.7 $D_1 \cup \{b\}$ und $E_1 \cup \{b'\}$ bzw. $D_1 \cup \{b, c_0\}$ und $E_1 \cup \{b', c'_0\}$ zwei abgeschlossene, zueinander isomorphe Mengen. Korollar 8.8 liefert dann wie

gewünscht $tp(b/M) = tp(b'/M)$. \square

Es verbleibt, $tp(c/M)$ für den Fall zu untersuchen, daß der Punkt $c \in a$ nicht durch einen BC -Weg mit M verbunden werden kann. Dann ist der Typ $tp(c/M)$ durch die Angabe der Farbe von c in a eindeutig bestimmt.

Ist nämlich $c' \notin M$ ein weiterer Punkt von derselben Farbe wie c in a , der ebenfalls durch keinen BC -Weg von M aus erreicht werden kann, so sind wie in Fall 4(i) von Lemma 8.7 $M \cup \{c\}$ und $M \cup \{c'\}$ zwei isomorphe abgeschlossene Mengen, welches mit Korollar 8.8 $tp(c/M) = tp(c'/M)$ ergibt.

Der Typ $tp(c/M)$ wird also in dem Stone-Raum $S_{MR \geq \omega}(M)$ durch die Formel $I_r(x, a)$ bzw. $I_w(x, a)$ isoliert, mithin gilt $MR(tp(c/M)) = \omega$.

Insgesamt ist damit für eine Ebene a

$$\begin{aligned} MR(a) &= MR(a_r) = MR(a_w) = \omega \quad \text{und} \\ MD(a) &= |\{p \in S(M) : I_r(x, a) \vee I_w(x, a) \in p, MR(p) = \omega\}| = 2 \end{aligned}$$

sowie $MD(a_r) = MD(a_w) = 1$. \square

Lemma 9.2 *Sei $\phi(x, \bar{y})$ eine Gleichung und $D = \phi(x, \bar{d})$ eine Instanz dieser Gleichung. Sei weiter b eine Gerade und a eine Ebene. Dann gilt:*

(i) *Sei b fast in D , d.h. bis auf endlich viele Ausnahmen sind alle Punkte von b in D . Dann liegen alle Punkte von b in D .*

(ii) *Falls $MR(a_r \setminus D) < \omega$, so gilt $a \subseteq D$.*

BEWEIS. Zu (i): Angenommen, es existiert ein Punkt $c \in b \setminus D$. Sei c' ein beliebiger Punkt aus b . Wegen der Ununterscheidbarkeit der Menge der Punkte aus b über der Geraden b gemäß Korollar 8.9 existiert ein Automorphismus f mit $f(c) = c'$ und $f(b) = b$. Sei $f(D)$ mit $D_{c'}$ bezeichnet. Wegen $c \notin D$ ist $c' \notin D_{c'}$. Weil b fast in D enthalten ist und b durch f fixiert wird, ist b auch fast in $D_{c'}$. Wegen $c' \notin D_{c'}$ gilt $\bigcap_{c' \in b} D_{c'} = \emptyset$. Da die $D_{c'}$ Instanzen der Gleichung ϕ sind, gibt es Punkte c_1, \dots, c_n aus b mit

$$\bigcap_{i=1}^n D_{c_i} = \bigcap_{c' \in b} D_{c'} = \emptyset.$$

Dies steht jedoch im Widerspruch zu der Tatsache, daß b fast in D_{c_i} , $1 \leq i \leq n$, und damit auch fast in $\bigcap_{i=1}^n D_{c_i}$ enthalten ist.

Zu (ii): In einem zu (i) ähnlichen Schluß zeige ich zunächst, daß $a_r \subseteq D$ gilt. Angenommen, es gibt einen Punkt $c \in a_r \setminus D$. Sei c' ein beliebiger Punkt aus a_r . Dann existiert mit Korollar 8.10 ein Automorphismus f mit $f(c) = c'$ und $f(a) = a$. Sei wieder $f(D)$ mit $D_{c'}$ bezeichnet. Wegen $c \notin D$ gilt $c' \notin D_{c'}$. Mit $f(a) = a$ wird auch der rote Bereich von a auf sich selbst abgebildet,

und somit ist $f(a_r \setminus D) = a_r \setminus D_{c'}$. Weil Morleyränge durch Automorphismen erhalten werden, ist auch $MR(a_r \setminus D_{c'})$ endlich. Da die $D_{c'}$ Instanzen der Gleichung ϕ sind, gibt es wie in (i) Punkte c_1, \dots, c_n mit

$$\bigcap_{i=1}^n D_{c_i} = \bigcap_{c' \in a_r} D_{c'} = \emptyset.$$

Mithin gilt

$$\bigcup_{i=1}^n a_r \setminus D_{c_i} = a_r \text{ und } MR(a_r \setminus D_{c_i}) < \omega.$$

Dies steht im Widerspruch zu $MR(a_r) = \omega$. Damit ist $a_r \subseteq D$ gezeigt.

Es verbleibt der Nachweis von $a_w \subseteq D$. Sei hierzu $c \in a_w$. Es gibt eine rote Gerade b in a mit $c \in b$, d.h. c ist der Ausnahmepunkt von b in a . Dann ist b fast in a_r , also auch fast in D enthalten. Mit (i) liegt nun die ganze Gerade b in D , insbesondere ist auch $c \in D$. \square

Nun kann das eigentliche Ziel dieser Arbeit, die Nichtäquationalität von Γ , gezeigt werden. Aus obigem Lemma folgt nämlich:

Korollar 9.3 *Sei a eine Ebene. Dann ist die Formel $I_r(x, a)$, durch die der rote Bereich a_r dieser Ebene definiert wird, nicht äquivalent zu einer booleschen Kombination von Gleichungen.*

BEWEIS. Angenommen, a_r kann durch eine boolesche Kombination von Gleichungen beschrieben werden. Sei etwa

$$a_r = \bigvee_{i=1}^n \left(\bigwedge_{j=1}^{n_i} \psi_{ij} \wedge \bigwedge_{j=1}^{n'_i} \neg \psi'_{ij} \right),$$

wobei ψ_{ij} und ψ'_{ij} Instanzen von Gleichungen sind. Mit

$$\psi_i = \bigwedge_{j=1}^{n_i} \psi_{ij} \quad \text{und} \quad \psi'_i = \bigvee_{j=1}^{n'_i} \psi'_{ij}$$

kann a_r als

$$a_r = \bigvee_{i=1}^n \psi_i \wedge \neg \psi'_i$$

dargestellt werden. ψ_i und ψ'_i sind hierbei Gleichungen, da endliche Konjunktionen und Disjunktionen von Gleichungen nach Bemerkung 2.2 wieder Gleichungen ergeben.

Da $MR(a_r) = \omega$ ist, gibt es einen Index j , $1 \leq j \leq n$, mit $MR(\psi_j \wedge \neg \psi'_j) = \omega$. Sei $Y = \psi_j \wedge \neg \psi'_j$. Wegen $MD(a_r) = 1$ und $MR(a_r) = MR(Y) = \omega$ muß $MR(a_r \setminus Y) < \omega$ gelten.

Wegen $a_r \setminus \psi_j \subseteq a_r \setminus Y$ ist $MR(a_r \setminus \psi_j) \leq MR(a_r \setminus Y)$, insbesondere ist dann $MR(a_r \setminus \psi_j)$ endlich. Mit Lemma 9.2(ii) ist dann $a \subseteq \psi_j$. Da $Y \subseteq a_r$ ist, muß $a_w \subseteq \psi'_j$ gelten. Wie im Beweis von Lemma 9.2(ii) folgt nun $a \subseteq \psi'_j$. Ist nämlich $c \in a_r$, so gibt es eine weiße Gerade b in a , welche c als Ausnahmepunkt enthält. Dann ist b fast in ψ'_j enthalten. Mit Lemma 9.2(i) folgt $b \subseteq \psi'_j$ und damit $c \in \psi'_j$. Mit $Y \subseteq a_r$ und $a \subseteq \psi'_j$ ist dann $Y = \emptyset$. Dies bedeutet aber $MR(a_r) = MR(a_r \setminus Y) < \omega$ im Widerspruch zu $MR(a_r) = \omega$. \square

Das Hauptresultat halte ich noch einmal im folgenden Korollar fest.

Korollar 9.4 *Die Theorie Γ ist nicht äquational. Somit bilden die äquationalen Theorien eine echte Teilklasse der stabilen Theorien.*

Literatur

- [1] A. Baudisch und A. Pillay, A free pseudospace, *Journal of Symbolic Logic*, 65 (2000), 443-460.
- [2] W.A. Hodges, *Model Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [3] E. Hrushovski und A. Pillay, Weakly normal groups, *Logic Colloquium '85*, North Holland, Amsterdam, 1987.
- [4] E. Hrushovski und G. Srouf, On stable non-equational theories, Preprint, 1989.
- [5] E. Hrushovski, A new strongly minimal set, *Annals of Pure and Applied Logic*, 62 (1993), 147-166.
- [6] M. Junker, A note on equational theories, erscheint demnächst im *Journal of Symbolic Logic*.
- [7] M. Junker und I. Kraus, Theories with equational forking, Preprint, 2000.
- [8] A.H. Lachlan, Two conjectures regarding the stability of ω -categorical theories, *Fundamenta Mathematicae*, 81 (1974), 133-145.
- [9] A. Pillay, *Introduction to stability theory*, Oxford University Press, Oxford, 1983.
- [10] A. Pillay und G. Srouf, Closed sets and chain conditions in stable theories, *Journal of Symbolic Logic*, 49 (1984), 1350-1362.
- [11] A. Pillay, Stable theories, pseudoplanes and the number of countable models, *Annals of Pure and Applied Logic*, 43 (1989), 147-160.
- [12] A. Pillay, The geometry of forking and groups of finite Morley rank, *Journal of Symbolic Logic*, 60 (1995), 1251-1259.
- [13] A. Pillay, *Geometric stability theory*, Oxford University Press, Oxford, 1996.
- [14] A. Pillay, A note on CM-triviality and the geometry of forking, erscheint demnächst im *Journal of Symbolic Logic*.
- [15] Ph. Rothmaler, *Einführung in die Modelltheorie*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1995.

- [16] G. Srouf, The notion of independence in categories of algebraic structures, part I: *Annals of Pure and Applied Logic*, 38 (1988), 185-213; part II: *Annals of Pure and Applied Logic*, 39 (1988), 55-73; part III: *Annals of Pure and Applied Logic*, 47 (1990), 269-294.

Erklärung

Ich erkläre, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe.

Berlin, den 10. Oktober 2000

Thesen

Die vorliegende Arbeit ist eine Ausarbeitung eines nicht publizierten Aufsatzes von E. Hrushovski und G. Srouf. Darin wird ein freier Pseudoraum konstruiert, dessen Theorie stabil und nicht äquational ist. Das Hauptresultat ist:

- Die äquationalen Theorien bilden eine echte Teilklasse der stabilen Theorien.

Hierzu erfolgt die Darstellung in den Schritten:

- Zu Beginn werden die Fragestellung motivierende Betrachtungen zu äquationalen Theorien angestellt.
- Der freie Pseudoraum wird als 3-dimensionale Verallgemeinerung der freien Pseudoebene beschrieben. Es werden zwei freie Pseudoräume vorgestellt:
 - der freie Pseudoraum Σ von Baudisch und Pillay aus [1] und
 - der freie Pseudoraum Γ von Hrushovski und Srouf aus [4].
- Durch Angabe eines abzählbaren Standardmodells wird die Konsistenz von Γ gezeigt.
- Die Beziehung zwischen den Pseudoräumen Σ und Γ wird geklärt: Σ ist ein Redukt von Γ .
- Die Theorie Γ ist vollständig. Hierzu wird die Struktur von Modellen von Γ untersucht (Zusammenhangs- und 2-Zusammenhangskomponenten).
- Die Theorie Γ ist ω -stabil. Der Nachweis erfolgt durch eine Typenanalyse und die Abschätzung der Anzahl der Typen.
- Es werden Morleyränge von Γ bestimmt.
- Der Pseudoraum Γ ist nicht äquational: der rote Teil einer Ebene kann nicht durch eine Gleichung definiert werden.