

## Übungsblatt 12

*Besprechung der mündlichen Aufgaben ab 8. 2. 2024*  
*Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 15. 2. 2024, 13:00 Uhr*

### Aufgabe 47

*mündlich*

Modifizieren Sie den Algorithmus von Edmonds so, dass er für einen gegebenen Graphen  $G$  und ein gegebenes Matching  $M$  in  $G$  ein Matching  $M'$  mit  $M \subseteq M'$  berechnet, das maximale Größe unter allen solchen Matchings hat.

### Aufgabe 48

*mündlich*

Für ein Matching  $M$  in einem Graphen  $G = (V, E)$  bezeichne  $free(M) = n - 2|M|$  die Anzahl der  $M$ -freien Knoten. Für eine Teilmenge  $A \subseteq V$  bezeichne  $odd(G - A)$  die Anzahl der Zusammenhangskomponenten in  $G - A$  mit einer ungeraden Knotenzahl. Zeigen Sie:

- Für jedes Matching  $M$  in  $G$  und jede Teilmenge  $A \subseteq V$  gilt  $free(M) \geq odd(G - A) - |A|$ .
- Ein Matching  $M$  ist genau dann maximal, wenn es eine Teilmenge  $A \subseteq V$  mit  $free(M) = odd(G - A) - |A|$  gibt. Wir nennen eine solche Menge  $A$  ein **Zertifikat** für (die Maximalität von)  $M$ .

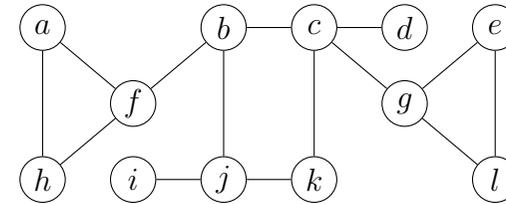
*Hinweis:* Zeigen Sie, dass jedes OSC  $S = \{u_1, \dots, u_k, C_1, \dots, C_\ell\}$  in  $G$  mit  $w(S) = |M|$  ein Zertifikat  $A = \{u_1, \dots, u_k\}$  für  $M$  liefert.

### Aufgabe 49

**10 Punkte**

- Modifizieren Sie den Algorithmus von Edmonds so, dass er nicht nur ein maximales Matching  $M$ , sondern auch ein Zertifikat (siehe Aufgabe 50) für  $M$  ausgibt. Wie verarbeitet Ihr Algorithmus den

folgenden Graphen, wenn jeweils die lexikografisch kleinste Kante  $(u, v)$  aus  $Q$  entnommen wird?



- Entwerfen Sie einen effizienten Algorithmus, der für einen gegebenen Graphen  $G = (V, E)$  und zwei Mengen  $M \subseteq E$ ,  $A \subseteq V$  überprüft, ob  $A$  ein Zertifikat für das maximale Matching  $M$  ist.