Übungsblatt 7

Besprechung der mündlichen Aufgaben ab 7. 12. 2023
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 14. 12. 2023, 13:00 Uhr

Aufgabe 30 ***mündlich***

Wie lassen sich folgende Flussprobleme auf das Problem reduzieren, einen maximalen Fluss in einem Netzwerk $N = (V, E, s, t, c)$ zu finden?

(a) Finde einen minimalen Fluss in einem Netzwerk $N = (V, E, s, t, c)$.

(b) Finde einen maximalen Fluss in einem Netzwerk der Form $N = (V, E, \{s_1, \dots, s_k\}, \{t_1, \dots, t_\ell\}, c)$ mit mehreren Quellen $s_1, \dots, s_k$ und mehreren Senken $t_1, \dots, t_\ell$.

(c) Finde einen maximalen Fluss in einem Netzwerk der Form $N = (V, E, s, t, c, c^+, c^-)$, das neben der Kapazitätsfunktion c auf $V \times V$ Kapazitätsfunktionen c^+ und c^- auf V enthält, die für jeden Knoten $u \in V$ den Fluss $f^-(u)$ in u und den Fluss $f^+(u)$ aus u beschränken.

Aufgabe 31 Beweisen Sie die folgenden Sätze: ***mündlich***

(a) Die Kantenversion des Satzes von Menger für Digraphen $G = (V, E)$: Die maximale Anzahl kantendisjunkter Wege von s nach t in G ist gleich der minimalen Größe einer Kantenmenge $E' \subseteq E$, die t von s trennt (d.h. in $G - E'$ ex. kein Weg von s nach t).

(b) Die Knotenversion des Satzes von Menger für Digraphen $G = (V, E)$: Im Fall $(s, t) \notin E$ ist die maximale Anzahl von *knotendisjunkten* s-t-Pfaden in G gleich der minimalen Größe einer Knotenmenge $V' \subseteq V \setminus \{s, t\}$, die *$t$ in G von s trennt* (d.h. in $G - V'$ ex. kein Weg von s nach t).

Hinweis: Benutzen Sie ein Max-Flow-Min-Cut-Theorem für Netzwerke mit einer Kapazitätsfunktion auf den Knoten.

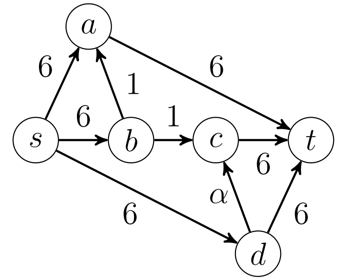
(c) Die entsprechenden Sätze für Graphen anstelle von Digraphen.

Aufgabe 32 ***mündlich***

(a) Zeigen Sie, dass der Algorithmus von Ford-Fulkerson auch auf Netzwerken mit Kapazitäten $c(e) \in \mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0\}$ korrekt arbeitet. Welche Schranke für die Anzahl der berechneten Zunahmepfade ergibt sich in diesem Fall?

(b) Arbeitet der Algorithmus von Ford-Fulkerson auch auf Netzwerken mit reellen Kapazitäten $c(e) \geq 0$ korrekt?

Hinweis: Betrachten Sie für das nebenstehende Netzwerk N die Zunahmepfade $P_1 = (s, b, c, t)$, $P_2 = (s, d, c, b, a, t)$, $P_3 = (s, b, c, d, t)$, $P_4 = P_2$, $P_5 = (s, a, b, c, t)$ und $P_i = P_{i-4}$ für $i \geq 6$, wobei die Kapazität $\alpha \in \mathbb{R}^+$ die Gleichung $\alpha^2 + \alpha = 1$ erfüllt.



(c) Wieviele Zunahmepfade benötigt Edmonds-Karp zur Bestimmung eines maximalen Flusses in N.

Aufgabe 33 Gegeben ist folgendes Netzwerk N. ***10 Punkte***

(a) Bestimmen Sie mit Edmonds-Karp einen maximalen Fluss in N.

(b) Geben Sie einen s-t-Schnitt S mit minimaler Kapazität $c(S)$ an.

(c) Fassen Sie die Kantenbeschriftungen als Mindestkapazitäten $c_{\min}(e)$ auf und geben Sie einen minimalen Fluss f mit $f(e) \geq c_{\min}(e)$ für alle Kanten $e \in E$ sowie einen maximalen s-t-Schnitt S mit $c_{\min}(S) = |f|$ an.