Übungsblatt 4

Besprechung der mündlichen Aufgaben ab 16. 11. 2023
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 23. 11. 2023, 13:00 Uhr

Aufgabe 15 Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Zeigen Sie: ***mündlich***

(a) In jeder Suchordnung von G werden die Knoten jeder Zusammenhangskomponente von G konsekutiv aufgelistet.

(b) DFS(V, E) gibt eine DFS-Ordnung von G aus.

Aufgabe 16 ***mündlich***

Sei $G = (V, E)$ der Graph mit $V = \{u_1, \dots, u_6\}$, dessen Adjazenzmatrix die Zeilenpräfixe $\{z_1, \dots, z_6\} = \{\varepsilon, 0, 11, 010, 1101, 01111\}$ hat, und sei $G' = G + e_1 + e_2$ für die Kanten $e_1 = \{u_1, u_2\}$ und $e_2 = \{u_3, u_5\}$.

(a) Berechnen Sie die von den Algorithmen GraphSearch, DFS, BFS und LexBFS bei Eingabe von G und G' ausgegebenen Listen, falls jede Knotenwahl auf den jeweils kleinsten wählbaren Knoten entfällt. Geben Sie auch die zugehörigen Suchbäume an.

(b) Verifizieren Sie, dass die von LexBFS(G) berechnete LBO L keine PEO für G ist und benutzen Sie L, um einen induzierten Kreis K der Länge $\ell \geq 4$ in G zu finden. (*Hinweis:* Orientieren Sie sich hierbei an dem Beweis in der Vorlesung, dass jede LBO für einen chordalen Graphen G auch eine PEO für G ist.)

(c) Verifizieren Sie, dass die von LexBFS(G') berechnete LBO L' eine PEO für G' ist und benutzen Sie L', um eine $\chi(G')$-Knotenfärbung für G' und eine $\omega(G')$-Clique in G' zu finden.

Aufgabe 17 ***mündlich***

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Dann wird ein spannender Untergraph $H = (V, E')$ von G auch als ein ***Faktor*** von G bezeichnet. Ist H k-regulär (d.h. jeder Knoten $v \in V$ hat in H den Grad k), so heißt H ***k-Faktor*** von G. G heißt ***k-faktorisierbar***, wenn sich seine Kantenmenge so in $l \geq 0$ Teilmengen $E = E_1 \cup \dots \cup E_l$ partitionieren lässt, dass jeder Graph $G_i = (V, E_i)$ für $i = 1, \dots, l$ ein k-Faktor von G ist.

(a) Geben Sie einen Graphen an, der 2-faktorisierbar, aber nicht 1-faktorisierbar ist.

(b) Geben Sie einen Graphen an, der 1-faktorisierbar, aber nicht 2-faktorisierbar ist.

(c) Zeigen Sie dass der K_n genau dann 1-faktorisierbar ist, wenn n gerade ist.

(d) Geben Sie einen regulären Graphen an, der einen 1-Faktor (also ein perfektes Matching) besitzt, aber nicht 1-faktorisierbar ist.

Aufgabe 18 ***10 Punkte***

Finden Sie einen effizienten Algorithmus, der für jeden Graphen G mit $\Delta(G) \leq 3$ eine $\chi(G)$-Färbung berechnet.

Hinweis: Orientieren Sie sich an dem Beweis des Satzes von Brooks (siehe Vorlesung).