

## Übungsblatt 2

*Besprechung der mündlichen Aufgaben ab 2. 11. 2023*  
*Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 9. 11. 2023, 13:00 Uhr*

### Aufgabe 7 *mündlich*

Zeigen Sie, dass  $G - e$  ein  $(k - 1)$ -zusammenhängender Graph ist, falls  $G = (V, E)$  ein  $k$ -zusammenhängender Graph mit  $e \in E$  und  $k \geq 1$  ist.

### Aufgabe 8 *mündlich*

Zeigen Sie für einen zusammenhängenden Graphen  $G = (V, E)$  mit  $n \geq 3$  Knoten.

- (a)  $G$  ist genau dann 2-zusammenhängend, wenn je 2 Knoten von  $G$  auf einem gemeinsamen Kreis liegen.

*Hinweis:* Benutzen Sie den Satz von Menger:  $G$  ist genau dann  $k$ -zusammenhängend, wenn je zwei Knoten  $u, v$  in  $G$  durch mindestens  $k$  knotendisjunkte Pfade verbunden sind.

- (b) Sei die Relation  $\sim$  auf  $E$  definiert durch  $e \sim e'$ , falls  $e = e'$  ist oder  $e$  und  $e'$  auf einem gemeinsamen Kreis liegen. Dann ist  $\sim$  eine Äquivalenzrelation.

- (c) Seien  $E_1, \dots, E_k$  die Äquivalenzklassen von  $\sim$  und  $V_i = V(E_i)$  die zugehörigen Knotenmengen. Dann gilt  $|V_i \cap V_j| \leq 1$  für alle  $i \neq j$ .

*Bemerkung:* Die Teilgraphen  $G[V_i]$  heißen *Blöcke* von  $G$ .

- (d) Jeder Block  $B_i = G[V_i] \not\cong K_2$  von  $G$  ist 2-zusammenhängend und  $G$  ist genau dann 2-zusammenhängend, wenn  $G$  nur aus einem Block  $G = B_1 \not\cong K_2$  besteht.

- (e) Sei  $B$  der Graph, dessen Knotenmenge aus allen Blöcken und Artikulationen von  $G$  besteht und in dem jeder Block zu allen darin enthaltenen Artikulationen adjazent ist. Dann ist  $B$  ein Baum ( $B$  heißt der *BC-Baum* (*block cut tree*) von  $G$ ).

**Aufgabe 9** Sei  $G = (V, E)$  ein planarer Graph. *mündlich*  
 $G$  heißt *eindeutig einbettbar*, wenn  $R \in \{S, S^R\}$  (d.h.  $R = S$  oder  $R$  entsteht aus  $S$  durch Spiegelung aller Ränder) für je zwei ebene Realisierungen  $H = (V, E, R)$  und  $H' = (V, E, S)$  von  $G$  gilt.

- (a) Finden Sie einen planaren Graphen mit möglichst wenigen Knoten (bzw. Kanten, Gebieten), der nicht eindeutig einbettbar ist.
- (b) Sei  $H$  eine ebene Realisierung eines planaren Graphen  $G$ . Zeigen Sie, dass  $\kappa(G) \leq 2$  ist, falls es in  $H$  ein Gebiet gibt, dessen Rand einen Kreis mit mindestens 2 Brücken in  $G$  bildet.
- (c) Seien  $H$  und  $H'$  ebene Realisierungen eines planaren Graphen  $G$ . Zeigen Sie, dass es für jedes Gebiet  $g$  in  $H$ , dessen Rand einen Kreis  $K$  mit höchstens einer Brücke  $B$  in  $G$  bildet, ein Gebiet  $g'$  in  $H'$  gibt, das den gleichen Kreis  $K$  als Rand hat.
- (d) Zeigen Sie, dass alle 3-zusammenhängenden planaren Graphen  $G$  eindeutig einbettbar sind (Satz von Whitney).

### Aufgabe 10 *10 Punkte*

Ein Graph  $G$  heißt *outerplanar*, falls  $G$  eine ebene Realisierung hat, in der alle Knoten an das äußere Gebiet grenzen. Zeigen Sie:

- (a)  $G$  ist genau dann outerplanar, wenn  $G$  weder den  $K_{2,3}$  noch den  $K_4$  als Minor enthält. (*Hinweis:* Betrachten Sie den Graphen  $G'$ , der aus  $G$  durch Hinzufügen eines weiteren Knotens  $v$  entsteht, welcher mit allen Knoten von  $G$  verbunden wird.)
- (b) Für jeden outerplanaren Graphen  $G$  gilt  $\delta(G) \leq 2$ .
- (c) Finden Sie einen effizienten Algorithmus, der für jeden Eingabegraphen  $G$  entweder eine  $\chi(G)$ -Färbung oder einen topologischen Minor  $H$  von  $G$  mit  $\delta(H) > 2$  (als Zertifikat, dass  $G$  nicht outerplanar ist) ausgibt.