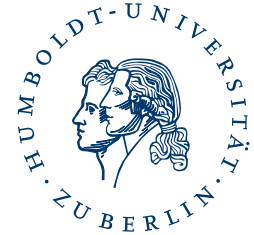
Kryptologie

Johannes Köbler



Institut für Informatik
Humboldt-Universität zu Berlin

WS 2022/23

Digitale Signaturverfahren

Eigenschaften von handschriftlichen Signaturen

- Die durch die Unterschrift gekennzeichnete Person hat überprüfbar die Unterschrift geleistet
- Die Unterschrift ist nicht auf ein anderes Dokument übertragbar, ohne ihre Gültigkeit zu verlieren
- Das signierte Dokument kann nachträglich nicht unbemerkt verändert werden

Eine direkte Übertragung dieser Eigenschaften in die digitale Welt ist nicht möglich

Lösung:

Die Fähigkeit, einen individuellen Schriftzug auszuführen, wird durch geheimes Wissen ersetzt und die digitale Signatur wird nicht physikalisch, sondern logisch (inhaltlich) an ein elektronisches Dokument gebunden

Digitale Signaturverfahren

Definition

Ein digitales Signaturverfahren besteht aus

- einer Menge X von Texten
- einer endlichen Menge Y von Signaturen
- einem Schlüsselraum K
- einer Menge $S \subseteq K \times K$ von Schlüsselpaaren $(\hat{k}, k)$, bestehend aus einem Signierschlüssel $\hat{k}$ und einem Verifikationsschlüssel k
- einem Signieralgorithmus $sig : K \times X \to Y$ und
- einem Verifikationsalgorithmus $ver : K \times X \times Y \to \{0, 1\}$, so dass $ver(k, x, y) = 1$ für alle Paare $(\hat{k}, k) \in S$ und $(x, y) \in X \times Y$ mit $y = sig(\hat{k}, x)$ gilt

Eine Signatur y heißt gültig für den Text x (unter k), falls $ver(k, x, y) = 1$ ist; andernfalls ist sie ungültig

Digitale Signaturverfahren

- Ein wichtiger Unterschied zu MACs besteht darin, dass digitale Signaturverfahren asymmetrisch sind
- Aufgrund dieser Asymmetrie kann Bob nämlich auch einem Dritten gegenüber nachweisen, dass eine von Alice erzeugte Signatur y tatsächlich von Alice stammt
- Bei Verwendung eines MAC zur Authentifikation einer Nachricht x könnte Bob die Nachricht manipuliert und den MAC-Wert auch selbst erzeugt haben, weshalb Alice ihre Urheberschaft von x erfolgreich abstreiten kann
- Ein weiterer Vorteil von digitalen Signaturen gegenüber MACs ist, dass eine von Alice geleistete Signatur von allen verifizierbar ist, sofern sie den öffentlichen Verifikationsschlüssel von Alice kennen
- Um bspw. die Authentizität eines Software-Updates x zu gewährleisten, kann eine SW-Firma x zusammen mit ihrer Signatur y für x verschicken
- Bei Verwendung eines MAC müsste die SW-Firma dagegen mit jedem einzelnen Kunden K_i einen symmetrischen Schlüssel k_i vereinbaren und den zugehörigen MAC-Wert $y_i = h_{k_i}(x)$ versenden

Klassifikation von Angriffen gegen Signaturverfahren

Angriff bei bekanntem Verifikationsschlüssel (key-only attack)

Dem Gegner ist nur der öffentliche Verifikationsschlüssel k bekannt und er versucht, ein Paar (x, y) mit $ver(k, x, y) = 1$ zu finden

Jedes solche Paar, das nicht von Alice unter Verwendung des geheimen Signierschlüssels erzeugt wurde, wird als Fälschung bezeichnet

Angriff bei bekannter Signatur (known signature attack)

Der Gegner kennt neben k die Signaturen $y_i = sig(\hat{k}, x_i)$ für eine Reihe von Texten $x_1, \ldots, x_q$, auf deren Auswahl er keinen Einfluss hat, und versucht, eine Fälschung (x, y) mit $x \notin \{x_1, \ldots, x_q\}$ zu finden

Angriff bei frei wählbaren Texten (chosen document attack)

Der Gegner kann die Texte $x_1, \ldots, x_q$ selbst wählen, erhält die Signaturen aber erst, nachdem er alle Texte vorgelegt hat

Angriff bei adaptiv wählbaren Texten

Der Gegner kann die Wahl des Textes x_{i+1} von den Signaturen $y_1, \ldots, y_i$ abhängig machen

Erfolgskriterien für die Fälschung digitaler Signaturen

uneingeschränktes Fälschungsvermögen (total break)
Der Gegner hat einen Weg gefunden, die Funktion $x \mapsto sig(\hat{k}, x)$ bei Kenntnis von k effizient zu berechnen

selektives Fälschungsvermögen (selective forgery)
Der Gegner kann für beliebig vorgegebene Texte gültige Signaturen bestimmen (eventuell mit Hilfe des legalen Unterzeichners)

nichtselektives (existentielles) Fälschungsvermögen
Der Gegner kann nur für bestimmte Texte x die zugehörige digitale Signatur bestimmen

Das RSA-Kryptosystem

- Das RSA-Kryptosystem wurde 1978 von Rivest, Shamir und Adleman veröffentlicht
- Während es beim Primzahlproblem nur um die Frage geht, ob eine gegebene Zahl n prim ist, muss beim Faktorisierungsproblem im Fall, dass n zusammengesetzt ist, zudem ein nicht-trivialer Faktor gefunden werden
- Für die Sicherheit des RSA-Verfahrens ist es notwendig, dass die Primzahleigenschaft zwar effizient getestet werden kann, aber keine effizienten Faktorisierungsalgorithmen bekannt sind

Schlüsselgenerierung

Für jeden Teilnehmer X werden zwei Primzahlen p, q und zwei Exponenten e, d mit $ed \equiv_{\varphi(n)} 1$ generiert, wobei $n = pq$ und $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$ ist

Öffentlicher Schlüssel: $k_X = (e, n)$

Privater Schlüssel: $k'_X = (d, n)$

Das RSA-Kryptosystem

Ver- und Entschlüsselung

- Jede Nachricht x wird durch eine Folge $x_1, x_2, \ldots$ von Zahlen $x_i \in \mathbb{Z}_n$ dargestellt, die einzeln wie folgt ver- und entschlüsselt werden:
  - $\mathrm{RSA}((e,n),x) = x^e \bmod n$
  - $\mathrm{RSA}^{-1}((d,n),y) = y^d \bmod n$
- Der Schlüsselraum ist also

  $$K = \{(c,n) \mid \text{es gibt Primzahlen } p < q \text{ mit } n = pq \text{ und } c \in \mathbb{Z}^*_{\varphi(n)}\}$$

  und

  $$S = \{((e,n),(d,n)) \in K \times K \mid ed \equiv_{\varphi(n)} 1\}$$

  ist die Menge aller zueinander passenden Schlüsselpaare
- Die Chiffrierfunktionen $\mathrm{RSA}_{(e,n)}$ und $\mathrm{RSA}^{-1}_{(d,n)}$ sind durch Wiederholtes Quadrieren und Multiplizieren effizient berechenbar

Das RSA-Kryptosystem

Ver- und Entschlüsselung

Der folgende Satz garantiert die Korrektheit des RSA-Systems

Satz

Für jedes Schlüsselpaar $((e,n),(d,n)) \in S$ und alle $x \in \mathbb{Z}_n$ gilt

$$x^{ed} \equiv_n x$$

Beweis.

- Sei $n = pq$ und sei z eine natürliche Zahl mit $ed = z\varphi(n) + 1$
- Es reicht, die Kongruenz $x^{ed} \equiv_p x$ zu zeigen (die Kongruenz $x^{ed} \equiv_q x$ folgt analog und beide Kongruenzen zusammen implizieren $x^{ed} \equiv_n x$)
- Wegen $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$ und wegen $x^{p-1} \equiv_p 1$ für $x \not\equiv_p 0$ folgt

$$x^{ed} = x^{z\varphi(n)+1} = x^{z(p-1)(q-1)}x = (x^{p-1})^{z(q-1)}x \equiv_p x$$

□

Das RSA-Signaturverfahren

Definition

- Wie beim RSA-Kryptosystem ist beim RSA-Signaturverfahren

$$K = \{(a, n) | n = pq \text{ für Primzahlen } p < q \text{ und } a \in \mathbb{Z}^*_{\varphi(n)}\}$$

und S die Relation $S = \{((d, n), (e, n)) \in K \times K | de \equiv_{\varphi(n)} 1\}$

- Signiert wird mittels $sig(d, n, x) := x^d \bmod n$, wobei $X = Y = \mathbb{Z}_n$ ist
- Die Verifikationsbedingung ist

$$ver(e, n, x, y) = \begin{cases} 1, & y^e \equiv_n x \\ 0, & sonst \end{cases}$$

Satz

Für alle $((d, n), (e, n)) \in S$ und $x, y \in \mathbb{Z}_n$ gilt

$$ver(e, n, x, y) = 1 \Leftrightarrow sig(d, n, x) = y$$

Der Beweis folgt direkt aus der Korrektheit des RSA-Kryptosystems

Das RSA-Signaturverfahren

- Wir betrachten eine Reihe von Angriffen gegen das RSA-Signaturverfahren und überlegen anschließend, durch welche Maßnahmen sich diese abwehren lassen
- Ein Gegner kann leicht eine existentielle Fälschung bei bekanntem Verifikationsschlüssel erhalten, indem er zu einer beliebigen Signatur $y \in Y$ den Text $x = y^e \bmod n$ wählt
- Zudem ist eine existentielle Fälschung bei bekannten Signaturen möglich, falls der Gegner zwei signierte Texte $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ mit $ver(k, x_i, y_i) = 1$ kennt
- Wegen $y_i^e \equiv_n x_i$ für $i = 1, 2$ folgt nämlich $(y_1 y_2)^e \equiv_n y_1^e y_2^e \equiv_n x_1 x_2$ und somit $ver(k, x_1 x_2 \bmod n, y_1 y_2 \bmod n) = 1$
- Weiterhin ist eine selektive Fälschung bei frei wählbarem Text möglich:
  - Kennt der Gegner bereits die Signatur y' für einen beliebigen Text $x' \in \mathbb{Z}_n^*$ und kann er sich für den Text $x'' = xx'^{-1} \bmod n$ die Signatur y'' beschaffen,
  - so kann er die Signatur $y = y'y'' \bmod n$ für den Text x berechnen

Das RSA-Signaturverfahren

- Diese Angriffe kann man vereiteln, indem man den Text x mit Redundanz versieht (z.B. kann man x durch den Text xx ersetzen und nur Texte dieser Form zulassen)
- Um auch längere Texte effizient signieren zu können, wird jedoch besser eine geeignete Hashfunktion h benutzt und nicht der gesamte Text x, sondern nur der Hashwert $h(x)$ signiert
  - Signaturerstellung: $sig_h(\hat{k}, x) := sig(\hat{k}, h(x))$
  - Verifikation: $ver_h(k, x, y) = 1 \Leftrightarrow ver(k, h(x)) = 1$

Das RSA-Signaturverfahren

Bei der Signaturerstellung benötigte Eigenschaften einer Hashfunktion h

- Die verwendete Hashfunktion h sollte die Einwegeigenschaft haben, da sonst der Gegner zu einem $y \in Y$ einen passenden Text x mit $h(x) = y$ bestimmen kann (zumindest wenn das Signaturverfahren anfällig gegen eine existentielle Fälschung ist, wie etwa RSA)
- Angenommen der Gegner kennt bereits ein Paar (x, y) mit $ver(k, h(x), y) = 1$
- Dann sollte h zumindest schwach kollisionsresistent sein, da sonst der Gegner ein x' mit $h(x') = h(x)$ berechnen und die Fälschung (x', y) generieren könnte
- Falls sich der Gegner für bestimmte von ihm selbst gewählte Texte x die zugehörige Signatur y beschaffen kann, so sollte h sogar kollisionsresistent sein
- Andernfalls könnte der Gegner ein Kollisonspaar (x, x') für h finden, sich den (unverdächtigen) Text x signieren lassen und die erhaltene Signatur y für den Text x' verwenden

Diskrete Logarithmen

- Für ein beliebiges Element a einer multiplikativen Gruppe G ist die Exponentiation $\exp_{G,a} : x \mapsto a^x$ zur Basis a eine Bijektion zwischen der Menge $\mathbb{Z}_{ord(a)} = \{0, 1, \ldots, ord(a) - 1\}$ und der Untergruppe $\langle a \rangle$
- Die zugehörige Umkehrabbildung spielt in der Kryptografie eine wichtige Rolle

Definition

- Seien $a, b \in G$ mit $b \in \langle a \rangle$
- Dann heißt der eindeutig bestimmte Exponent $x \in \mathbb{Z}_{\text{ord}(a)}$ mit $a^x = b$ Index oder diskreter Logarithmus von b zur Basis a in G
- Dieser wird mit $\log_{G,a}(b)$ bezeichnet
- Im Fall $G = \mathbb{Z}_m^*$ bezeichnen wir ihn auch kurz mit $\log_{m,a}(b)$

Diskrete Logarithmen

- Die Funktion $\exp_{m,a} : x \mapsto a^x$ ist effizient berechenbar
- Dagegen sind bis heute keine effizienten Verfahren zur Berechnung von $\log_{m,a}(b)$ bekannt (falls a und m geeignet gewählt werden)

Beispiel

- Das Element $a = 2$ hat in der Gruppe $G = \mathbb{Z}_{11}^*$ die maximal mögliche Ordnung $\mathrm{ord}_{11}(2) = |G| = 10$
- Die folgenden Tabellen zeigen den Werteverlauf der Funktionen $\exp_{11,2}$ und $\log_{11,2}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2^x	1	2	4	8	5	10	9	7	3	6

b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\log_{11,2}(b)$	0	1	8	2	4	9	7	3	6	5

◁

Zyklische Gruppen

Für manche Anwendungen sind Elemente $a \in G$ nützlich, mit denen sich die gesamte Gruppe erzeugen lässt

Definition

- Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung $|G| = m$
- Ein Element $g \in G$ mit $\mathrm{ord}_G(g) = m$ heißt Erzeuger von G
- G heißt zyklisch, falls G mindestens einen Erzeuger besitzt

Ein Element $a \in G$ ist also genau dann ein Erzeuger, wenn die von a erzeugte Untergruppe $\langle a \rangle$ die gesamte Gruppe G umfasst

Satz (Gauß)

Die Gruppe $\mathbb{Z}_m^*$ ist genau für $m \in \{1, 2, 4, p^k, 2p^k \mid 2 < p \text{ prim}\}$ zyklisch (ohne Beweis)

Das ElGamal-Signaturverfahren

- Das Signaturverfahren von ElGamal (1985) ist wie das gleichnamige asymmetrische Kryptosystem probabilistisch und beruht wie dieses auf dem diskreten Logarithmus
- Sei p eine große Primzahl und α ein Erzeuger von $\mathbb{Z}_p^*$ (p und α sind öffentlich)
- Jeder Teilnehmer B wählt eine geheime Zahl $a \in \mathbb{Z}_{p-1} = \{0, \ldots, p-2\}$ und gibt $\beta = \alpha^a \bmod p$ öffentlich bekannt:
  Signierschlüssel: $\hat{k} = (p, \alpha, a)$
  Verifikationsschlüssel: $k = (p, \alpha, \beta)$
- Der Text- und Signaturenraum sind $X = \mathbb{Z}_{p-1}$ und $Y = \mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z}_{p-1} \setminus \{0\}$

Das ElGamal-Signaturverfahren

Signaturerstellung: Um einen Text $x \in X$ zu signieren, wählt der Signierer zufällig eine Zahl $z \in \mathbb{Z}_{p-1}^*$ und berechnet die Signatur

$$sig(\hat{k}, x, z) = (\gamma, \delta) \in Y = \mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z}_{p-1} \setminus \{0\}$$

mit $\gamma = \alpha^z \bmod p$ und $\delta = (x - a\gamma)z^{-1} \bmod p-1$ (falls $\delta = 0$ ist, muss eine neue Zufallszahl z gewählt und der Vorgang wiederholt werden)

Verifikation: Es gilt $ver(k, x, \gamma, \delta) = 1 :\Leftrightarrow \beta^\gamma \gamma^\delta \equiv_p \alpha^x$

Das ElGamal-Signaturverfahren

Lemma

Eine Signatur (γ, δ) mit $\text{ord}(\gamma) = p-1$ erfüllt genau dann die Verifikationsbedingung $\beta^\gamma \gamma^\delta \equiv_p \alpha^x$, wenn es ein $z \in \mathbb{Z}_{p-1}^*$ mit $sig(\hat{k}, x, z) = (\gamma, \delta)$ gibt (d.h. $\gamma = \alpha^z \bmod p$ und $\delta = (x - a\gamma)z^{-1} \bmod p-1$)

Beweis.

- Wegen $\gamma \equiv \alpha^z \bmod p$ ist z durch γ (und γ durch z) eindeutig bestimmt
- Weiter ist $\beta^\gamma \gamma^\delta \equiv_p \alpha^{a\gamma} \alpha^{z\delta} \equiv_p \alpha^{a\gamma + z\delta}$
- Da α ein Erzeuger von $\mathbb{Z}_p^*$ ist, gilt die Kongruenz $\alpha^{a\gamma+z\delta} \equiv_p \alpha^x$ genau dann, wenn $a\gamma + z\delta \equiv_{p-1} x$ ist, was wiederum mit $\delta \equiv_{p-1} (x - a\gamma)z^{-1}$ äquivalent ist □

Bemerkung

Da der Signieralgorithmus für die Berechnung von $\gamma = \alpha^z \bmod p$ eine Zufallszahl $z \in \mathbb{Z}_{p-1}^*$ wählt, hat jedes von *sig* erzeugte γ die Ordnung $\text{ord}(\gamma) = \text{ord}(\alpha^z) = \text{ord}(\alpha)/\,\text{ggT}(\text{ord}(\alpha), z) = \text{ord}(\alpha) = p-1$

Das ElGamal-Signaturverfahren

Beispiel

- Sei $p = 467$, $\alpha = 2$, $a = 127$ und $\beta = \alpha^a \bmod p = 2^{127} \bmod 467 = 132$
- Um den Text $x = 100 \in X = \mathbb{Z}_{p-1} = \mathbb{Z}_{466}$ mit dem Signierschlüssel $\hat{k} = (p, \alpha, a) = (467, 2, 127)$ zu signieren,
  - wählt Alice die geheime Zufallszahl $z = 213 \in \mathbb{Z}^*_{p-1}$ $(\rightsquigarrow z^{-1} \bmod 466 = 431)$ und
  - erhält wegen

$$\gamma = 2^{213} \bmod 467 = 29 \text{ und } \delta = (100 - 127 \cdot 29)431 \bmod 466 = 51$$

  die Signatur $sig(\hat{k}, x, z) = (29, 51) \in Y = \mathbb{Z}^*_p \times \mathbb{Z}_{p-1} \setminus \{0\}$
- Um die Gültigkeit dieser Signatur für den Text $x = 100$ mit dem Verifikationsschlüssel $k = (p, \alpha, \beta) = (467, 2, 132)$ zu prüfen,
  - verifiziert Bob die Kongruenz

$$\beta^\gamma \gamma^\delta \equiv_p 132^{29} 29^{51} \equiv_p 189 \equiv_p 2^{100} \equiv_p \alpha^x$$

◁

Zur Sicherheit des ElGamal-Systems

- Falls der Gegner in der Gruppe $\mathbb{Z}_p^*$ den diskreten Logarithmus von β zur Basis α bestimmen kann, so kann er den geheimen Schlüssel $a = \log_\alpha \beta$ berechnen
- Als nächstes betrachten wir verschiedene Szenarien für einen selektiven Angriff bei bekanntem Verifikationsschlüssel
- Der Gegner wählt zu einem gegebenen Text x zuerst γ und versucht, ein passendes δ zu finden:
  - Mit $\alpha^x \equiv \beta^\gamma \gamma^\delta \bmod p$ folgt $\delta = \log_\gamma(\alpha^x \beta^{-\gamma})$
  - D.h. die Bestimmung von δ ist eine Instanz des diskreten Logarithmus Problems (kurz: DLP)
- Der Gegner wählt zu einem gegebenen Text x zuerst δ und versucht dann ein γ mit $\alpha^x \equiv \beta^\gamma \gamma^\delta \bmod p$ zu finden
  - Hierfür ist kein effizientes Verfahren bekannt

Zur Sicherheit des ElGamal-Systems

- Der Gegner versucht, zu einem gegebenen Text x gleichzeitig passende Zahlen γ und δ mit $\alpha^x \equiv \beta^\gamma \gamma^\delta \bmod p$ zu finden
  - Auch hierfür ist kein effizientes Verfahren bekannt
- Versucht der Gegner bei einem nichtselektiven Angriff, zuerst γ und δ zu wählen und dazu einen passenden Text x zu finden, so muss er den diskreten Logarithmus $x = \log_\alpha \beta^\gamma \gamma^\delta$ bestimmen

Zur Sicherheit des ElGamal-Systems

- Eine existentielle Fälschung lässt sich jedoch wie folgt durchführen (falls keine Hashfunktion benutzt wird)
  - Der Gegner wählt beliebige Zahlen $u \in \mathbb{Z}_{p-1}$, $v \in \mathbb{Z}^*_{p-1}$ und berechnet $\gamma = \alpha^u \beta^v \bmod p$
  - Dann ist (γ, δ) genau dann eine gültige Signatur für einen Text x, wenn $\alpha^x \equiv_p \beta^\gamma (\alpha^u \beta^v)^\delta$ ist
  - Dies ist wiederum äquivalent zur Kongruenz $\alpha^{x-u\delta} \equiv_p \beta^{\gamma+v\delta}$, die sich im Fall $\mathrm{ggT}(v, p-1) = 1$ für den Text $x = u\delta \bmod p-1$ mittels $\delta = -\gamma v^{-1} \bmod p-1$ erfüllen lässt
  - Bei Wahl von $v = 1$ erhalten wir z.B. die gültige Signatur $(\gamma, \delta) = (\alpha^u \beta \bmod p, -\alpha^u \beta \bmod p-1)$ für den Text $x = u\delta \bmod p-1$, wobei $u \in \mathbb{Z}_{p-1}$ beliebig gewählt werden kann

Zur Sicherheit des ElGamal-Systems

Bemerkung

Bei der Benutzung des ElGamal-Signaturverfahrens sind folgende Punkte zu beachten

- Die Zufallszahl z muss geheim gehalten werden
- Zufallszahlen dürfen nicht mehrfach verwendet werden

- Kennt nämlich der Gegner zu einer Signatur $(x, (\gamma, \delta))$ die Zufallszahl z, so kann er wegen $\delta \equiv_{p-1} (x - a\gamma)z^{-1}$ im Fall $\mathrm{ggT}(\gamma, p-1) = 1$ die eindeutige Lösung der linearen Kongruenz

  $$\gamma a \equiv_{p-1} x - z\delta \ (*)$$

  berechnen, um

  $$a = (x - z\delta)\gamma^{-1} \bmod (p-1)$$

  zu bestimmen

Zur Sicherheit des ElGamal-Systems

- Kennt nämlich der Gegner zu einer Signatur $(x, (\gamma, \delta))$ die Zufallszahl z, so kann er die geheime Zahl a als eindeutige Lösung der Kongruenz

  $$\gamma a \equiv_{p-1} x - z\delta \ (*)$$

  berechnen
- Ist allgemeiner $ggT(\gamma, p-1) = g \geq 1$, so ist g ein Teiler von γ und von $p-1$ sowie wegen $(*)$ auch von $x - z\delta$
- Setzen wir $\mu := \gamma/g$ und $\lambda := (x - z\delta)/g$, so führt $(*)$ auf die Kongruenz $\mu a \equiv_{(p-1)/g} \lambda \ (**)$, aus der sich wegen $ggT(\mu, (p-1)/g) = 1$ folgende g Kandidaten a_i für a gewinnen lassen:

  $$a_0 := \mu^{-1}\lambda \bmod (p-1)/g \text{ und } a_i := a_0 + i(p-1)/g \text{ für } i = 1, \ldots, g-1$$

- Unter $a_0, \ldots, a_{g-1}$ lässt sich a durch Prüfen der Bedingung $\alpha^{a_i} \equiv_p \beta$ eindeutig bestimmen

Zur Sicherheit des ElGamal-Systems

- Sind andererseits $(x_1, (\gamma, \delta_1))$ und $(x_2, (\gamma, \delta_2))$ mit demselben z generierte Signaturen, dann folgt wegen $\beta^\gamma \gamma^{\delta_i} \equiv_p \alpha^{x_i}$ für $i \in \{1, 2\}$,

$$\begin{aligned} \gamma^{\delta_1 - \delta_2} \equiv_p \alpha^{x_1 - x_2} \quad &\Rightarrow \quad \alpha^{z(\delta_1 - \delta_2)} \equiv_p \alpha^{x_1 - x_2} \\ &\Rightarrow \quad z(\delta_1 - \delta_2) \equiv_{p-1} x_1 - x_2 \end{aligned}$$

- Aus dieser Kongruenz lassen sich $d = ggT(\delta_1 - \delta_2, p - 1)$ Kandidaten für z gewinnen und daraus wie oben a berechnen, falls d nicht zu groß ist

Das Schnorr-Signaturverfahren

- Da die Primzahl p beim ElGamal-Signaturverfahren mindestens eine 512-Bit-Zahl (besser 1024-Bit-Zahl) sein sollte, beträgt die Signaturlänge 1024 bzw 2048 Bit
- Folgende Variante des ElGamal-Signaturverfahrens, die als eine Vorstufe zum DSA betrachtet werden kann, wurde von Schnorr vorgeschlagen
- Die zugrunde liegende Idee ist folgende:
  - Indem wir für α ein Element der Ordnung q mit $q \approx 2^{160}$ wählen, reduziert sich die Signaturlänge auf $2 \cdot 160 = 320$ Bit
  - Die Berechnungen werden aber nach wie vor modulo p mit $p \approx 2^{1024}$ ausgeführt, so dass das Problem des diskreten Logarithmus zur Basis α in $\mathbb{Z}_p^*$ hart bleibt

Das Schnorr-Signaturverfahren

- Sei g ein Erzeuger von $\mathbb{Z}_p^*$, wobei p die Bauart $p-1 = mq$ für eine Primzahl $q = \frac{p-1}{m} \approx 2^{160}$ hat
- Dann ist $\alpha = g^{(p-1)/q}$ ein Element in $\mathbb{Z}_p^*$ der Ordnung $ord_p(\alpha) = q$
  - da $ord(g^i) = \frac{ord(g)}{ggT(i,ord(g))} = \frac{p-1}{ggT((p-1)/q,p-1)} = q$ ist (s. Übungen)
- Weiter sei $h : \{0,1\}^* \to \mathbb{Z}_q$ eine Hashfunktion, die jedem Text $x \in X = \{0,1\}^*$ einen Hashwert in $\mathbb{Z}_q$ zuordnet
- Das Schnorr-Verfahren benutzt folgende Schlüssel:
  Signierschlüssel: $\hat{k} = (p, q, \alpha, a)$, $a \in \mathbb{Z}_q$
  Verifikationsschlüssel: $k = (p, \alpha, \beta)$, $\beta = \alpha^a \bmod p$