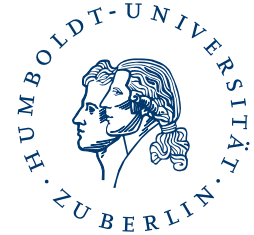
Kryptologie

Johannes Köbler



Institut für Informatik
Humboldt-Universität zu Berlin

WS 2022/23

Elliptische Kurven über den reellen Zahlen

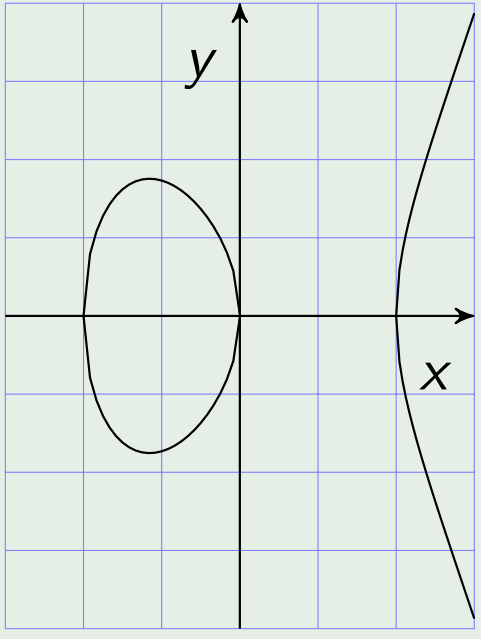
Definition

- Seien $a, b \in \mathbb{R}$
- Eine elliptische Kurve E über $\mathbb{R}$ enthält alle Lösungen $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ der Gleichung $y^2 = x^3 + ax + b$ und zusätzlich den Punkt $\mathcal{O}$ (Punkt im Unendlichen; siehe Übungen)
- Im Fall $4a^3 + 27b^2 = 0$ heißt E singulär, sonst nicht-singulär

Elliptische Kurven über den reellen Zahlen

Beispiel

- Betrachte die durch $y^2 = x^3 - 4x$ definierte elliptische Kurve E:



- Auf E liegen bspw. folgende Punkte: $(-2, 0)$, $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(-1, \sqrt{3})$, $(-1, -\sqrt{3})$, $(3, \sqrt{15})$, $(3, -\sqrt{15})$

Elliptische Kurven über den reellen Zahlen

- Auf den nicht-singulären Punkten von E lässt sich eine additive Gruppenoperation $+$ definieren
- Die Idee dabei ist, dass die Addition von 3 beliebigen Punkten von E, die auf einer Geraden liegen, das neutrale Element $\mathcal{O}$ ergeben soll
- Hierbei werden Tangentialpunkte doppelt und Wendepunkte dreifach gezählt und den parallel zur y-Achse verlaufenden Geraden wird zusätzlich noch der Punkt $\mathcal{O}$ hinzugerechnet
- D.h. alle Geraden, die parallel zur y-Achse verlaufen, schneiden sich im Punkt $\mathcal{O}$ und es werden nur solche Geraden g betrachtet, auf denen bei dieser Zählweise 3 Punkte von E liegen

Berechnung von $P + Q$

- Um nun die Summe $R = P + Q$ von zwei gegebenen Punkten $P = \{x_1, y_1\}$ und $Q = \{x_2, y_2\}$ zu berechnen, bestimmen wir zuerst die Gerade g, auf der P und Q liegen
- Im Fall $P = Q$ ist g die Tangente an E im Punkt P
- Falls g parallel zur y-Achse verläuft, ist $x_1 = x_2$ und $y_1 = -y_2$ (also $Q = (x_1, -y_1)$)
- Da in diesem Fall zudem der Punkt $\mathcal{O}$ auf g liegt, erhalten wir die Gleichung $P + Q(+\mathcal{O}) = \mathcal{O}$ bzw. $-P = Q = (x_1, -y_1)$

Berechnung von $P + Q$

Falls g nicht parallel zur y-Achse verläuft, können wir $P + Q$ wie folgt berechnen

- Im Fall $P \neq Q$ gilt $x_1 \neq x_2$
- Zudem ist $g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = \lambda x + \mu\}$ mit $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ und $\mu = y_1 - \lambda x_1 = y_2 - \lambda x_2$
- Wir zeigen zuerst, dass es einen Punkt $R = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ gibt mit

$$E \cap g = \{P, Q, R\}$$

- Für alle $(x, y) \in E \cap g$ gilt

$$(\lambda x + \mu)^2 = x^3 + ax + b$$
$$\Rightarrow \underbrace{x^3 - \lambda^2 x^2 + (a - 2\mu\lambda)x + b - \mu^2}_{p(x)} = 0$$

- Das Polynom $p(x)$ lässt sich in $\mathbb{C}$ vollständig in Linearfaktoren zerlegen:

$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Berechnung von $P + Q$ im Fall $P \neq Q$

- Für alle $(x, y) \in E \cap g$ gilt

$$(\lambda x + \mu)^2 = x^3 + ax + b$$
$$\Rightarrow \underbrace{x^3 - \lambda^2 x^2 + (a - 2\mu\lambda)x + b - \mu^2}_{p(x)} = 0$$

- Das Polynom $p(x)$ lässt sich in $\mathbb{C}$ vollständig in Linearfaktoren zerlegen:

$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

- Da sich der Koeffizient $-\lambda^2$ von x^2 aus der linearen Zerlegung von $p(x)$ zu

$$-\lambda^2 = -x_1 - x_2 - x_3$$

berechnet, muss $x_3 = \lambda^2 - x_1 - x_2$ sein

- Da R auch auf g liegt, ist zudem $y_3 = \lambda(x_3 - x_1) + y_1$
- Folglich ist $P + Q = -R = (x_3, -y_3) = (\lambda^2 - x_1 - x_2, \lambda(x_1 - x_3) - y_1)$

Berechnung von $P + Q$ im Fall $P = Q$

- Es bleibt der Fall $P = Q$ mit $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2 \neq 0$
- Sei g die Tangente durch P an E
- Wir zeigen, dass es einen Punkt $R = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ gibt mit

  $$g \cap E = \{P, R\}$$

- Die Steigung λ von g erhalten wir durch implizites Differenzieren:

  $$\lambda = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x_1, y_1)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, y_1)} = \frac{3x_1^2 + a}{2y_1},$$

  wobei $F(x, y) = y^2 - x^3 - ax - b$ ist
- Zur Begründung sei

  $$T(x, y) = c(x - x_1) + d(y - y_1)$$

  die Tangentialebene an die Fläche $F(x, y)$ im Punkt $(x_1, y_1, F(x_1, y_1)) = (x_1, y_1, 0)$

Berechnung von $P + Q$ im Fall $P = Q$

- Zur Begründung sei

$$T(x, y) = c(x - x_1) + d(y - y_1)$$

die Tangentialebene an die Fläche $F(x, y)$ im Punkt $(x_1, y_1, F(x_1, y_1)) = (x_1, y_1, 0)$

- Dann gilt

$$c = \frac{\partial F}{\partial x}(x_1, y_1) = -3x_1^2 - a$$

und

$$d = \frac{\partial F}{\partial y}(x_1, y_1) = 2y_1$$

- Da die Tangente g sowohl in der Tangentialebene T als auch in der x, y-Ebene verläuft, folgt

$$\begin{aligned} (x, y) \in g \quad &\Leftrightarrow \quad T(x, y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad y - y_1 = -\frac{c}{d}(x - x_1), \end{aligned}$$

woraus sich $\lambda = -c/d$ ergibt

Berechnung von $P + Q$ im Fall $P = Q$

- Genau wie im Fall $P \neq Q$ erhalten wir nun
  $P+Q = P+P = 2P = -R = (x_3, -y_3) = (\lambda^2 - x_1 - x_2, \lambda(x_1 - x_3) - y_1)$
  mit $\lambda = \frac{3x_1^2+a}{2y_1}$

Satz

E bildet mit $\mathcal{O}$ als neutralem Element und $+$ als Addition eine abelsche Gruppe, d.h.

- $+$ ist abgeschlossen auf E
- $+$ ist kommutativ
- Jeder Punkt hat ein Inverses $-P$
- P ist selbstinvers, falls $P = -P$ ist;
  dies gilt für $P = \mathcal{O}$ und alle Kurvenpunkte der Form $P = (x, 0)$
- $+$ ist assoziativ (ohne Beweis!)

Elliptische Kurven über endlichen Körpern

Definition

- Sei $\mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper mit $q = p^n$ für eine Primzahl $p > 3$ (der Fall $p = 2$ wird in den Übungen betrachtet)
- Für $a, b \in \mathbb{F}_q$ mit $4a^3 + 27b^2 \neq 0$ hat eine elliptische Kurve E über $\mathbb{F}_q$ die Punktmenge $\{(x, y) \in \mathbb{F}_q \mid y^2 = x^3 + ax + b\} \cup \{\mathcal{O}\}$
- Die Gruppenoperation $+$ ist auf E wie folgt definiert:
  - $\mathcal{O}$ ist neutrales Element, d.h. $\forall P \in E - \{\mathcal{O}\} : P + \mathcal{O} = \mathcal{O} + P = P$
  - Das Inverse zu $P = (x, y) \in E \setminus \{\mathcal{O}\}$ ist $-P = \overline{P} = (x, -y)$
  - Für $P = (x_1, y_1)$ und $Q = (x_2, y_2)$ in $E \setminus \{\mathcal{O}\}$ ist

$$P + Q = \begin{cases} \mathcal{O}, & P = \overline{Q} \\ R, & \textit{sonst} \end{cases}$$

wobei $R = (x_3, y_3)$ wie folgt berechnet wird:

$$\begin{aligned} x_3 &= \lambda^2 - x_1 - x_2 \\ y_3 &= \lambda(x_1 - x_3) - y_1 \end{aligned} \quad \text{mit} \quad \lambda = \begin{cases} (y_2 - y_1)(x_2 - x_1)^{-1} & P \neq Q \\ (3x_1^2 + a)(2y_1)^{-1} & P = Q \end{cases}$$

Elliptische Kurven über endlichen Körpern

Satz. $(E, \mathcal{O}, +)$ bildet eine abelsche Gruppe (ohne Beweis)

Beispiel

- Sei E definiert durch $y^2 = x^3 + x + 6$ über $\mathbb{Z}_p$, $p = 11$
- Im Fall $p \equiv_4 3$ lassen sich die Wurzeln y von quadratischen Resten $z \in QR_p = \{y^2 \bmod p \mid y \in \mathbb{Z}_p^*\}$ durch $\pm z^{\frac{p+1}{4}} \bmod p$ bestimmen

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$z = x^3 + x + 6$	6	8	5	3	8	4	8	4	9	7	4
$y = \pm\sqrt{z} \bmod 11$	–	–	4; 7	5; 6	–	2; 9	–	2; 9	3; 8	–	2; 9

- Da die Gruppe $(E, +, \mathcal{O})$ die Größe $|E| = 13$ hat und 13 prim ist, ist die Ordnung jedes Elements der Kurve 1 oder 13
- Da nur das neutrale Element $\mathcal{O}$ die Ordnung 1 haben kann, haben alle anderen Elemente die Ordnung 13 und sind Erzeuger der Gruppe
- Folglich ist $(E, +, \mathcal{O})$ zyklisch und somit isomorph zu $(\mathbb{Z}_{13}, +, 0)$

Elliptische Kurven über endlichen Körpern

Beispiel (Fortsetzung)

- Untenstehende Tabelle zeigt die Vielfachen des Punktes $P = (2, 7) \in E$
- Berechnung von $2P = (2, 7) + (2, 7) = (5, 2)$:

$$\begin{aligned} \lambda &= (3 \cdot 2^2 + 1)(2 \cdot 7)^{-1} \bmod 11 = 2 \cdot 3^{-1} = 2 \cdot 4 \bmod 11 = 8 \\ x_3 &= 8^2 - 2 - 2 \bmod 11 = 5 \\ y_3 &= 8(2 - 5) - 7 \bmod 11 = 2 \end{aligned}$$

- Berechnung von $3P = 2P + P = (5, 2) + (2, 7) = (8, 3)$:

$$\begin{aligned} \lambda &= (7 - 2)(2 - 5)^{-1} \bmod 11 = 5 \cdot (-3)^{-1} \bmod 11 = 2 \\ x_3 &= 2^2 - 5 - 2 \bmod 11 = 8 \\ y_3 &= 2 \cdot (5 - 8) - 2 \bmod 11 = 3 \end{aligned}$$

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
mP	(2,7)	(5,2)	(8,3)	(10,2)	(3,6)	(7,9)	(7,2)	(3,5)	(10,9)	(8,8)	(5,9)	(2,4)	$\mathcal{O}$

Elliptische Kurven über endlichen Körpern

Satz (Hasse)

Für die Anzahl $|E|$ von Punkten einer elliptischen Kurve über einem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$ gilt

$$q + 1 - 2\sqrt{q} \leq |E| \leq q + 1 + 2\sqrt{q} \quad \text{(ohne Beweis)}$$

Bemerkung

Es gibt einen effizienten Algorithmus (von Schoof) mit Zeitkomplexität $O(\log^8 q)$, der $|E|$ bei Eingabe von a, b und q berechnet

Satz

Sei E eine elliptische Kurve über $\mathbb{F}_q$. Dann ist $(E, \mathcal{O}, +)$ isomorph zu $(\mathbb{Z}_{n_1}, 0, +) \times (\mathbb{Z}_{n_2}, 0, +)$, wobei $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^+$ sind und n_1 Teiler von n_2 und von $q - 1$ ist (ohne Beweis)

Elliptische Kurven über endlichen Körpern

Satz

Sei E eine elliptische Kurve über $\mathbb{F}_q$. Dann ist $(E, \mathcal{O}, +)$ isomorph zu $(\mathbb{Z}_{n_1}, 0, +) \times (\mathbb{Z}_{n_2}, 0, +)$, wobei $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^+$ sind und n_1 Teiler von n_2 und von $q - 1$ ist (ohne Beweis)

Bemerkung

- Falls n_1 ein Teiler von n_2 ist, ist die (additive) Gruppe $\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2}$ genau dann zyklisch, wenn $n_1 = 1$ (und somit $\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \cong \mathbb{Z}_{n_2}$) ist
- Eine hinreichende Bedingung hierfür ist, dass $|E|$ quadratfrei (also das Produkt von paarweise verschiedenen Primzahlen) ist
- Im Fall $n_1 > 1$ ist E dagegen nicht zyklisch, hat aber eine nicht-triviale zyklische Untergruppe, die zu $\mathbb{Z}_{n_2}$ isomorph ist und für kryptografische Anwendungen benutzt werden kann

Kompakte Darstellung von Punkten auf E

Bemerkung

- Für den Fall, dass sich Quadratwurzeln effizient in $\mathbb{F}_q$ berechnen lassen, gibt es eine einfache Möglichkeit, Punkte auf einer elliptischen Kurve über $\mathbb{F}_q$ kompakter darzustellen
- Ist zum Beispiel $q = p$ prim mit $p \equiv_4 3$, so lassen sich die Wurzeln $\pm\sqrt{z} = \pm z^{(p+1)/4} \bmod p$ von $z \in \{x^2 \bmod p \mid x \in \mathbb{Z}_p\}$ effizient berechnen
- Folgende Funktion liefert dann eine kompakte Darstellung: `PointCompress`: $E - \{\mathcal{O}\} \to \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_2$ mit $(x, y) \mapsto (x, y \bmod 2)$

Kompakte Darstellung von Punkten auf E

- Für die Rekonstruktion können wir folgende Prozedur benutzen
- Sei E eine durch $y^2 = p(x)$ mit $p(x) = x^3 + ax + b$ definierte elliptische Kurve über $\mathbb{F}_p$ und $p \equiv_4 3$ prim

Prozedur `PointDeCompress`(x, c)

```
1 z := p(x) mod p
2 y := z^((p+1)/4) mod p
3 if y^2 ≡_p z then
4    if y ≢_2 c then
5       y := p − y
6    output(x, y)
7 else output(“ error ”)
```

Berechnung von Vielfachen von Punkten auf E

- In $\mathbb{Z}_m^*$ lassen sich Potenzen a^e mod m durch wiederholtes Quadieren und Multiplizieren berechnen
- Ähnlich lassen sich die Vielfachen mP eines Punktes P einer elliptischen Kurve E durch wiederholtes Verdoppeln und Addieren berechnen
- Da sich additive Inverse in E sehr leicht berechnen lassen, ist mP durch wiederholtes Verdoppeln, Addieren und Subtrahieren noch effizienter berechenbar, falls wir m als NAF-Zahl (Non Adjacent Form) darstellen

Definition

- Eine Folge $c_{l-1} \dots c_0 \in \{-1, 0, 1\}^l$ heißt SBR-Darstellung (Signed Binary Representation) einer Zahl $c \in \mathbb{Z}$, falls $\sum_{i=0}^{l-1} c_i 2^i = c$ ist
- Ist von je zwei benachbarten Ziffern c_i und c_{i+1} mindestens eine 0, so ist $c_{l-1} \dots c_0$ eine NAF-Darstellung (Non-Adjacent Form) von c

Im Folgenden schreiben wir für -1 auch kurz $\bar{1}$

Berechnung von Vielfachen von Punkten auf E

Beispiel

Sowohl 01011 als auch $10\bar{1}0\bar{1}$ sind SBR-Darstellungen von $c = 8 + 2 + 1 = 11 = 16 - 4 - 1$ ◁

Satz

Jede Zahl $c \in \mathbb{Z}$ hat eine eindeutige NAF-Darstellung
(Beweis siehe Übungen)

Berechnung von Vielfachen von Punkten auf E

Umformung von der Binär- in die NAF-Darstellung

- Wir ersetzen von rechts beginnend jeden Teilstring der Form 01^l mit $l \geq 2$ durch den Teilstring $10^{l-1}\bar{1}$
- Um z.B. die NAF-Darstellung von $c = 47$ mit der Binärdarstellung $47_{10} = 101111_2$ zu berechnen, führen wir folgende Ersetzungen durch:

$$
\begin{aligned}
& 0\,1\,\underbrace{0\,1\,1\,1\,1}\\
\rightsquigarrow\ & \underbrace{0\,1\,1}\,0\,0\,0\,\bar{1}\\
\rightsquigarrow\ & 1\,0\,\bar{1}\,0\,0\,0\,\bar{1}
\end{aligned}
$$

Berechnung von Vielfachen von Punkten auf E

- Sei $c_s \dots c_0$ eine SBR-Darstellung einer Zahl $c \in \mathbb{Z}$
- Zur effizienten Berechnung von $Q = cP$ benutzen wir das Horner-Schema

$$c = \sum_{j=0}^{s} c_j 2^j = (\dots \underbrace{(\dots (c_s 2 + c_{s-1})2 + \dots + c_i)}_{\sum_{j=i}^{s} c_j 2^{j-i} =: d_i} 2 + \dots + c_1)2 + c_0$$

- Dieses führt auf das folgende iterative Schema zur Berechnung der Punkte $Q_i = d_i P$:

$$Q_i = \begin{cases} \mathcal{O}, & i = s+1 \\ 2Q_{i+1} + c_i P, & i = s, \dots, 0 \end{cases}$$

Berechnung von Vielfachen von Punkten auf E

- Damit erhalten wir folgenden Algorithmus zur Berechnung von $Q = Q_0 = cP$:

Prozedur `DoubleAddSub`$(P, c_s, \ldots, c_0)$

1 $Q := \mathcal{O}$
2 **for** $i := s$ **downto** 0 **do**
3 $\quad Q := 2Q + c_i P$
4 **output**(Q)

- Da eine $(s+1)$-Bitzahl im Durchschnitt $s/2$ Nullen in Binärdarstellung und $(2/3)s$ Nullen in NAF-Darstellung enthält (siehe Übungen), benötigt DoubleAddSub bei Verwendung von NAF-Zahlen ca. $(4/3)s$ Additionen/Subtraktionen im Vergleich zu ca. $(3/2)s$ Additionen im Binärfall
- Dies entspricht einer Beschleunigung um ca. 11 Prozent