Einführung in die Theoretische Informatik

Johannes Köbler

Institut für Informatik
Humboldt-Universität zu Berlin

WS 2022/23

Die Chomsky-Hierarchie

Man unterscheidet vier Typen von Grammatiken $G = (V, \Sigma, P, S)$

Definition

1. G heißt vom Typ 3 oder regulär, falls für alle Regeln $u \to v$ gilt:

   $u \in V$ und $v \in \Sigma V \cup \Sigma \cup \{\varepsilon\}$

   (d.h. alle Regeln haben die Form $A \to aB$, $A \to a$ oder $A \to \varepsilon$)
2. G heißt vom Typ 2 oder kontextfrei, falls für alle Regeln $u \to v$ gilt:

   $u \in V$ (d.h. alle Regeln haben die Form $A \to v$)
3. G heißt vom Typ 1 oder kontextsensitiv, falls für alle Regeln $u \to v$ gilt:

   $|v| \geq |u|$ (mit Ausnahme der ε-Sonderregel, s. unten)
4. Jede Grammatik ist automatisch vom Typ 0

Die ε-Sonderregel

In einer kontextsensitiven Grammatik ist auch die Regel $S \to \varepsilon$ zulässig, falls das Startsymbol S nicht auf der rechten Seite einer Regel vorkommt

Kontextfreie Sprachen

- Es ist klar, dass jede reguläre Grammatik auch kontextfrei ist
- Zudem ist die Sprache $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ nicht regulär
- Es ist aber leicht, eine kontextfreie Grammatik für L anzugeben:

$$G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S) \text{ mit } P = \{S \to aSb, \varepsilon\}$$

- Also gilt REG $\subsetneq$ CFL
- Allerdings sind nicht alle kontextfreien Grammatiken kontextsensitiv
- Z.B. ist obige Grammatik G nicht kontextsensitiv, da sie die Regel $S \to \varepsilon$ enthält und S auf der rechten Seite der Regel $S \to aSb$ vorkommt
- Wir können G jedoch wie folgt in eine Grammatik G' umwandeln:
  - ersetze die Regel $S \to \varepsilon$ durch die Regel $S \to ab$ und
  - füge ein neues Startsymbol S' sowie die Regeln $S' \to S, \varepsilon$ hinzu
- Tatsächlich lässt sich jede kontextfreie Grammatik G in eine äquivalente kontextfreie Grammatik G' umwandeln, die auch kontextsensitiv ist

Chomsky-Normalform

Definition

Eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ ist in Chomsky-Normalform (CNF), falls $P \subseteq V \times (V^2 \cup \Sigma)$ ist, d.h. alle Regeln haben die Form $A \to BC$ oder $A \to a$

Satz

Zu jeder kontextfreien Grammatik G lässt sich eine CNF-Grammatik G' mit $L(G') = L(G) \setminus \{\varepsilon\}$ konstruieren

Anwendungen der Chomsky-Normalform

Korollar

CFL $\subseteq$ CSL

Beweis

- Sei $L \in$ CFL und sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine CNF-Grammatik mit $L(G) = L \setminus \{\varepsilon\}$
- Im Fall $\varepsilon \notin L$ folgt sofort $L = L(G) \in$ CSL, da G kontextsensitiv ist
- Ist $\varepsilon \in L$, so erzeugt folgende kontextsensitive (und kontextfreie) Grammatik G' die Sprache $L = L(G) \cup \{\varepsilon\}$:

$$G' = (V \cup \{S_{neu}\}, \Sigma, P \cup \{S_{neu} \to S, \varepsilon\}, S_{neu})$$

$\square$

Weitere Anwendungen der Chomsky-Normalform

- Der Beweis des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen basiert auf CNF-Grammatiken
- Zudem ermöglichen sie einen effizienten Algorithmus zur Lösung des Wortproblems für kontextfreie Sprachen

Das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

Zu jeder kontextfreien Sprache $L \in \mathrm{CFL}$ gibt es eine Zahl l, so dass sich alle Wörter $z \in L$ mit $|z| \geq l$ in $z = uvwxy$ zerlegen lassen mit

1. $vx \neq \varepsilon$,
2. $|vwx| \leq l$ und
3. $uv^i wx^i y \in L$ für alle $i \geq 0$

Das Wortproblem für kontextfreie Grammatiken

Gegeben: Eine kontextfreie Grammatik G und ein Wort x

Gefragt: Ist $x \in L(G)$?

Das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

Beispiel

- Betrachte die Sprache $L = \{a^n b^n | n \geq 0\}$
- Dann lässt sich jedes Wort $z = a^n b^n = a^{n-1} ab b^{n-1}$ in L mit $|z| \geq l = 2$ pumpen
- Zerlegen wir nämlich z in

$$z = uvwxy \text{ mit } u = a^{n-1},\ v = a,\ w = \varepsilon,\ x = b \text{ und } y = b^{n-1},$$

dann gilt

1. $vx = ab \neq \varepsilon$
2. $|vwx| = |ab| \leq 2$ und
3. $uv^i wx^i y = a^{n-1} a^i b^i b^{n-1} \in L$ für alle $i \geq 0$ ◁

Beispiel

- Die Sprache $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ ist nicht kontextfrei
- Für eine vorgegebene Zahl $l \geq 0$ hat nämlich das Wort $z = a^l b^l c^l \in L$ die Länge $|z| = 3l \geq l$
- Dieses Wort lässt sich aber nicht pumpen:

  Für jede Zerlegung $z = uvwxy$ mit $vx \neq \varepsilon$ und $|vwx| \leq l$ gehört $z' = uv^0wx^0y$ nicht zu L:
  - Wegen $vx \neq \varepsilon$ ist $|z'| < |z|$
  - Wegen $|vwx| \leq l$ kommen in vx nicht alle drei Zeichen a, b, c vor
  - Kommt aber in vx beispielsweise kein a vor, so ist $\#_a(z) = \#_a(z')$ und somit gilt

    $$|z'| < |z| = 3\,\#_a(z) = 3\,\#_a(z')$$
  - Also gehört z' nicht zu L $\triangleleft$

Abschlusseigenschaften von CFL

Satz

CFL ist abgeschlossen unter Vereinigung, Produkt und Sternhülle

Beweis

- Seien $G_1 = (V_1, \Sigma, P_1, S_1)$ und $G_2 = (V_2, \Sigma, P_2, S_2)$ kontextfreie Grammatiken mit $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ und sei S eine neue Variable
- Dann gilt
  - $L(G_1) \cup L(G_2) = L(G_3)$ für die kontextfreie Grammatik
    $$G_3 = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1, S_2\}, S)$$
  - $L(G_1)L(G_2) = L(G_4)$ für die kontextfreie Grammatik
    $$G_4 = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 S_2\}, S) \text{ und}$$
  - $L(G_1)^* = L(G_5)$ für die kontextfreie Grammatik
    $$G_5 = (V_1 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup \{S \to S_1 S, \varepsilon\}, S)$$

□

Für $G_6 = (V_1, \Sigma, P_1 \cup \{S_1 \to S_1 S_1, \varepsilon\}, S_1)$ muss nicht $L(G_6) = L(G_1)^*$ gelten, da $L(G_6)$ z.B. für $P_1 = \{S_1 \to aS_1 b, \varepsilon\}$ das Wort $aababb \notin L(G_1)^*$ enthält

Abschlusseigenschaften von CFL

Satz

CFL ist nicht abgeschlossen unter Schnitt und Komplement

Beweis von $L_1, L_2 \in \mathrm{CFL} \not\Rightarrow L_1 \cap L_2 \in \mathrm{CFL}$

- Folgende Sprachen sind kontextfrei (siehe Übungen):

$$L_1 = \{a^n b^m c^m \mid n, m \geq 0\} \quad \text{und} \quad L_2 = \{a^n b^n c^m \mid n, m \geq 0\}$$

- Nicht jedoch ihr Schnitt $L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ □

Beweis von $L \in \mathrm{CFL} \not\Rightarrow \overline{L} \in \mathrm{CFL}$

- Wäre CFL unter Komplement abgeschlossen, so wäre CFL wegen de Morgan auch unter Schnitt abgeschlossen
- Mit $A, B \in \mathrm{CFL}$ wären dann nämlich auch $\overline{A}, \overline{B} \in \mathrm{CFL}$, woraus wegen

$$\overline{A}, \overline{B} \in \mathrm{CFL} \Rightarrow \overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B} \in \mathrm{CFL}$$

wiederum $A \cap B \in \mathrm{CFL}$ folgen würde □

Umwandlung in Chomsky-Normalform

Satz

Zu jeder kontextfreien Grammatik G lässt sich eine CNF-Grammatik G' mit $L(G') = L(G) \setminus \{\varepsilon\}$ konstruieren

Beweis

Wir wandeln $G = (V, \Sigma, P, S)$ wie folgt in eine CNF-Grammatik G' um:

- Wir beseitigen zunächst alle Regeln der Form $A \to \varepsilon$ und danach alle Regeln der Form $A \to B$ (siehe folgende Folien)
- Dann fügen wir für jedes Terminal $a \in \Sigma$ eine neue Variable X_a und eine neue Regel $X_a \to a$ hinzu und ersetzen jedes Vorkommen von a, bei dem a nicht alleine auf der rechten Seite einer Regel steht, durch X_a
- Anschließend führen wir für jede Regel $A \to B_1 \dots B_k$, $k \geq 3$, neue Variablen $A_1, \dots, A_{k-2}$ ein und ersetzen sie durch die $k-1$ Regeln

$$A \to B_1 A_1,\ A_1 \to B_2 A_2,\ \dots\ A_{k-3} \to B_{k-2} A_{k-2},\ A_{k-2} \to B_{k-1} B_k \qquad \square$$

Falls G Regeln mit vielen Variablen auf der rechten Seite hat, empfiehlt es sich, Regeln der Form $A \to \varepsilon$ und $A \to B$ zuletzt zu beseitigen (s. Übungen)

Beseitigung von ε-Regeln

Satz

Zu jeder kontextfreien Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ gibt es eine kontextfreie Grammatik $G' = (V, \Sigma, P', S)$ ohne ε-Regeln mit $L(G') = L(G) \setminus \{\varepsilon\}$

Beweis

- Zuerst berechnen wir die Menge $E = \{A \in V \mid A \Rightarrow^* \varepsilon\}$ aller Variablen, die nach ε ableitbar sind:

```
E' := {A ∈ V | A → ε}
repeat
   E := E'
   E' := E ∪ {A ∈ V | ∃ B_1, ..., B_k ∈ E : A → B_1 ... B_k}
until E = E'
```

- Nun bilden wir P' wie folgt:

$$\left\{ A \to v' \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{es ex. eine Regel } A \to_G v \text{, so dass } v' \neq \varepsilon \text{ aus } v \text{ durch} \\ \text{Entfernen von beliebig vielen Variablen } A \in E \text{ entsteht} \end{array} \right\}$$

$\square$

Beseitigung von ε-Regeln

Beispiel

Betrachte die Grammatik $G = (\{S, T, U, X, Y, Z\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit

$$P: \quad \begin{array}{lll} S \to aY, bX, Z & Y \to bS, aYY & T \to U \\ X \to aS, bXX & Z \to \varepsilon, S, T, cZ & U \to abc \end{array}$$

- Berechnung von E:

E	$\{Z\}$	$\{Z, S\}$
E'	$\{Z, S\}$	$\{Z, S\}$

- Entferne $Z \to \varepsilon$ und füge die Regeln $Y \to b$ (wegen $Y \to bS$), $X \to a$ (wegen $X \to aS$) und $Z \to c$ (wegen $Z \to cZ$) hinzu:

$$P': \quad \begin{array}{lll} S \to aY, bX, Z & Y \to b, bS, aYY & T \to U \\ X \to a, aS, bXX & Z \to c, S, T, cZ & U \to abc \end{array}$$

Beseitigung von Variablenumbenennungen

Satz

Zu jeder kontextfreien Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ gibt es eine kontextfreie Grammatik $G' = (V, \Sigma, P', S)$ ohne Regeln der Form $A \to B$ mit $L(G') = L(G)$

Beweis

- Zuerst entfernen wir sukzessive alle Zyklen $A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_k \to A_1$
- Hierzu entfernen wir diese Regeln aus P und ersetzen alle Vorkommen der Variablen $A_2, \ldots, A_k$ in den übrigen Regeln durch A_1
- Befindet sich die Startvariable unter $A_1, \ldots, A_k$, so sei dies o.B.d.A. A_1
- Nun eliminieren wir sukzessive die restlichen Variablenumbenennungen, indem wir
  - eine Regel $A \to B$ wählen, so dass in P keine Variablenumbenennung $B \to C$ mit B auf der linken Seite existiert,
  - diese Regel $A \to B$ aus P entfernen und
  - für jede Regel $B \to v$ in P die Regel $A \to v$ zu P hinzunehmen $\square$

Beseitigung von Variablenumbenennungen

Beispiel (Fortsetzung)

$$P: \quad S \to aY, bX, Z \qquad Y \to b, bS, aYY \qquad T \to U$$
$$X \to a, aS, bXX \qquad Z \to c, S, T, cZ \qquad U \to abc$$

- Entferne den Zyklus $S \to Z \to S$ und ersetze Z durch S:

$$S \to aY, bX, c, T, cS \qquad Y \to b, bS, aYY \qquad T \to U$$
$$X \to a, aS, bXX \qquad U \to abc$$

- Ersetze die Regel $T \to U$ durch $T \to abc$ (wegen $U \to abc$):

$$S \to aY, bX, c, T, cS \qquad Y \to b, bS, aYY \qquad T \to abc$$
$$X \to a, aS, bXX \qquad U \to abc$$

- Ersetze dann auch die Regel $S \to T$ durch $S \to abc$ (wegen $T \to abc$):

$$S \to abc, aY, bX, c, cS \qquad Y \to b, bS, aYY \qquad T \to abc$$
$$X \to a, aS, bXX \qquad U \to abc$$

- Da T und U nicht mehr auf der rechten Seite vorkommen, können wir die Regeln $T \to abc$ und $U \to abc$ weglassen und erhalten die Regeln

$$P': \quad S \to abc, aY, bX, c, cS \qquad Y \to b, bS, aYY \qquad X \to a, aS, bXX$$

Bringe alle Regeln in die Form $A \to a$ und $A \to BC$

Beispiel (Schluss)

$$P'\colon\ S \to abc, aY, bX, c, cS \qquad Y \to b, bS, aYY \qquad X \to a, aS, bXX$$

- Ersetze a, b und c (außer wenn sie alleine auf der rechten Seite einer Regel stehen) durch A, B und C und füge die Regeln $A \to a$, $B \to b$, $C \to c$ hinzu:

$$S \to ABC, AY, BX, c, CS \qquad Y \to b, BS, AYY \qquad X \to a, AS, BXX$$
$$A \to a \qquad B \to b \qquad C \to c$$

- Ersetze die Regeln $S \to ABC$, $Y \to AYY$ und $X \to BXX$ durch die Regeln $S \to AS'$, $S' \to BC$, $Y \to AY'$, $Y' \to YY$ und $X \to BX'$, $X' \to XX$:

$$S \to AS', AY, BX, c, CS \qquad S' \to BC \qquad Y \to b, BS, AY' \qquad Y' \to YY$$
$$X \to a, AS, BX' \qquad X' \to XX \qquad A \to a \qquad B \to b \qquad C \to c \qquad \triangleleft$$

Links- und Rechtsableitungen

Definition

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik

- Eine Ableitung

  $$\underline{S} \Rightarrow l_1 \underline{A_1} r_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow l_{m-1} \underline{A_{m-1}} r_{m-1} \Rightarrow \alpha_m$$

  heißt Linksableitung von α_m (kurz $S \Rightarrow_L^* \alpha_m$), falls in jedem Ableitungsschritt die am weitesten links stehende Variable ersetzt wird, d.h. es gilt $l_i \in \Sigma^*$ für $i = 1, \ldots, m-1$
- Rechtsableitungen $S_0 \Rightarrow_R^* \alpha_m$ sind analog definiert
- G heißt mehrdeutig, wenn es ein Wort $x \in L(G)$ gibt, das mindestens zwei verschiedene Linksableitungen hat
- Andernfalls heißt G eindeutig

Für alle $x \in \Sigma^*$ gilt: $x \in L(G) \;\Leftrightarrow\; S \Rightarrow^* x \;\Leftrightarrow\; S \Rightarrow_L^* x \;\Leftrightarrow\; S \Rightarrow_R^* x$

Ein- und mehrdeutige Grammatiken

Beispiel

- In $G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aSbS, \varepsilon\}, S)$ gibt es 8 Ableitungen für $aabb$:

$$\underline{S} \Rightarrow_L a\underline{S}bS \Rightarrow_L aa\underline{S}bSbS \Rightarrow_L aab\underline{S}bS \Rightarrow_L aabb\underline{S} \Rightarrow_L aabb$$
$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aa\underline{S}bSbS \Rightarrow aabSb\underline{S} \Rightarrow aab\underline{S}b \Rightarrow aabb$$
$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aaSb\underline{S}bS \Rightarrow aa\underline{S}bbS \Rightarrow aabb\underline{S} \Rightarrow aabb$$
$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aaSb\underline{S}bS \Rightarrow aaSbb\underline{S} \Rightarrow aa\underline{S}bb \Rightarrow aabb$$
$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aaSbSb\underline{S} \Rightarrow aa\underline{S}bSb \Rightarrow aab\underline{S}b \Rightarrow aabb$$
$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aaSbSb\underline{S} \Rightarrow aaSb\underline{S}b \Rightarrow aa\underline{S}bb \Rightarrow aabb$$
$$\underline{S} \Rightarrow aSb\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}b \Rightarrow aa\underline{S}bSb \Rightarrow aab\underline{S}b \Rightarrow aabb$$
$$\underline{S} \Rightarrow_R aSb\underline{S} \Rightarrow_R a\underline{S}b \Rightarrow_R aaSb\underline{S}b \Rightarrow_R aa\underline{S}bb \Rightarrow_R aabb$$

- Darunter sind genau eine Links- und genau eine Rechtsableitung
- In $G' = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aSbS, ab, \varepsilon\}, S)$ gibt es 3 Ableitungen für ab:

$$\underline{S} \Rightarrow ab \qquad \underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow ab\underline{S} \Rightarrow ab \qquad \underline{S} \Rightarrow aSb\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}b \Rightarrow ab$$

- Darunter sind zwei Links- und zwei Rechtsableitungen ◁

Beispiel

- Die Grammatik $G = (\{S\}, \{a,b\}, \{S \to aSbS, \varepsilon\}, S)$ ist eindeutig
- Dies liegt daran, dass in einer Linksableitung

  $$S \;\Rightarrow_L^*\; y\underline{S}\beta \;\Rightarrow_L^*\; x$$

  von $x \in L(G)$ auf die Satzform $y\underline{S}\beta$ die Regel $S \to aSbS$ nur dann anwendbar ist, wenn in x auf das Präfix y ein a folgt
- Zudem ist die Regel $S \to \varepsilon$ nicht anwendbar, wenn in x auf das Präfix y ein a folgt, da aus β kein Wort z ableitbar ist, das mit einem a beginnt (sonst hätte nämlich G eine Satzform ySz, die das Teilwort Sa enthält, was sich induktiv über die Ableitungslänge widerlegen lässt)
- Dagegen ist die Grammatik $G' = (\{S\}, \{a,b\}, \{S \to aSbS, ab, \varepsilon\}, S)$ mehrdeutig, da das Wort $x = ab$ zwei Linksableitungen hat:

  $$\underline{S} \Rightarrow ab \text{ und } \underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow ab\underline{S} \Rightarrow ab$$ ◁

Gerichtete Bäume und Wälder

Sei $G = (V, E)$ ein Digraph.

- Ein (gerichteter) v_0-v_k-Weg in G ist eine Folge von Knoten $v_0, \ldots, v_k$ mit $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für $i = 0, \ldots, k-1$. Seine Länge ist k
- Ein Weg heißt Pfad, falls alle Knoten paarweise verschieden sind
- Ein u-v-Weg der Länge ≥ 1 mit $u = v$ heißt Zyklus
- G heißt azyklisch, wenn es in G keinen Zyklus gibt
- Ein Zyklus heißt Kreis, falls alle Knoten paarweise verschieden sind
- G heißt gerichteter Wald, wenn G azyklisch ist und jeder Knoten $v \in V$ Eingangsgrad $\deg^-(v) \leq 1$ hat
- Ein Knoten $u \in V$ vom Ausgangsgrad $\deg^+(u) = 0$ heißt Blatt
- Ein Knoten $w \in V$ heißt Wurzel, wenn $\deg^-(w) = 0$ ist
- Ein gerichteter Wald mit genau einer Wurzel heißt gerichteter Baum
- Da in einem gerichteten Baum alle Kanten von der Wurzel w wegführen, ist die Angabe der Kantenrichtungen bei Kenntnis von w überflüssig (man spricht dann auch von einem Wurzelbaum)

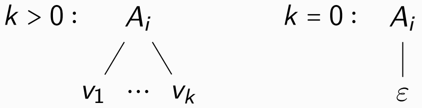
Syntaxbäume

Wir ordnen einer Ableitung

$$\underline{A_0} \Rightarrow l_1 \underline{A_1} r_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow l_{m-1} \underline{A_{m-1}} r_{m-1} \Rightarrow \alpha_m$$

den Syntaxbaum (oder Ableitungsbaum, engl. *parse tree*) T_m zu, wobei die Bäume $T_0, \ldots, T_m$ induktiv wie folgt definiert sind:

- T_0 besteht aus einem einzigen Knoten, der mit A_0 markiert ist
- Wird im $(i+1)$-ten Ableitungsschritt die Regel $A_i \to v_1 \ldots v_k$ mit $v_1, \ldots, v_k \in \Sigma \cup V$ angewandt, so ensteht T_{i+1} aus T_i, indem wir das Blatt A_i durch folgenden Unterbaum ersetzen:



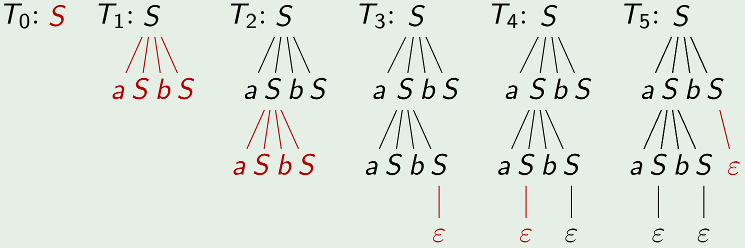
- Hierbei stellen wir uns die Kanten von oben nach unten gerichtet und die Kinder $v_1 \ldots v_k$ von links nach rechts geordnet vor
- Syntaxbäume sind also geordnete Wurzelbäume

Beispiel

- Betrachte die Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aSbS, \varepsilon\}, S)$ und die Ableitung

$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aaSb\underline{S}bS \Rightarrow aa\underline{S}bbS \Rightarrow aabb\underline{S} \Rightarrow aabb$$

- Die zugehörigen Syntaxbäume sind dann

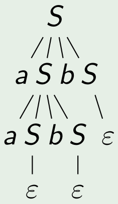


◁

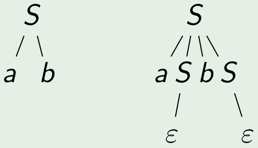
Syntaxbäume

Beispiel

- In $G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aSbS, \varepsilon\}, S)$ führen alle acht Ableitungen des Wortes *aabb* auf denselben Syntaxbaum:



- Dagegen führen in $G' = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aSbS, ab, \varepsilon\}, S)$ die drei Ableitungen des Wortes *ab* auf zwei unterschiedliche Syntaxbäume:



Syntaxbäume und Linksableitungen

- Seien $T_0, \ldots, T_m$ die zu einer Ableitung $S = \alpha_0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \alpha_m$ gehörigen Syntaxbäume
- Dann haben alle Syntaxbäume $T_0, \ldots, T_m$ die Wurzel S
- Die Satzform α_i ergibt sich aus T_i, indem wir die Blätter von T_i von links nach rechts zu einem Wort zusammensetzen
- Auf den Syntaxbaum T_m führen neben $\alpha_0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \alpha_m$ alle Ableitungen, die sich von dieser nur in der Reihenfolge der Regelanwendungen unterscheiden
- Dazu gehört genau eine Linksableitung
- Linksableitungen und Syntaxbäume entsprechen sich also eineindeutig
- Dasselbe gilt für Rechtsableitungen
- Ist T Syntaxbaum einer CNF-Grammatik, so hat jeder Knoten in T höchstens zwei Kinder (d.h. T ist ein Binärbaum)

Abschätzung der Blätterzahl bei Binärbäumen

Definition

Die Tiefe eines Baumes mit Wurzel w ist die maximale Länge eines Weges von w zu einem Blatt

Lemma

Ein Binärbaum B der Tiefe $\leq k$ hat $\leq 2^k$ Blätter

Beweis durch Induktion über k:

$k = 0$: Ein Baum der Tiefe 0 kann nur einen Knoten haben

$k \rightsquigarrow k+1$: Sei B ein Binärbaum der Tiefe $\leq k+1$
Dann hängen an B's Wurzel maximal zwei Unterbäume
Da deren Tiefe $\leq k$ ist, haben sie nach IV $\leq 2^k$ Blätter
Also hat $B \leq 2^{k+1}$ Blätter $\square$

Mindesttiefe von Binärbäumen

Lemma

Ein Binärbaum B der Tiefe $\leq k$ hat $\leq 2^k$ Blätter

Korollar

Ein Binärbaum B mit $> 2^{k-1}$ Blättern hat eine Tiefe $\geq k$

Beweis

Wäre die Tiefe von B kleiner als k (also $\leq k-1$), so hätte B nach obigem Lemma $\leq 2^{k-1}$ Blätter (Widerspruch) $\square$

Beweis des Pumping-Lemmas für CFL

Satz (Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen)

Zu jeder kontextfreien Sprache $L \in \mathrm{CFL}$ gibt es eine Zahl l, so dass sich alle Wörter $z \in L$ mit $|z| \geq l$ in $z = uvwxy$ zerlegen lassen mit

1. $vx \neq \varepsilon$,
2. $|vwx| \leq l$ und
3. $uv^i wx^i y \in L$ für alle $i \geq 0$

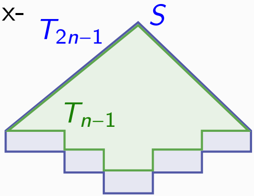
Beweis des Pumping-Lemmas für CFL

Beweis

- Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine CNF-Grammatik für $L \setminus \{\varepsilon\}$
- Ist nun $z = z_1 \dots z_n \in L$ mit $n \geq 1$, so ex. in G eine Ableitung

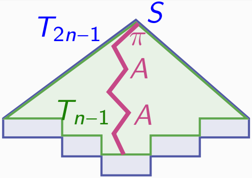
  $S = \alpha_0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \alpha_m = z$ mit zugehörigen Syntaxbäumen $T_0, \dots, T_m$

- Da G in CNF ist, werden hierbei genau $n - 1$ Regeln der Form $A \to BC$ und genau n Regeln der Form $A \to a$ angewandt
- Folglich ist $m = 2n - 1$ und wir können annehmen, dass die Regeln der Form $A \to BC$ vor den Regeln der Form $A \to a$ zur Anwendung kommen
- Dann besteht α_{n-1} aus n Variablen und die Syntaxbäume T_{2n-1} und T_{n-1} haben genau n Blätter
- Setzen wir $l = 2^k$, wobei $k = |V|$ ist, so hat T_{n-1} im Fall $n \geq l$ mindestens die Tiefe k, da T_{n-1} mindestens $l = 2^k > 2^{k-1}$ Blätter hat

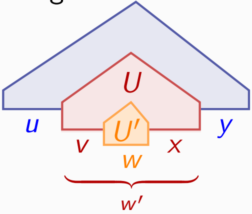


Beweis des Pumping-Lemmas für CFL

Beweis (Fortsetzung)



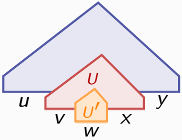
- Setzen wir $l = 2^k$, wobei $k = |V|$ ist, so hat T_{n-1} im Fall $n \geq l$ mindestens die Tiefe k, da T_{n-1} mindestens $l = 2^k > 2^{k-1}$ Blätter hat
- Sei π ein von der Wurzel ausgehender Pfad maximaler Länge in T_{n-1}
- Dann hat π mindestens die Länge k und unter den letzten $k + 1 > |V|$ Knoten von π müssen zwei mit derselben Variablen A markiert sein
- Seien U und U' die Unterbäume von T_{2n-1} mit diesen Knoten als Wurzel
- Dann hat U höchstens $l = 2^k$ Blätter und U' hat weniger Blätter als U
- Nun zerlegen wir z wie folgt:
  - w' ist das Teilwort von $z = uw'y$, das von U erzeugt wird und
  - w ist das Teilwort von $w' = vwx$, das von U' erzeugt wird



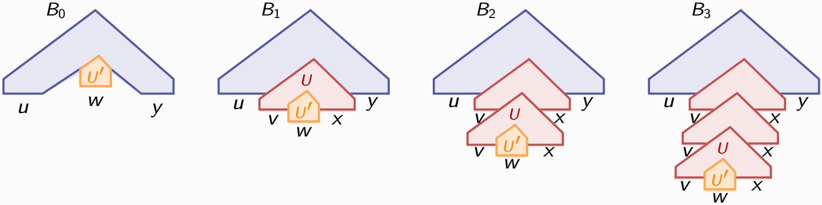
Beweis des Pumping-Lemmas für CFL

Beweis (Schluss)

- Dann ist $vx \neq \varepsilon$ (Bed. 1), da U mehr Blätter als U' hat
- Zudem gilt $|vwx| \leq l$ (Bed. 2), da U höchstens $2^k = l$ Blätter hat (sonst hätte der Baum $U^* = U \cap T_{n-1}$ eine Tiefe größer k und π wäre nicht maximal)



- Schließlich lassen sich Syntaxbäume B_i für die Wörter uv^iwx^iy, $i \geq 0$, wie folgt konstruieren (Bed. 3):
  - B_0 entsteht aus $B_1 = T_{2n-1}$, indem wir U durch U' ersetzen
  - B_{i+1} entsteht aus B_i, indem wir U' durch U ersetzen:



□

Das Wortproblem für CFL

Das Wortproblem für kontextfreie Grammatiken

Gegeben: Eine kontextfreie Grammatik G und ein Wort x

Gefragt: Ist $x \in L(G)$?

Frage

Wie lässt sich das Wortproblem für kontextfreie Grammatiken entscheiden?

Der CYK-Algorithmus

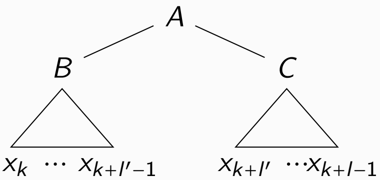
- Sei eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ und ein Wort $x = x_1 \dots x_n$ gegeben
- Falls $x = \varepsilon$ ist, können wir effizient prüfen, ob $S \Rightarrow^* \varepsilon$ gilt
- Hierzu genügt es, die Menge $E = \{A \in V \mid A \Rightarrow^* \varepsilon\}$ aller ε-ableitbaren Variablen zu berechnen und zu prüfen, ob $S \in E$ ist
- Andernfalls bringen wir G in CNF und starten den nach seinen Autoren Cocke, Younger und Kasami benannten CYK-Algorithmus
- Dieser bestimmt mittels dynamischer Programmierung für $l = 1, \dots, n$ und $k = 1, \dots, n - l + 1$ die Menge $V_{l,k}$ aller Variablen, aus denen das Teilwort $x_k \dots x_{k+l-1}$ ableitbar ist
- Dann gilt $x \in L(G) \Leftrightarrow S \in V_{n,1}$

Berechnung der Mengen $V_{l,k}$

- Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine CNF-Grammatik und sei $x \in \Sigma^+$
- Dann lassen sich die Mengen $V_{l,k} = \{A \in V \mid A \Rightarrow^* x_k \dots x_{k+l-1}\}$ wie folgt bestimmen
- Für $l = 1$ gehört A zu $V_{1,k}$, falls die Regel $A \to x_k$ existiert:

$$V_{1,k} = \{A \in V \mid A \to x_k\}$$

- Für $l > 1$ gehört A zu $V_{l,k}$, falls eine Regel $A \to BC$ und eine Zahl $l' \in \{1, \dots, l-1\}$ ex. mit $B \in V_{l',k}$ und $C \in V_{l-l',k+l'}$:



$$V_{l,k} = \{A \in V \mid \exists\, l' < l,\ B \in V_{l',k},\ C \in V_{l-l',k+l'} : A \to BC \in P\}$$

Der CYK-Algorithmus

Algorithmus CYK(G, x)

Input: CNF−Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ und Wort $x = x_1 \ldots x_n$
  for $k := 1$ **to** n **do**
    $V_{1,k} := \{A \in V \mid A \to x_k \in P\}$
  for $l := 2$ **to** n **do**
    for $k := 1$ **to** $n - l + 1$ **do**
      $V_{l,k} := \varnothing$
      for $l' := 1$ **to** $l - 1$ **do**
        for all $A \to BC \in P$ **do**
          if $B \in V_{l',k}$ **and** $C \in V_{l-l',k+l'}$ **then**
            $V_{l,k} := V_{l,k} \cup \{A\}$
  if $S \in V_{n,1}$ **then accept else reject**

Der CYK-Algorithmus lässt sich dahingehend erweitern, dass er im Fall $x \in L(G)$ auch einen Syntaxbaum T von x bestimmt

Beispiel

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$$P\colon\ S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$$
$$Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c$$

- Dann erhalten wir für das Wort $x = abb$ folgende Mengen $V_{l,k}$:

k:	1	2	3
	a	b	b
l: 1	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$
2	$\{S\}$	$\{Y'\}$	
3	$\{Y\}$		

- Wegen $S \notin V_{3,1}$ ist $x \notin L(G)$

Beispiel (Fortsetzung)

- Betrachte die CNF-Grammatik mit den Regeln

$$P\colon\ S \to AS', AY, BX, CS, c, \quad S' \to BC, \quad X \to AS, BX', a, \quad X' \to XX,$$
$$Y \to BS, AY', b, \quad Y' \to YY, \quad A \to a, \quad B \to b, \quad C \to c$$

- Dagegen gehört das Wort $y = aababb$ zu $L(G)$:

a	a	b	a	b	b
$\{X, A\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$
$\{X'\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{Y'\}$	
$\{X\}$	$\{X\}$	$\{Y\}$	$\{Y\}$		
$\{X'\}$	$\{S\}$	$\{Y'\}$			
$\{X\}$	$\{Y\}$				
$\{S\}$					

$\triangleleft$

Ein Maschinenmodell für die kontextfreien Sprachen

Frage

Wie lässt sich das Maschinenmodell des DFA erweitern, um die Sprache

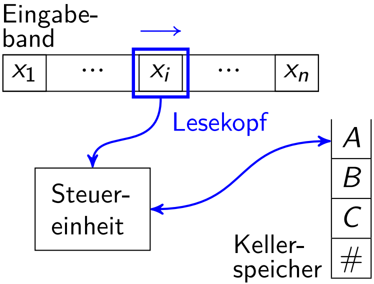
$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

und alle anderen kontextfreien Sprachen erkennen zu können?

Antwort

- Ein DFA kann Sprachen wie L nicht erkennen, da er nur seinen Zustand als Speicher benutzen kann und die Anzahl der Zustände zwar von L aber nicht von der Eingabe abhängen darf
- Um kontextfreie Sprachen erkennen zu können, genügt bereits ein Kellerspeicher (auch Stapel, engl. *stack* oder *pushdown memory*)
- Dieser erlaubt nur den Zugriff auf die höchste belegte Speicheradresse

Der Kellerautomat



- verfügt zusätzlich über einen Kellerspeicher
- kann auch ε-Übergänge machen
- hat Lesezugriff auf das aktuelle Eingabezeichen und auf das oberste Kellersymbol
- kann in jedem Rechenschritt das oberste Kellersymbol löschen und durch beliebig viele Symbole ersetzen

Kellerautomaten mit Endzuständen

Notation

Für eine Menge M bezeichne $\mathcal{P}_e(M)$ die Menge aller endlichen Teilmengen von M, d.h. $\mathcal{P}_e(M) = \{A \subseteq M \mid A \text{ ist endlich}\}$

Definition

Ein Kellerautomat mit Endzuständen (auch FS-PDA für engl. *Final State PushDown Automaton*) ist ein 7-Tupel $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, E)$. Dabei ist

- $Z \neq \varnothing$ eine endliche Menge von Zuständen
- Σ das Eingabealphabet
- Γ das Kelleralphabet
- $\delta : Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to \mathcal{P}_e(Z \times \Gamma^*)$ die Überführungsfunktion
- $q_0 \in Z$ der Startzustand
- $\# \in \Gamma$ das Kelleranfangszeichen
- $E \subseteq Z$ die Menge der Endzustände

Arbeitsweise eines Kellerautomaten

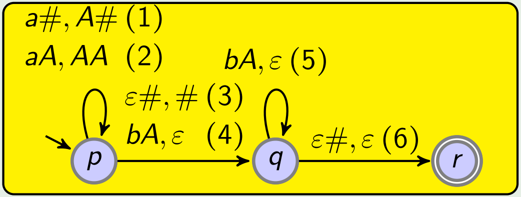
- Wenn p der momentane Zustand, A das oberste Kellerzeichen und $u \in \Sigma$ das nächste Eingabezeichen (bzw. $u = \varepsilon$) ist, so kann M im Fall $(q, B_1 \dots B_k) \in \delta(p, u, A)$
  - in den Zustand q wechseln,
  - den Lesekopf auf dem Eingabeband um $|u| \in \{0, 1\}$ Positionen vorrücken und
  - das Zeichen A aus- sowie die Zeichenfolge $B_1 \dots B_k$ einkellern (danach ist B_1 das oberste Kellerzeichen)
- Hierfür sagen wir auch, M führt die Anweisung $puA \to qB_1 \dots B_k$ aus, und sprechen im Fall
  - $k = 0$ von einer pop-Operation,
  - $k = 2$ und $B_2 = A$ von einer push-Operation, sowie
  - im Fall $u = \varepsilon$ von einem ε-Übergang
- Man beachte, dass bei leerem Keller kein Übergang mehr möglich ist

Ein Kellerautomat mit Endzuständen

Beispiel

- Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, p, \#, E)$ mit $Z = \{p, q, r\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{A, \#\}$, $E = \{r\}$ und der Überführungsfunktion

$$
\begin{aligned}
\delta : pa\# &\to pA\# && (1)\\
paA &\to pAA && (2)\\
p\varepsilon\# &\to q\# && (3)\\
pbA &\to q && (4)\\
qbA &\to q && (5)\\
q\varepsilon\# &\to r && (6)
\end{aligned}
$$



◁

Konfiguration eines Kellerautomaten

- Eine Konfiguration von M wird durch ein Tripel

$$K = (p, x_i \dots x_n, A_1 \dots A_l) \in Z \times \Sigma^* \times \Gamma^*$$

  beschrieben und besagt, dass
  - p der momentane Zustand,
  - $x_i \dots x_n$ der ungelesene Rest der Eingabe und
  - $A_1 \dots A_l$ der aktuelle Kellerinhalt ist (A_1 ist oberstes Symbol)
- In einer solchen Konfiguration K kann M eine beliebige Anweisung $puA_1 \to qB_1 \dots B_k$ mit $u \in \{\varepsilon, x_i\}$ ausführen
- Diese überführt M in die Folgekonfiguration

$$K' = (q, x_j \dots x_n, B_1 \dots B_k A_2 \dots A_l) \;\text{ mit }\; j = i + |u|$$

- Hierfür schreiben wir auch kurz $K \vdash K'$
- Eine Rechnung von M bei Eingabe x ist eine Folge von Konfigurationen

$$K_0, K_1, K_2 \; \dots \;\text{ mit }\; K_0 \vdash K_1 \vdash K_2 \; \dots \; ,$$

  wobei $K_0 = (q_0, x, \#)$ die Startkonfiguration von M bei Eingabe x ist

Akzeptanz durch Erreichen eines Endzustands

Notation

Die reflexive, transitive Hülle von $\vdash$ bezeichnen wir wie üblich mit $\vdash^*$

Definition

Die von einem Kellerautomaten $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, E)$ akzeptierte (oder erkannte) Sprache ist

$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists\, q \in E, \alpha \in \Gamma^* : (q_0, x, \#) \vdash^* (q, \varepsilon, \alpha)\}$$

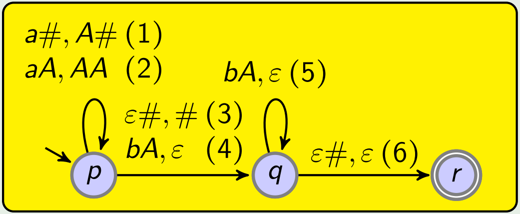
- Ein Kellerautomat M mit Endzuständen akzeptiert also genau dann ein Wort x, wenn es bei dieser Eingabe eine Rechnung gibt, bei der M
  - alle Eingabezeichen liest und
  - einen Endzustand $q \in E$ erreicht

Ein Kellerautomat mit Endzuständen

Beispiel (Fortsetzung)

- Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, p, \#, E)$ mit $Z = \{p, q, r\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{A, \#\}$, $E = \{r\}$ und der Überführungsfunktion

$$\begin{aligned} \delta: pa\# &\to pA\# && (1)\\ paA &\to pAA && (2)\\ p\varepsilon\# &\to q\# && (3)\\ pbA &\to q && (4)\\ qbA &\to q && (5)\\ q\varepsilon\# &\to r && (6) \end{aligned}$$



- Dann akzeptiert M die Eingabe $x = aabb$:

$$(p, aabb, \#) \underset{(1)}{\vdash} (p, abb, A\#) \underset{(2)}{\vdash} (p, bb, AA\#) \underset{(4)}{\vdash} (q, b, A\#)$$
$$\underset{(5)}{\vdash} (q, \varepsilon, \#) \underset{(6)}{\vdash} (r, \varepsilon, \varepsilon)$$

◁

Akzeptanz durch Leeren des Kellers

Es gibt auch ein Akzeptanzkriterium, das keine Endzustände erfordert.

Definition

- Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#)$ ein Kellerautomat ohne Endzustandsmenge
- Die von M durch Leeren des Kellers akzeptierte (oder erkannte) Sprache ist

$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists\, p \in Z \colon (q_0, x, \#) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)\}$$

- Wir nennen M auch einen ES-PDA (für engl. *Empty Stack PushDown Automaton*) oder einfach PDA

- Ein PDA M akzeptiert also genau dann eine Eingabe, wenn es eine Rechnung gibt, bei der M alle Eingabezeichen liest und den Keller leert
- Es gilt (siehe Übungen)

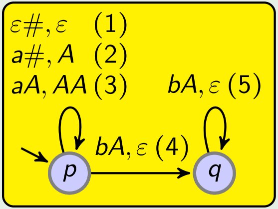
$$\{L(M) \mid M \text{ ist ein FS-PDA}\} = \{L(M) \mid M \text{ ist ein ES-PDA}\}$$

Ein PDA für die Sprache $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

Beispiel

- Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, p, \#)$ mit $Z = \{p, q\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{A, \#\}$ und

$$\delta : p\varepsilon\# \to p\ (1) \quad pa\# \to pA\ (2) \quad paA \to pAA\ (3)$$
$$pbA \to q\ (4) \quad qbA \to q \quad (5)$$



- Dann akzeptiert M die Eingabe $x = aabb$:

$$(p, aabb, \#) \underset{(2)}{\vdash} (p, abb, A) \underset{(3)}{\vdash} (p, bb, AA) \underset{(4)}{\vdash} (q, b, A) \underset{(5)}{\vdash} (q, \varepsilon, \varepsilon)$$

- Allgemeiner akzeptiert M das Wort $x = a^n b^n$ mit folgender Rechnung:

$n = 0$: $(p, \varepsilon, \#) \underset{(1)}{\vdash} (p, \varepsilon, \varepsilon)$

$n \geq 1$: $(p, a^n b^n, \#) \underset{(2)}{\vdash} (p, a^{n-1} b^n, A) \underset{(3)}{\vdash}{}^{n-1} (p, b^n, A^n)$

$$\underset{(4)}{\vdash} (q, b^{n-1}, A^{n-1}) \underset{(5)}{\vdash}{}^{n-1} (q, \varepsilon, \varepsilon)$$

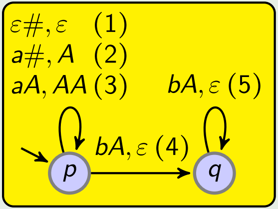
- Dies zeigt, dass M alle Wörter der Form $a^n b^n$, $n \geq 0$, akzeptiert

Ein PDA für die Sprache $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

Beispiel (Fortsetzung)

- Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, p, \#)$ mit $Z = \{p, q\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{A, \#\}$ und

$$\begin{array}{llll} \delta: p\varepsilon\# \to p\ (1) & pa\# \to pA\ (2) & paA \to pAA\ (3) \\ \quad pbA \to q\ (4) & qbA \to q\quad (5) & \end{array}$$



- Es gilt auch die umgekehrte Inklusion:

  alle Wörter $x = x_1 \ldots x_m \in L(M)$ haben die Form $x = a^n b^n$

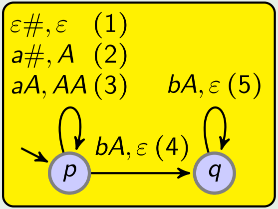
- Ausgehend von der Startkonfiguration $(p, x, \#)$ sind nämlich nur die Anweisungen (1) oder (2) ausführbar
- Führt M zuerst Anweisung (1) aus, so wird der Keller geleert
- Daher kann M in diesem Fall nur das leere Wort $x = \varepsilon = a^0 b^0$ akzeptieren
- Falls M mit Anweisung (2) beginnt, muss M später mittels Anweisung (4) in den Zustand q gelangen, da sonst der Keller nicht geleert wird

Ein PDA für die Sprache $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

Beispiel (Schluss)

- Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, p, \#)$ mit $Z = \{p, q\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{A, \#\}$ und

$$\begin{aligned}\delta: p\varepsilon\# &\to p \ (1) \quad pa\# \to pA \ (2) \quad paA \to pAA \ (3)\\ pbA &\to q \ (4) \quad qbA \to q \quad (5)\end{aligned}$$



- Falls M mit Anweisung (2) beginnt, muss M später mittels Anweisung (4) in den Zustand q gelangen, da sonst der Keller nicht geleert wird
- Dies geschieht, sobald M nach Lesen von $n \geq 1$ a's das erste b liest:

$$\begin{aligned}(p, x_1 x_2 \dots x_m, \#) &\underset{(2)}{\vdash} (p, x_2 \dots x_n x_{n+1} \dots x_m, A)\\ &\underset{(3)}{\vdash}^{n-1} (p, x_{n+1} x_{n+2} \dots x_m, A^n) \underset{(4)}{\vdash} (q, x_{n+2} \dots x_m, A^{n-1})\end{aligned}$$

  mit $x_1 = x_2 = \dots = x_n = a$ und $x_{n+1} = b$
- Damit der Keller nach dem Lesen von x_m leer ist, muss M nun noch genau $n-1$ b's lesen, weshalb $m = 2n$ und $x = a^n b^n$ folgt. $\triangleleft$

Ein Maschinenmodell für die Klasse CFL

Ziel

Als nächstes wollen wir zeigen, dass PDAs genau die kontextfreien Sprachen erkennen

Satz

CFL = $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\}$

Beweis von CFL $\subseteq \{L(M) \mid M$ ist ein PDA$\}$

Idee:

Konstruiere zu einer kontextfreien Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ einen PDA $M = (\{z\}, \Sigma, \Gamma, \delta, z, S)$ mit $\Gamma = V \cup \Sigma$ und folgenden Anweisungen:

- für jede Regel $A \to_G \alpha$ die Anweisung $z\varepsilon A \to z\alpha$
- für jedes Zeichen $a \in \Sigma$ die Anweisung $zaa \to z\varepsilon$

Beweis von CFL $\subseteq \{L(M) \mid M$ ist ein PDA$\}$

Beispiel

- Betrachte die Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$ mit den Regeln

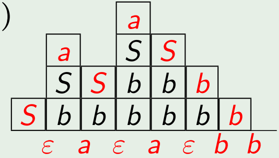
$$P\colon S \to aSb \;\; (1) \quad S \to \varepsilon \;\; (2)$$

- Der zugehörige PDA besitzt dann die Anweisungen

$$\delta: \; zaa \to z \;\; (0) \quad zbb \to z \;\; (0') \quad z\varepsilon S \to zaSb \;\; (1') \quad z\varepsilon S \to z \;\; (2')$$

- Der Linksableitung $\underline{S} \underset{(1)}{\Rightarrow} a\underline{S}b \underset{(1)}{\Rightarrow} aa\underline{S}bb \underset{(2)}{\Rightarrow} aabb$ in G entspricht dann die Rechnung

$$(z, aabb, S) \underset{(1')}{\vdash} (z, aabb, aSb) \underset{(0)}{\vdash} (z, abb, Sb)$$
$$\underset{(1')}{\vdash} (z, abb, aSbb) \underset{(0)}{\vdash} (z, bb, Sbb)$$
$$\underset{(2')}{\vdash} (z, bb, bb) \underset{(0')}{\vdash} (z, b, b) \underset{(0')}{\vdash} (z, \varepsilon, \varepsilon)$$



von M und umgekehrt ◁

Beweis von CFL $\subseteq \{L(M) \mid M$ ist ein PDA$\}$

Idee:

Konstruiere zu einer kontextfreien Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ einen PDA $M = (\{z\}, \Sigma, \Gamma, \delta, z, S)$ mit $\Gamma = V \cup \Sigma$ und folgenden Anweisungen:

- für jede Regel $A \to_G \alpha$ die Anweisung $z\varepsilon A \to z\alpha$
- für jedes Zeichen $a \in \Sigma$ die Anweisung $zaa \to z\varepsilon$

- M versucht also, eine Linksableitung für die Eingabe x zu finden
- Da M hierbei den Syntaxbaum von oben nach unten aufbaut, wird M als *Top-Down Parser* bezeichnet
- Zudem gilt $S \Rightarrow_L^m x_1 \ldots x_n$ gdw $(z, x_1 \ldots x_n, S) \vdash^{m+n} (z, \varepsilon, \varepsilon)$
- Daher folgt

$$x \in L(G) \Leftrightarrow S \Rightarrow_L^* x \Leftrightarrow (z, x, S) \vdash^* (z, \varepsilon, \varepsilon) \Leftrightarrow x \in L(M)$$

$\square$

Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \mathrm{CFL}$

Vorbetrachtung:

- Die Konstruktion eines PDA M aus einer kontextfreien Grammatik lässt sich leicht umdrehen, falls M nur einen Zustand hat
- Zu einem solchen PDA $M = (\{z\}, \Sigma, \Gamma, \delta, z, \#)$ lässt sich nämlich wie folgt eine kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, X_{\#})$ mit $L(G) = L(M)$ konstruieren:
  - Die Variablenmenge von G ist $V = \{X_A \mid A \in \Gamma\}$
    (wir können auch o.B.d.A. $\Sigma \cap \Gamma = \varnothing$ annehmen und $V = \Gamma$ setzen)
  - die Startvariable von G ist $X_{\#}$ und
  - P enthält für jede Anweisung $zuA \to zA_1 \dots A_k$ von M die Regel

    $$X_A \to uX_{A_1} \dots X_{A_k}$$
- Dann lässt sich jede akzeptierende Rechnung $(z, x, \#) \vdash^m (z, \varepsilon, \varepsilon)$ von $M(x)$ der Länge m direkt in eine Linksableitung $X_{\#} \Rightarrow_L^m x$ in G der Länge m transformieren und umgekehrt

Beweis von $\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\} \subseteq \mathrm{CFL}$

Beispiel

- Betrachte den PDA $M = (\{z\}, \{a, b\}, \{S, a, b\}, \delta, z, S)$ mit

  $$\delta: \; zaa \to z \;\; (1) \quad zbb \to z \;\; (2) \quad z\varepsilon S \to zaSb \;\; (3) \quad z\varepsilon S \to z \;\; (4)$$

  den wir aus der Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$ mit den beiden Regeln $S \to aSb, \varepsilon$ konstruiert haben
- Dann führt M auf die Grammatik $G' = (\{X_S, X_a, X_b\}, \{a, b\}, P', X_S)$ mit

  $$P': X_a \to a \;\; (1') \quad X_b \to b \;\; (2') \quad X_S \to X_a X_S X_b \;\; (3') \quad X_S \to \varepsilon \;\; (4')$$

- Der Rechnung

  $$(z, ab, S) \underset{(3)}{\vdash} (z, ab, aSb) \underset{(1)}{\vdash} (z, b, Sb) \underset{(4)}{\vdash} (z, b, b) \underset{(2)}{\vdash} (z, \varepsilon, \varepsilon)$$

  von M entspricht dann folgende Linksableitung in G' (und umgekehrt):

  $$\underline{X_S} \underset{(3')}{\Rightarrow} \underline{X_a} X_S X_b \underset{(1')}{\Rightarrow} a \underline{X_S} X_b \underset{(4')}{\Rightarrow} a \underline{X_b} \underset{(2')}{\Rightarrow} ab$$

- Man beachte, dass G' eine aufgeblähte Variante von G ist. ◁

Simulation eines PDA durch einen single-state PDA

Idee:

Transformiere einen PDA $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#)$ wie folgt in einen äquivalenten PDA $M' = (\{z\}, \Sigma, \Gamma', \delta', z, S)$ mit nur einem Zustand:

- M' simuliert M schrittweise und speichert dabei im obersten Kellersymbol $X_{pAq} \in \Gamma' = \{S\} \cup \{X_{pAq} \mid A \in \Gamma,\ p, q \in Z\}$
  - den aktuellen Zustand p von M
  - das oberste Kellersymbol A von M, sowie
  - den Zustand q, den M nach Freigabe der aktuell mit A belegten obersten Speicherzelle annimmt
- Die Überführungsfunktion δ' von M' enthält folgende Anweisungen:
  - für jeden Zustand $q \in Z$ die Anweisung $z\varepsilon S \to zX_{q_0\#q}$ und
  - für jede Anweisung $p_0uA_0 \to p_1A_1 \ldots A_k$, $k \geq 0$, von M und für jede Folge von k Zuständen $p_2, \ldots, p_{k+1} \in Z$ die Anweisung

$$zuX_{p_0A_0p_{k+1}} \to zX_{p_1A_1p_2} \ldots X_{p_kA_kp_{k+1}}$$

Simulation eines PDA durch einen single-state PDA

Idee (Fortsetzung):

- Dabei rät M' durch die Wahl der Anweisung
  - $z\varepsilon S \to zX_{q_0\#q}$ den Zustand q, den M nach Freigabe der untersten Speicherzelle (also nach Leeren des Kellers) annimmt
- Zudem rät M' im Fall $k \geq 2$ durch die Wahl der Anweisung
  - $zuX_{p_0A_0p_{k+1}} \to zX_{p_1A_1p_2} \dots X_{p_kA_kp_{k+1}}$ für $i = 1, \dots, k-1$ die Zustände p_{i+1}, die M nach Freigabe der mit A_i belegten Zelle annimmt (der Zustand p_{k+1} wurde bereits geraten, da A_k die Zelle von A_0 belegt)
- Im Fall $k = 1$ gibt M' beim Ausführen der Anweisung
  - $zuX_{p_0A_0p_2} \to zX_{p_1A_1p_2}$ lediglich den (zuvor geratenen) Zustand p_2, der nach Freigabe der mit A_0 belegten Zelle angenommen werden soll, von $X_{p_0A_0p_2}$ an $X_{p_1A_1p_2}$ weiter
- Im Fall $k = 0$ verifiziert M' schließlich beim Ausführen der Anweisung
  - $zuX_{p_0A_0p_1} \to z$, dass M ausgehend von p_0 den (zuvor geratenen) Zustand p_1 nach Freigabe der mit A_0 belegten Zelle tatsächlich annehmen kann (sonst würde es diese Anweisung in δ' nicht geben)

Simulation eines PDA durch einen single-state PDA

Beispiel

- Betrachte den PDA $M = (\{p,q\},\{a,b\},\{A,\#\},\delta,p,\#)$ mit den Anweisungen

$$\begin{array}{llll} \delta: p\varepsilon\# \to q \quad (1) & pa\# \to pA \quad (2) & paA \to pAA \quad (3) \\ \quad pbA \to q \quad (4) & qbA \to q \quad (5) & \end{array}$$

- Der zugehörige PDA $M' = (\{z\},\{a,b\},\Gamma',\delta',z,S)$ mit nur einem Zustand hat dann das Kelleralphabet

$$\Gamma' = \{S, X_{p\#p}, X_{p\#q}, X_{q\#p}, X_{q\#q}, X_{pAp}, X_{pAq}, X_{qAp}, X_{qAq}\}$$

Simulation eines PDA durch einen single-state PDA

Beispiel (Fortsetzung)

- Zudem enthält M' neben den beiden Anweisungen $z\varepsilon S \to zX_{p\#p}$ (0) und $z\varepsilon S \to zX_{p\#q}$ (0′) die folgenden Anweisungen:

Anweisung von M		k	$p_2, \ldots, p_{k+1}$	zugeh. Anweisungen von M'	
$p\varepsilon\# \to q$	(1)	0	-	$z\varepsilon X_{p\#q} \to z$	(1′)
$pa\# \to pA$	(2)	1	p	$zaX_{p\#p} \to zX_{pAp}$	(2′)
			q	$zaX_{p\#q} \to zX_{pAq}$	(2″)
$paA \to pAA$	(3)	2	p, p	$zaX_{pAp} \to zX_{pAp}X_{pAp}$	(3′)
			p, q	$zaX_{pAq} \to zX_{pAp}X_{pAq}$	(3″)
			q, p	$zaX_{pAp} \to zX_{pAq}X_{qAp}$	(3‴)
			q, q	$zaX_{pAq} \to zX_{pAq}X_{qAq}$	(3⁗)
$pbA \to q$	(4)	0	-	$zbX_{pAq} \to z$	(4′)
$qbA \to q$	(5)	0	-	$zbX_{qAq} \to z$	(5′)

Simulation eines PDA durch einen single-state PDA

Beispiel (Fortsetzung)

- Zudem enthält M' neben den beiden Anweisungen $\cancel{z\varepsilon S \to zX_{p\#p}\ (0)}$ und $z\varepsilon S \to zX_{p\#q}$ $(0')$ die folgenden Anweisungen:

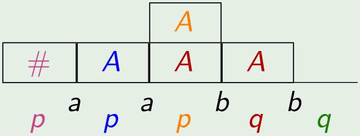
Anweisung von M		k	$p_2, \ldots, p_{k+1}$	zugeh. Anweisungen von M'	
$p\varepsilon\# \to q$	(1)	0	-	$z\varepsilon X_{p\#q} \to z$	$(1')$
$pa\# \to pA$	(2)	1	p	$\cancel{zaX_{p\#p} \to zX_{pAp}}$	$\cancel{(2')}$
			q	$zaX_{p\#q} \to zX_{pAq}$	$(2'')$
$paA \to pAA$	(3)	2	p, p	$\cancel{zaX_{pAp} \to zX_{pAp}X_{pAp}}$	$\cancel{(3')}$
			p, q	$\cancel{zaX_{pAq} \to zX_{pAp}X_{pAq}}$	$\cancel{(3'')}$
			q, p	$\cancel{zaX_{pAp} \to zX_{pAq}X_{qAp}}$	$\cancel{(3''')}$
			q, q	$zaX_{pAq} \to zX_{pAq}X_{qAq}$	$(3'''')$
$pbA \to q$	(4)	0	-	$zbX_{pAq} \to z$	$(4')$
$qbA \to q$	(5)	0	-	$zbX_{qAq} \to z$	$(5')$

Simulation eines PDA durch einen single-state PDA

Beispiel (Schluss)

- Der (akzeptierenden) Rechnung

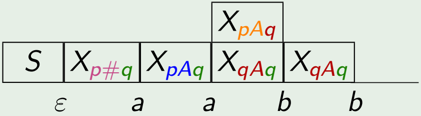
$$(p, aabb, \#) \underset{(2)}{\vdash} (p, abb, A) \underset{(3)}{\vdash} (p, bb, AA) \underset{(4)}{\vdash} (q, b, A) \underset{(5)}{\vdash} (q, \varepsilon, \varepsilon)$$



von M entspricht dann folgende Rechnung von M':

$$(z, aabb, S) \underset{(0')}{\vdash} (z, aabb, X_{p\#q}) \underset{(2'')}{\vdash} (z, abb, X_{pAq})$$

$$\underset{(3'''')}{\vdash} (z, bb, X_{pAq}X_{qAq}) \underset{(4')}{\vdash} (z, b, X_{qAq}) \underset{(5')}{\vdash} (z, \varepsilon, \varepsilon)$$



◁

Simulation eines PDA durch einen single-state PDA

- Es bleibt noch zu zeigen, dass der zu einem PDA $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#)$ konstruierte PDA $M' = (\{z\}, \Sigma, \Gamma', \delta', z, S)$ mit dem Kelleralphabet $\Gamma' = \{S\} \cup \{X_{pAq} \mid p, q \in Z, A \in \Gamma\}$, der
  - für jeden Zustand $q \in Z$ die Anweisung $z\varepsilon S \to zX_{q_0\#q}$ sowie
  - für jede Anweisung $puA \to p_1 A_1 \dots A_k$, $k \geq 0$, von M und jede Folge $p_2, \dots, p_{k+1}$ die Anweisung $zuX_{pAp_{k+1}} \to zX_{p_1A_1p_2} \dots X_{p_kA_kp_{k+1}}$

  enthält, die gleiche Sprache wie M akzeptiert
- Hierzu zeigen wir, dass jede Rechnung $(p, x, A) \vdash^m (q, \varepsilon, \varepsilon)$ von M einer Rechnung $(z, x, X_{pAq}) \vdash^m (z, \varepsilon, \varepsilon)$ von M' entspricht und umgekehrt
- Aus dieser Äquivalenz folgt dann sofort $L(M) = L(M')$:

$$
\begin{aligned}
x \in L(M) \quad &\Leftrightarrow \quad M \text{ hat für ein } q \in Z \text{ eine akzeptierende Rechnung} \\
&\qquad (q_0, x, \#) \vdash^m (q, \varepsilon, \varepsilon) \text{ der Länge } m \geq 1 \\
&\Leftrightarrow \quad M' \text{ hat für ein } q \in Z \text{ eine akzeptierende Rechnung} \\
&\qquad (z, x, S) \vdash (z, x, X_{q_0\#q}) \vdash^m (z, \varepsilon, \varepsilon) \text{ mit } m \geq 1 \\
&\Leftrightarrow \quad x \in L(M')
\end{aligned}
$$