Probeklausur

Besprechung ausgewählter Aufgaben (außer 5) mit Blatt 14

Hinweise zur Klausur:

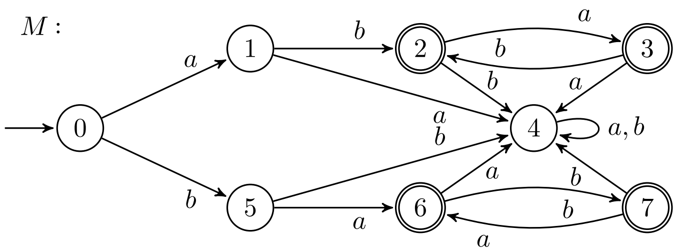
- Klausurtermin: 2. 3. 2023 um 12 Uhr (Einlass - mit Fragen etc. kann die Klausur bis 15.00 Uhr andauern.)
- Nachklausurtermin: 11. 4. 2023 um 9 Uhr (Einlass); die Nachklausur kann ohne Teilnahme an der ersten Klausur geschrieben werden.
- Eine Fragestunde wird am 21.2.2023 ab 10.00 Uhr per Zoom stattfinden. Dort können auch Fragen zur aktuellen oder alten Probeklausuren gestellt werden.
- Teilnahme nur mit Übungsschein (d.h. 190 schriftliche Punkte + 12 bestandene MC-Tests ab Blatt 2 oder alter ÜS)
- Anmeldung bis 29.1.2023 (Klausur) bzw. bis 19.3.2023 (Nachklausur). Anmeldungen ohne ÜS werden schlussendlich annulliert.
- Die Bearbeitungszeit wird 120 Minuten betragen.
- Als Hilfsmittel sind nur zugelassen: eigene Notizen (per Hand/gedruckt inkl. Kopien aus Büchern), Skript. **Nicht zugelassen:** jegliche elektronischen Hilfsmittel, ganze Bücher, Leitz-Ordner u.ä.
- Bitte halten Sie einen gültigen **amtlichen** Lichtbildausweis bereit. Als **amtlicher** Lichtbildausweis gilt (u.a.): Personalausweis, Reisepass oder Führerschein, ein Foto auf der CampusCard genügt **nicht**.
- Diese Probeklausur hat eine etwas andere Zusammensetzung als die Klausur.

Aufgabe 1 **_28 Punkte_**

(a) Sei A eine reguläre Sprache mit Pumpingzahl $\ell(A)$ und $B \subseteq A$ eine Sprache mit Pumpingzahl $\ell(B)$. Entscheiden Sie für jeden der folgenden Fälle (1-5) ob (i) B immer regulär ist, (ii) B regulär sein kann, (iii) B niemals regulär ist, oder ob (iv) dieser Fall nicht auftreten kann. *(5 Punkte)*

(1) A ist endlich
(2) $\ell(B) \leq \ell(A)$
(3) $\ell(B) > \ell(A)$
(4) $\ell(B) = \infty$
(5) $\ell(B) = \infty$ und A ist endlich

(b) Wandeln Sie den abgebildeten DFA M mit dem Verfahren aus der Vorlesung in einen äquivalenten Minimal-DFA M' um. Geben Sie dabei eine Tabelle mit Unterscheidern minimaler Länge an (sofern existent). *(7 Punkte)*



(c) Sei maxwdh(y, x) die größte Zahl k, so dass y^k Teilwort von x ist. Zeigen Sie, dass folgende Sprache regulär ist: *(8 Punkte)*

$$L_1 := \{x \in \{a, b\}^* \mid \text{maxwdh}(a, x) \geq 2 \wedge \text{maxwdh}(b, x) \geq 2\}$$

(d) Zeigen Sie, dass folgende Sprache nicht regulär ist: *(8 Punkte)*

$$L_2 := \{x \in \{a, b\}^* \mid \text{maxwdh}(a, x) = \text{maxwdh}(b, x) \geq 2022\}$$

Aufgabe 2 **_14 Punkte_**

(a) Lokalisieren Sie folgende Sprachen möglichst exakt innerhalb der Chomsky-Hierarchie, d.h. geben Sie ohne Begründung jeweils das größte $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ an, sodass die Sprache L_j eine Typ-i-Sprache ist. *(8 Punkte)*

(1) $L_1 = \left\{a^n b^m \,\middle|\, n, m \in \mathbb{N}, m - n \text{ ist gerade}\right\}$
(2) $L_2 = \left\{a^n b^m \,\middle|\, n, m \in \mathbb{N}, m - n \text{ ist positiv}\right\}$
(3) $L_3 = \left\{a^n b^m c^l \,\middle|\, l = m - n\right\}$
(4) $L_4 = L(G); G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$ mit
$P : S \to ASB, \varepsilon; AA \to a; B \to b.$

(b) Betrachten Sie die Sprache $L = \left\{w \in \{a, b, c\}^* \,\middle|\, \#_a(w) = \#_b(w) = \#_c(w)\right\}$. Geben Sie, ohne Begründung, drei Teilsprachen L_{reg}, L_{cfl}, $L_{csl} \subseteq L$ an, so dass $L_{reg} \in \mathsf{REG}$, $L_{cfl} \in \mathsf{CFL} \setminus \mathsf{REG}$, $L_{csl} \in \mathsf{CSL} \setminus \mathsf{CFL}$ gilt. *(6 Punkte)*

Aufgabe 3 **_24 Punkte_**

(a) Sei $\mathsf{CFL}_1 = \{L(M) \mid M$ ist ein PDA mit nur einem Zustand$\}$. Gilt dann $\mathsf{CFL}_1 \subsetneq \mathsf{CFL}$, $\mathsf{CFL}_1 \supsetneq \mathsf{CFL}$ oder $\mathsf{CFL}_1 = \mathsf{CFL}$? Begründen Sie. *(2 Punkte)*

(b) Sei $G = (\{S, A, B, C, D\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit

$$P:\quad \begin{array}{lll} S \to ASC, B, bb & A \to aa & C \to c, cD \\ B \to \varepsilon, b, BB & D \to \varepsilon, c & \end{array}$$

Erzeugen Sie eine Grammatik G' mit $L(G') = L(G)\setminus\{\varepsilon\}$ in Chomsky-Normalform indem Sie die Schritte in folgender Reihenfolge durchführen und das Ergebnis nach jedem Schritt angeben: Terminale ersetzen, lange rechte Seiten auflösen, ε-Regeln entfernen, Variablenumbenennungen entfernen. *(8 Punkte)*

(c) Geben Sie eine Linksableitung in der Grammatik G und den dazugehörigen Syntaxbaum für das Wort $x = aabbc$ an. *(5 Punkte)*

(d) Skizzieren Sie in Worten eine c-beschränkte k-NTM für $L_4 = \left\{a^{n^2} \mid n \geq 1\right\}$.
(*Hinweis:* Eine c-beschränkte k-NTM besucht bei Eingaben der Länge n höchstens $cn + c$ Bandfelder.) *(8 Punkte)*

Aufgabe 4 **_24 Punkte_**

Sei $N = (\{p, q, \ell, x, e\}, \{0, 1\}, \{0, 1, X, \sqcup\}, \delta, p, \{e\})$ eine 1-NTM mit

$$\delta:\quad \begin{array}{llll} p0 \to qXR, & p1 \to p1R, & q0 \to q0R, & q1 \to q1R, \\ q\sqcup \to \ell\sqcup L, & \ell 1 \to \ell 1 L, & \ell 0 \to x1L, & x0 \to x0L, \\ x1 \to x1L, & xX \to p1R, & p\sqcup \to e\sqcup N, & \ell X \to \ell X N. \end{array}$$

(a) Eine 2-DTM M befinde sich in der Konfiguration $K = (p, \varepsilon, a, bc, ab, c, \varepsilon)$ und führt die Anweisung $pac \to qbbRN$ aus. Beschreiben Sie, was M dabei tut und geben Sie die Folgekonfiguration K' an. *(3 Punkte)*

(b) Begründen Sie, warum N deterministisch ist. *(2 Punkte)*

(c) Geben Sie die Rechnungen von $N(0)$ (N bei Eingabe 0) bis zur 4. und die von $N(00)$ bis zur 8. Konfiguration an, Startkonfiguration jeweils mitgezählt. Die Rechnung von $N(00)$ beginnt mit $p00 \vdash Xq0$. *(5 Punkte)*

(d) Geben Sie $L(N)$ ohne Begründung an. *(2 Punkte)*

(e) Sei f die von N berechnete Funktion. Ist f eine totale Funktion von $\{0,1\}^*$ nach $\{0,1\}^*$? Begründen Sie. *(2 Punkte)*

(f) Sind folgende Aussagen korrekt? Begründen Sie. *(10 Punkte)*

(1) $L_1 \in \mathsf{RE}$ mit $L_1 = \left\{w \in \{0,1\}^* \mid M_w(w) \text{ schreibt nie } \sqcup\right\}$.

(2) $L_2 \in \mathsf{RE}$ mit $L_2 = \left\{w \in \{0,1\}^* \mid M_w(w) \text{ liest nie } \sqcup\right\}$.

Hinweis: Wir sagen M *liest* ein $a \in \Gamma$ und *schreibt* ein $a' \in \Gamma$, falls M eine Anweisung der Form $za \to z'a'D$ ausführt ($a = a'$ ist möglich).

Aufgabe 5 ***30 Punkte***

(a) Betrachten Sie die Formeln $F = (x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_1) \wedge (\neg x_3 \vee x_2)$ sowie $G = (x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_1) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee x_1)$. Geben Sie jeweils an, ob F bzw. G erfüllbar ist und begründen Sie jeweils Ihre Antwort. *(5 Punkte)*

(b) Klassifizieren Sie folgende Probleme für boolesche Formeln entsprechend ihrer Komplexität als effizient lösbar (d. h. in P) bzw. als NP-hart oder co-NP-hart (und damit vermutlich nicht effizient lösbar). Begründen Sie. *(8 Punkte)*

(1) $L_1 = \{F \mid F \text{ hat mindestens zwei erfüllende Belegungen}\}$

(2) $L_2 = \{F \mid F \text{ hat eine erfüllende Belegung mit höchstens 2023 Einsen}\}$

(c) Sei $A \neq \emptyset$ mit $A \in \mathsf{P}$ und sei B eine co -NP-vollständige Sprache, also $\overline{B}$ ist NP-vollständig. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen unter der Annahme $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$: *(8 Punkte)*

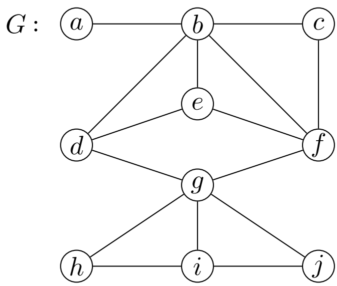
(1) $A \leq^p \emptyset$

(2) $A \leq^p B$

(3) $A \leq^p \overline{B}$

(4) $B \leq^p A$

(d) Betrachten Sie den untenstehenden Graphen G.



Hat der Graph G einen Hamiltonpfad bzw. einen Hamiltonkreis? Begründen Sie jeweils. *(4 Punkte)*

(e) Betrachten Sie das Problem HamQuarterPath: Entscheide für einen gegebenen Graphen G mit n Knoten, ob G einen Pfad mit mindestens $\frac{n}{4}$ Knoten enthält. Zeigen Sie, dass HamQuarterPath NP-hart ist. *(5 Punkte)*