Probeklausur: Lösungsvorschläge

Lösungen geTEXt von Robert Bredereck, Frank Fuhlbrück, Falko Hegerfeld, Florian Nelles

Besprechung ausgewählter Aufgaben (außer 5) mit Blatt 14

Aufgabe 1 ***28 Punkte***

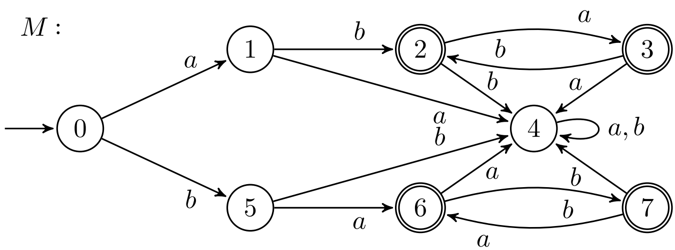
(a) Sei A eine reguläre Sprache mit Pumpingzahl $\ell(A)$ und $B \subseteq A$ eine Sprache mit Pumpingzahl $\ell(B)$. Entscheiden Sie für jeden der folgenden Fälle (1-5) ob (i) B immer regulär ist, (ii) B regulär sein kann, (iii) B niemals regulär ist, oder ob (iv) dieser Fall nicht auftreten kann. *(5 Punkte)*

(1) A ist endlich
(2) $\ell(B) \le \ell(A)$
(3) $\ell(B) > \ell(A)$
(4) $\ell(B) = \infty$
(5) $\ell(B) = \infty$ und A ist endlich

Lösung:

(1) B ist immer regulär (auch endlich).
(2) B kann regulär sein (reg: $B = A = \{a\}$, nicht reg: $B = \left\{a^i b^j c^k \,\middle|\, i = 0 \vee j = k\right\}$).
(3) B kann regulär sein ($A = \Sigma^* \Rightarrow \ell(A) = 1$, reg: $B = L((ab)^*)$, nicht reg: $B = \{a^n b^n\}$).
(4) B ist niemals regulär (Pumpinglemma).
(5) Dieser Fall kann nicht auftreten (B endlich, d.h. $\ell = \max(\left\{|x| + 1 \,\middle|\, x \in B\right\} \cup \{0\}) \le \infty$).

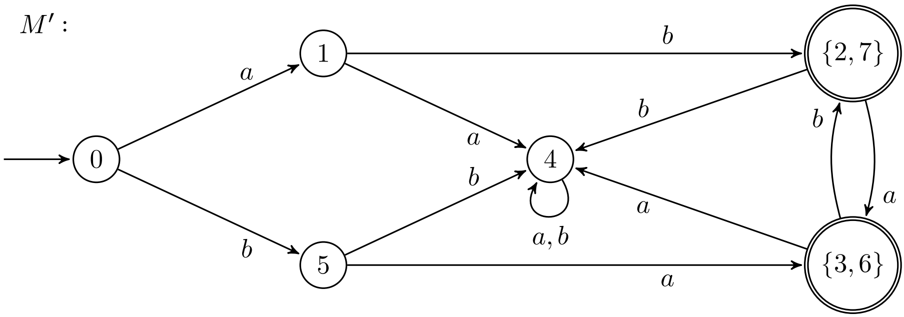
(b) Wandeln Sie den abgebildeten DFA M mit dem Verfahren aus der Vorlesung in einen äquivalenten Minimal-DFA M' um. Geben Sie dabei eine Tabelle mit Unterscheidern minimaler Länge an (sofern existent). *(7 Punkte)*



Lösung:
Bei zwei durch Komma getrennten minimalen Separatoren, reicht die Angabe von einem:

1	b						
2	ε	ε					
3	ε	ε	a,b				
4	ab,ba	b	ε	ε			
5	a	a,b	ε	ε	a		
6	ε	ε	a,b	-	ε	ε	
7	ε	ε	-	a,b	ε	ε	a,b
	0	1	2	3	4	5	6

M' :



(c) Sei $\mathrm{maxwdh}(y, x)$ die größte Zahl k, sodass y^k Teilwort von x ist. Zeigen Sie, dass folgende Sprache regulär ist: *(8 Punkte)*

$$L_1 := \{x \in \{a, b\}^* \mid \mathrm{maxwdh}(a, x) \geq 2 \wedge \mathrm{maxwdh}(b, x) \geq 2\}$$

Lösung:
Sei $L_{1,c} = \left\{x \in \{a, b\}^* \,\middle|\, \mathrm{maxwdh}(c, x) \geq 2\right\}$ für $c \in \{a, b\}$. Offensichtlich gilt $L_{1,c} = L((a|b)^* cc(a|b)^*) \in \mathsf{REG}$. Wegen $L_1 = L_{1,a} \cap L_{1,b}$ und Abgeschlossenheit von REG unter Schnitt ist auch $L_1 \in \mathsf{REG}$.
Alternativ lässt sich auch ein DFA/NFA/Grammatik angeben, dessen/deren Korrektheit dann aber zu zeigen ist. Zudem ist es möglich alle Restklassen von $\sim_{L_1}$ zu bestimmen und so die Endlichkeit des Index zu zeigen.

(d) Zeigen Sie, dass folgende Sprache nicht regulär ist: *(8 Punkte)*

$$L_2 := \{x \in \{a, b\}^* \mid \mathrm{maxwdh}(a, x) = \mathrm{maxwdh}(b, x) \geq 2022\}$$

Lösung:
Betrachte die Wörter a^n mit $n \geq 2022$. Alle sind paarweise bezüglich $\sim_{L_2}$ verschieden: Sei $2022 \leq n < m$, dann ist $a^n b^n \in L_2$, aber $a^n b^m \notin L_2$, da bei letzterem $\mathrm{maxwdh}(b, a^n b^m) = m > n = \mathrm{maxwdh}(a, a^n b^m)$ gilt.

Aufgabe 2 *14 Punkte*

(a) Lokalisieren Sie folgende Sprachen möglichst exakt innerhalb der Chomsky-Hierarchie, d.h. geben Sie ohne Begründung jeweils das größte $i \in \{0,1,2,3\}$ an, sodass die Sprache L_j eine Typ-i-Sprache ist. *(8 Punkte)*

(1) $L_1 = \left\{a^n b^m \,\middle|\, n,m \in \mathbb{N}, m-n \text{ ist gerade}\right\}$

(2) $L_2 = \left\{a^n b^m \,\middle|\, n,m \in \mathbb{N}, m-n \text{ ist positiv}\right\}$

(3) $L_3 = \left\{a^n b^m c^l \,\middle|\, l = m-n\right\}$

(4) $L_4 = L(G); G = (\{S,A,B\}, \{a,b\}, P, S)$ mit
$P : S \to ASB, \varepsilon; AA \to a; B \to b$.

Lösung:

(1) $i = 3$, also regulär. $\sim_{L_1}$ hat nur 2 Äquivalenzklassen: L_1 und $\overline{L_1}$.

(2) $i = 2$, also kontextfrei aber nicht regulär, $a^\ell b^{\ell+1}$ lässt sich nicht aufpumpen, eine kontextfreie Grammatik für L_2 ist $G = (\{S\}, \{a,b\}, \{S \to aSb, Sb, b\}, S)$.

(3) $i = 2$, also kontextfrei aber nicht regulär, $a^\ell b^\ell c^0$ lässt sich nicht pumpen, wird akzeptiert durch PDA, der den momentanen Wert von $\#_b - (\#_a + \#_c)$ auf dem Stack verwaltet; Grammatik ist $G = (\{S,A,C\}, \{a,b,c\}, \{S \to AC; A \to aAb; C \to bCc\}, S)$.

(4) $i = 2$, die Sprache ist $\left\{a^n b^{2n} \,\middle|\, n \geq 0\right\}$

(b) Betrachten Sie die Sprache $L = \left\{w \in \{a,b,c\}^* \,\middle|\, \#_a(w) = \#_b(w) = \#_c(w)\right\}$. Geben Sie, ohne Begründung, drei Teilsprachen L_{reg}, L_{cfl}, $L_{csl} \subseteq L$ an, sodass $L_{reg} \in \mathsf{REG}$, $L_{cfl} \in \mathsf{CFL} \setminus \mathsf{REG}$, $L_{csl} \in \mathsf{CSL} \setminus \mathsf{CFL}$ gilt. *(6 Punkte)*

Lösung:

Zum Beispiel: $L_{reg} = \varnothing$, $L_{cfl} = \left\{(ab)^n c^n \,\middle|\, n \geq 0\right\}$ und $L_{csl} = L$. oder auch $L_{reg} = \left\{(abc)^n \,\middle|\, n \geq 0\right\}$, $L_{csl} = \left\{a^n b^n c^n \,\middle|\, n \geq 0\right\}$

Aufgabe 3 *24 Punkte*

(a) Sei $\mathsf{CFL}_1 = \left\{L(M) \,\middle|\, M \text{ ist ein PDA mit nur einem Zustand}\right\}$. Gilt dann $\mathsf{CFL}_1 \subsetneq \mathsf{CFL}$, $\mathsf{CFL}_1 \supsetneq \mathsf{CFL}$ oder $\mathsf{CFL}_1 = \mathsf{CFL}$? Begründen Sie. *(2 Punkte)*

Lösung:

Um PDAs in äquivalente kontextfreie Grammatiken zu transformieren, haben wir in der VL die PDAs erst zu äquivalenten PDAs mit nur einem Zustand umgewandelt, daher gilt $\mathsf{CFL}_1 = \mathsf{CFL}$.

(b) Sei $G = (\{S,A,B,C,D\}, \{a,b,c\}, P, S)$ mit

$$
\begin{array}{llll}
P: & S \to ASC, B, bb & A \to aa & C \to c, cD \\
 & B \to \varepsilon, b, BB & D \to \varepsilon, c &
\end{array}
$$

Erzeugen Sie eine Grammatik G' mit $L(G') = L(G) \setminus \{\varepsilon\}$ in Chomsky-Normalform indem Sie die Schritte in folgender Reihenfolge durchführen und das Ergebnis nach jedem Schritt angeben: Terminale ersetzen, lange rechte Seiten auflösen, ε-Regeln entfernen, Variablenumbenennungen entfernen. *(8 Punkte)*

Lösung:

Terminale ersetzen: $G_1 = (V_1, \{a,b,c\}, P_1, S)$ mit P_1:

$$\begin{array}{lll} S \to ASC, B, X_bX_b & A \to X_aX_a & C \to c, X_cD \\ B \to \varepsilon, b, BB & D \to \varepsilon, c & \\ X_a \to a & X_b \to b & X_c \to c \end{array}$$

und $V_1 = \{S, A, B, C, D, X_a, X_b, X_c\}$.

lange rechte Seiten auflösen: $G_2 = (V_2, \{a,b,c\}, P_2, S)$ mit $V_2 = V_1 \cup \{S_1\}$ und P_2:

$$\begin{array}{lll} S \to AS_1, B, X_bX_b & A \to X_aX_a & C \to c, X_cD \\ B \to \varepsilon, b, BB & D \to \varepsilon, c & S_1 \to SC \\ X_a \to a & X_b \to b & X_c \to c \end{array}$$

ε-Regeln entfernen: $G_3 = (V_3, \{a,b,c\}, P_3, S)$ mit $V_3 = V_2$ und P_3:

$$\begin{array}{lll} S \to AS_1, B, X_bX_b & A \to X_aX_a & C \to c, X_cD, X_c \\ B \to b, BB, B & D \to c & S_1 \to SC, C \\ X_a \to a & X_b \to b & X_c \to c \end{array}$$

Variablenumbenennungen entfernen: $G' = (V', \{a,b,c\}, P', S)$ mit $V' = V_3$ und P':

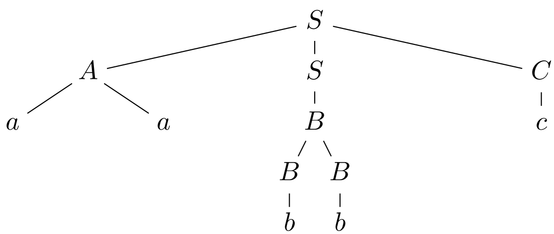
$$\begin{array}{lll} S \to AS_1, X_bX_b, b, BB & A \to X_aX_a & C \to c, X_cD \\ B \to b, BB & D \to c & S_1 \to SC, c, X_cD \\ X_a \to a & X_b \to b & X_c \to c \end{array}$$

(c) Geben Sie eine Linksableitung in der Grammatik G und den dazugehörigen Syntaxbaum für das Wort $x = aabbc$ an. *(5 Punkte)*

Lösung:

$S \Rightarrow ASC \Rightarrow aaSC \Rightarrow aaBC \Rightarrow aaBBC \Rightarrow aabBC \Rightarrow aabbC \Rightarrow aabbc$

Passender Syntaxbaum:



(d) Skizzieren Sie in Worten eine c-beschränkte k-NTM für $L_4 = \left\{ a^{n^2} \,\middle|\, n \geq 1 \right\}$.
(*Hinweis:* Eine c-beschränkte k-NTM besucht bei Eingaben der Länge n höchstens $cn + c$ Bandfelder.) *(8 Punkte)*

Lösung:

Wir konstruieren eine 5-beschränkte 4-NTM M:

- M verwirft direkt falls die Eingabe leer ist.
- Wir erzeugen auf Band 4 die Wörter der Form a^{n^2} für aufsteigendes n, sofern sie nicht länger als die Eingabe sind, und vergleichen dann mit der Eingabe.

Bei Gleichheit akzeptiert M und ansonsten wird das nächste Wort dieser Form erzeugt.

- Um a^{n^2} zu erzeugen, schreibt M auf Band 2 das Wort a^n (dazu müssen wir in jeder Iteration nur ein weiteres a auf Band 2 schreiben).
- Den Inhalt von Band 2 kopiert M auf Band 3 und für jedes a auf Band 3 fügen wir einmal den Inhalt von Band 2 hinten auf Band 4 an.
- M bricht direkt ab und verwirft, falls der Inhalt von Band 4 jemals länger als die Eingabe wird. Wenn M noch nicht akzeptiert hat, dann wird am Ende der Iteration der Inhalt von Band 4 komplett gelöscht.

Aufgabe 4 ***24 Punkte***

Sei $N = (\{p, q, \ell, x, e\}, \{0, 1\}, \{0, 1, X, \sqcup\}, \delta, p, \{e\})$ eine 1-NTM mit

$$\delta: \begin{array}{llll} p0 \to qXR, & p1 \to p1R, & q0 \to q0R, & q1 \to q1R, \\ q\sqcup \to \ell\sqcup L, & \ell 1 \to \ell 1L, & \ell 0 \to x1L, & x0 \to x0L, \\ x1 \to x1L, & xX \to p1R, & p\sqcup \to e\sqcup N, & \ell X \to \ell XN. \end{array}$$

(a) Eine 2-DTM M befinde sich in der Konfiguration $K = (p, \varepsilon, a, bc, ab, c, \varepsilon)$ und führt die Anweisung $pac \to qbbRN$ aus. Beschreiben Sie, was M dabei tut und geben Sie die Folgekonfiguration K' an. *(3 Punkte)*

Lösung:

- M schreibt b jeweils auf Band 1 und 2,
- geht auf Band 1 nach rechts und behält die Kopfposition auf Band 2 bei und
- wechselt in den Zustand q.

Die Folgekonfiguration ist $K' = (q, b, b, c, ab, b, \varepsilon)$.

(b) Begründen Sie, warum N deterministisch ist. *(2 Punkte)*

Lösung:

Dies gilt, denn für jede Kombination aus Zustand und Bandzeichen existiert nur maximal eine Anweisung.

(c) Geben Sie die Rechnungen von $N(0)$ (N bei Eingabe 0) bis zur 4. und die von $N(00)$ bis zur 8. Konfiguration an, Startkonfiguration jeweils mitgezählt. Die Rechnung von $N(00)$ beginnt mit $p00 \vdash Xq0$. *(5 Punkte)*

Lösung:

$p0 \vdash Xq\sqcup \vdash \ell X\sqcup \vdash \ell X\sqcup$

$p00 \vdash Xq0 \vdash X0q\sqcup \vdash X\ell 0\sqcup \vdash xX1\sqcup \vdash 1p1\sqcup \vdash 11p\sqcup \vdash 11e\sqcup$

(d) Geben Sie $L(N)$ ohne Begründung an. *(2 Punkte)*

Lösung:

$L(N) = \left\{w \in \{0, 1\}^* \;\middle|\; 2 \text{ teilt } \#_0(w)\right\}$.

(e) Sei f die von N berechnete Funktion. Ist f eine totale Funktion von $\{0, 1\}^*$ nach $\{0, 1\}^*$? Begründen Sie. *(2 Punkte)*

Lösung:
Nein, denn bei ungerader Anzahl der 0 in w wird durch $lX \to \ell XN$ eine Endlosschleife erreicht und damit ist $N(w) = \uparrow$.

(f) Sind folgende Aussagen korrekt? Begründen Sie. *(10 Punkte)*

(1) $L_1 \in \mathsf{RE}$ mit $L_1 = \left\{ w \in \{0,1\}^* \;\middle|\; M_w(w) \text{ schreibt nie } \sqcup \right\}$.

(2) $L_2 \in \mathsf{RE}$ mit $L_2 = \left\{ w \in \{0,1\}^* \;\middle|\; M_w(w) \text{ liest nie } \sqcup \right\}$.

Hinweis: Wir sagen M *liest* ein $a \in \Gamma$ und *schreibt* ein $a' \in \Gamma$, falls M eine Anweisung der Form $za \to z'a'D$ ausführt ($a = a'$ ist möglich).

Lösung:

(1) falsch, d.h. $L_1 \notin \mathsf{RE}$: Wir reduzieren $\overline{H_0}$ auf L_1 mittels $w \mapsto w'$, wobei $M_{w'}$ bei Eingabe x diese ignoriert und stattdessen $M_w(\varepsilon)$ ausführt. Dabei werden alle Blanks in der Überführungsfunktion von M_w durch $\# \notin \Gamma_{M_w}$ ersetzt und die Anweisung $z\sqcup \to z\#N$ für jeden Zustand z hinzugefügt, wodurch die Blanks auf dem Bank übersetzt werden. Falls $M_w(\varepsilon)$ hält, so schreibt $M_{w'}(x)$ ein $\sqcup$. Dann gilt $w \in \overline{H_0} \Leftrightarrow M_w(\varepsilon) \uparrow \Leftrightarrow M_{w'}(w')$ schreibt nie $\sqcup \Leftrightarrow w' \in L_1$. Damit ist L_1 co-RE-hart und damit nicht in RE.

(2) wahr, d.h. $L_2 \in \mathsf{RE}$: Eine DTM, die nie $\sqcup$ liest kann die Eingabe nicht verlassen und diese nicht durch Blanks überschreiben. Nach höchstens $\|Z_{M_w}\| \cdot |w| \cdot \|\Gamma_{M_w}\|^{|w|}$ Schritten können wir entscheiden, ob jemals $\sqcup$ gelesen wird, da sich spätestens dann Konfigurationen nur noch wiederholen (wenn kein $\sqcup$ gelesen wurde).

Aufgabe 5 *30 Punkte*

(a) Betrachten Sie die Formeln $F = (x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_1) \wedge (\neg x_3 \vee x_2)$ sowie $G = (x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_1) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee x_1)$. Geben Sie jeweils an, ob F bzw. G erfüllbar ist und begründen Sie jeweils Ihre Antwort. *(5 Punkte)*

Lösung:

Die Belegung $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0$ erfüllt die Formel F.

Jede Klausel einer KNF lässt sich als eine (Teil)Belegung auffassen, die die Klausel nicht erfüllt, z.B. ist durch $x_1 \vee \neg x_2$ die Belegung $x_1 = 0, x_2 = 1$ nicht erfüllend. Die vier Klauseln von G schließen alle Belegungen auf 2 Variablen aus, daher ist G nicht erfüllbar.

Statt obigen Textes hätte man natürlich auch für alle vier Belegungen die nicht erfüllte Klausel einfach auflisten können.

(b) Klassifizieren Sie folgende Probleme für boolesche Formeln entsprechend ihrer Komplexität als effizient lösbar (d. h. in P) bzw. als NP-hart oder $\mathsf{co\text{-}NP}$-hart (und damit vermutlich nicht effizient lösbar). Begründen Sie. *(8 Punkte)*

(1) $L_1 = \{F \mid F \text{ hat mindestens zwei erfüllende Belegungen}\}$

(2) $L_2 = \{F \mid F \text{ hat eine erfüllende Belegung mit höchstens 2023 Einsen}\}$

Lösung:

(1) $F \mapsto F \wedge (y \vee \overline{y})$ für eine neue Variable y ist eine Reduktion von $\textsc{Sat}$ auf L_1. Jede Lösung von F kann sowohl mit $y = 0$ als auch mit $y = 1$ zu einer Lösung für $F \wedge (y \vee \overline{y})$ erweitert werden. Hat F dagegen keine erfüllende Belegung, so hat auch $F \wedge (y \vee \overline{y})$ keine. Daher gilt L_1 ist NP-hart.

(2) $L_2 \in \mathsf{P}$, da man alle $\binom{n}{2023} \in \mathcal{O}(n^{2023})$ möglichen Belegungen mit 2023 Einsen durchprobieren kann.

(c) Sei $A \neq \emptyset$ mit $A \in \mathsf{P}$ und sei B eine co -NP-vollständige Sprache, also $\overline{B}$ ist NP-vollständig. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen unter der Annahme $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$: *(8 Punkte)*

(1) $A \leq^p \emptyset$

(2) $A \leq^p B$

(3) $A \leq^p \overline{B}$

(4) $B \leq^p A$

Lösung:

(1) $A \leq^p \emptyset$ stimmt nicht, da man für ein $x \in A$ kein $f(x) \in \emptyset$ definieren kann

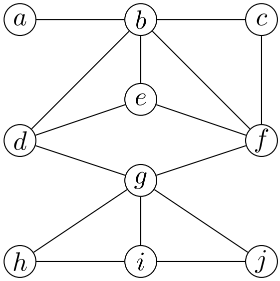
(2) $A \leq^p B$ stimmt: Da $B \in \mathsf{co\text{-}NPC}$ liegt, gilt $B \neq \emptyset$. Da $A \in \mathsf{P}$, kann man in Polynomialzeit für ein x entscheiden, ob $x \in A$ oder $x \notin A$, und entsprechend auf ein Element in B oder in $\overline{B}$ abbilden.
ODER:
$A \in P \Rightarrow \overline{A} \in P \Rightarrow \overline{A} \in \mathsf{NP} \Rightarrow A \in \mathsf{co\text{-}NP}$. Dann simmt die Aussage, da B eine co -NP harte Sprache ist.

(3) $A \leq^p \overline{B}$ gilt, da $\overline{B} \in \mathsf{NPC}$ und $\mathsf{P} \subseteq \mathsf{NP}$.

(4) $B \leq^p A$ stimmt nicht, sonst wäre $\mathsf{co\text{-}NP} = \mathsf{P}$ und dann auch $\mathsf{NP} = \mathsf{P}$.

(d) Betrachten Sie den untenstehenden Graphen G.

$G:$



Hat der Graph G einen Hamiltonpfad bzw. einen Hamiltonkreis? Begründen Sie jeweils. *(4 Punkte)*

Lösung:
Hamiltonpfad: Ja, z.B. $a, b, c, f, e, d, g, h, i, j$
Hamiltonkreis: Nein, es existiert ein Knoten mit Grad 1.

(e) Betrachten Sie das Problem HamQuarterPath: Entscheide für einen gegebenen Graphen G mit n Knoten, ob G einen Pfad mit mindestens $\frac{n}{4}$ Knoten enthält. Zeigen Sie, dass HamQuarterPath NP-hart ist. *(5 Punkte)*

Lösung:
Reduziere von HamPath $\leq^p$ HamQuarterPath: Kopiere einen Graphen G mit n Knoten disjunkt 4-mal. Sei H der resultierende Graph.

Dann hat H einen Pfad der $\frac{4n}{4} = n$ Knoten enthält genau dann, wenn G einen Hamiltonpfad hat, da keine Pfade Knoten aus mehr als einer Kopie von G enthalten können und alle Pfade in G auch in H existieren.

Diese Reduktion ist in Polynomialzeit durchführbar, da jeder Knoten und jede Kante lediglich dreimal kopiert werden muss. Dies ist in Zeit $\mathcal{O}(n + m)$ durchführbar, wenn m die Kantenzahl von G ist.