

Übungsblatt 15

*Besprechung der mündlichen Aufgaben am 14.–17. 2. 2023
Bearbeitung des Moodle-MC-Tests bis 14. 2. 2023, 8:00 Uhr*

Aufgabe 88

mündlich

Klassifizieren Sie folgende Entscheidungsprobleme für boolesche Formeln entsprechend ihrer Komplexität als effizient lösbar (d. h. in \mathbf{P}) bzw. nicht effizient lösbar (d. h. NP-hart oder co-NP-hart). Begründen Sie Ihre Antwort.

- (a) $L_1 = \text{UNSAT} = \{F \mid F \text{ ist eine unerfüllbare Formel}\}$
- (b) $L_2 = \text{TAUT} = \{F \mid F \text{ ist eine aussagenlogische Tautologie}\}$
- (c) $L_3 = \{F \mid F \text{ ist eine erfüllbare Formel der Form } G \rightarrow H\}$,
- (d) $L_4 = \{F \mid F \text{ ist eine Tautologie der Form } G \rightarrow H\}$,
- (e) $L_5 = \{F \mid F \text{ ist in KNF und es ex. eine Belegung } a \text{ mit } F(a) = 0\}$,
- (f) $L_6 = \{F \mid \text{es gibt eine Belegung } a \text{ mit } F(a) = 0\}$,
- (g) $L_7 = \{S \mid \text{ist ein erfüllbarer Schaltkreis ohne } \wedge\text{-Gatter}\}$,
- (h) $L_8 = \{S \mid \text{ist ein erfüllbarer Schaltkreis mit genau 2023 } \vee\text{- und } \wedge\text{-Gattern}\}$.

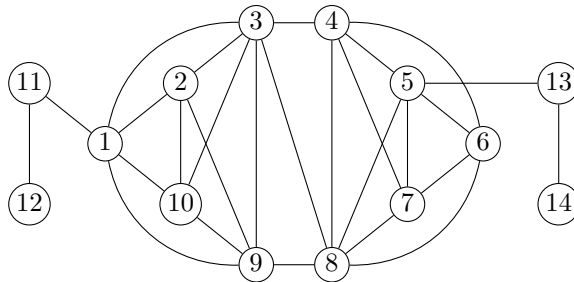
Bemerkung: Der Fanin von \wedge - und \vee -Gattern ist laut Vorlesung fix 2.

Hinweis:

- Eine *Clique* C in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine Teilmenge $C \subseteq V$, sodass der Subgraph $G[C] = (C, \{\{u, v\} \mid u, v \in C\})$ vollständig ist, d.h. für alle $u, v \in C$ gilt $\{u, v\} \in E$. Die *Cliquenzahl* $\omega(G)$ ist die Größe einer größten Clique in G .
- Eine *stabile Menge* S (engl. independent set) in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine Teilmenge $S \subseteq V$, sodass der Subgraph $G[S] = (S, \{\{u, v\} \mid u, v \in S\})$ leer ist, d.h. für alle $u, v \in S$ gilt $\{u, v\} \notin E$. Die *Stabilitätszahl* $\alpha(G)$ ist die Größe einer größten stabilen Menge in G .
- Eine *Knotenüberdeckung* U (engl. vertex cover) in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine Teilmenge $U \subseteq V$, sodass für alle $\{u, v\} \in E$ gilt: $u \in U$ oder $v \in U$, d.h. alle Kanten sind mit mindestens einem Endpunkt abgedeckt. Die *Knotenüberdeckungsanzahl* $\beta(G)$ ist die Größe einer kleinsten Knotenüberdeckung in G .
- Ein *Hamiltonpfad* ist ein Pfad v_0, \dots, v_l (d.h. ein Weg mit $i \neq j \Rightarrow v_i \neq v_j$) der alle Knoten enthält, d.h. $V = \{v_0, \dots, v_l\}$. Falls v_0, \dots, v_l ein Hamiltonpfad ist und $\{v_0, v_l\} \in E$, so heißt v_0, \dots, v_l, v_0 *Hamiltonkreis*.

Aufgabe 89 Betrachten Sie folgenden Graphen G :

mündlich



- Geben Sie mit Begründung jeweils an, ob G einen Hamiltonpfad bzw. einen Hamiltonkreis enthält.
- Geben Sie 4 Cliques C_1, C_2, C_3, C_4 in G an, die alle Knoten abdecken, d.h. $\bigcup_{i=1}^4 C_i = \{1, \dots, 14\}$.
- Geben Sie die Cliquenzahl $\omega(G)$, die Stabilitätszahl $\alpha(G)$ und die Knotenüberdeckungsanzahl $\beta(G)$ von G an. Begründen Sie jeweils, dass diese Werte weder größer noch kleiner sein können.

Aufgabe 90

mündlich

Klassifizieren Sie folgende Probleme als effizient lösbar (d. h. in P) bzw. nicht effizient lösbar (d. h. NP-hart oder co-NP-hart). Begründen Sie.

- Das Subgraph-Isomorphieproblem SUBGI: Entscheide für zwei gegebene Graphen G und H , ob G isomorph zu einem Subgraphen von H ist.
- Das Problem 2023-CLIQUE: Hat ein gegebener Graph eine Clique der Größe 2023?
- Entscheide für einen Graphen G und eine Zahl k , ob G eine Clique der Größe k oder eine stabile Menge der Größe k hat.