

Übungsblatt 12

*Besprechung der mündlichen Aufgaben am 24.–27. 1. 2023
Bearbeitung des Moodle-MC-Tests bis 24. 1. 2023, 8:00 Uhr
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 31. 1. 2023, 23:59 Uhr*

Aufgabe 72 Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen: *mündlich*

- (1) A ist vom Typ 0,
- (2) A wird von einer 1-NTM akzeptiert.

Aufgabe 73 Zeigen Sie, dass $\text{CSL} \not\subseteq \text{REC}$ gilt. **9 Punkte**

Hinweis: Betrachten Sie die Sprache \overline{D} mit $D = \{w \in \{0, 1\}^+ \mid M_w \text{ ist eine 1-NTM, die die Eingabe } \hat{w} \text{ akzeptiert ohne dabei den Bereich der Eingabe zu verlassen}\}$. Gehen Sie dabei deutlich auf Unterschiede zum Beweis der Unentscheidbarkeit des Halteproblems ein. Sie dürfen die Konstruktion aus Aufgabe 80.c (universelle DTM) als bekannt annehmen.

Aufgabe 74 **9+1 Punkte**

Sei N ein LBA mit $N = (\{p, q, r, s, t, d, e, l\}, \{a, \hat{a}, \#, \hat{\#}\}, \{a, \hat{a}, \#, \hat{\#}, \sqcup\}, \delta, p, \{e\})$ und

$$\delta : \begin{array}{llll} pa \rightarrow q \sqcup R, & qa \rightarrow qa R, & q\# \rightarrow r\# R, & r\# \rightarrow r\# R, \\ ra \rightarrow s\# R, & sa \rightarrow sa R, & s\# \rightarrow t\# R, & t\# \rightarrow t\# R, \\ ta \rightarrow l\# L, & t\hat{a} \rightarrow d\hat{a} L, & la \rightarrow la L, & l\# \rightarrow l\# L, \\ l\sqcup \rightarrow p\sqcup R, & d\# \rightarrow d\# L, & d\sqcup \rightarrow e\sqcup N. & \end{array}$$

- (a) Geben Sie die von N erkannte Sprache an. *(1 Zusatzpunkt)*
- (b) Wandeln Sie N mit dem Verfahren aus der Vorlesung in eine Typ-1-Grammatik G um. Sie dürfen dabei Regeln derselben Form (u.a. aus derselben Anweisung stammend) mit Platzhaltern angeben, z.B. „ G enthält $\forall u, u' \in \Sigma, v' \in \Gamma$ die Regel $(pa, u)(v', u') \rightarrow (\sqcup, u)(qv', u')$ “. *(5 Punkte)*
- (c) Geben Sie eine Ableitung in G für das Wort $a\#a\#a$ an. Sie dürfen mehrere Anwendungen von Regeln, die aus derselben Anweisung von N hervorgehen, zusammenfassen (d.h. \Rightarrow^* zwischen den Satzformen). *(4 Punkte)*

Aufgabe 75 Sei N eine NTM. Zeigen Sie folgende Aussagen: *mündlich*

- (a) Wenn N bei Eingabe x beliebig lange, aber endliche, Rechnungen durchführen kann, dann kann N bei Eingabe x auch mindestens eine unendlich lange Rechnung durchführen.
- (b) Wenn N bei Eingabe x hält, dann kann N bei Eingabe x nur endlich viele verschiedene Konfigurationen annehmen.

Aufgabe 76 Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

mündlich

- (1) A ist entscheidbar,
- (2) χ_A ist berechenbar,
- (3) A wird von einer DTM akzeptiert, die bei allen Eingaben hält.
- (4) A wird von einer NTM akzeptiert, die bei allen Eingaben hält.

Aufgabe 77

mündlich

Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$ eine DTM. Zeigen Sie, dass es eine DTM M' mit $L(M') \subseteq \{0\}^*$ gibt, für die für alle $t \in \mathbb{N}$ gilt:

- Falls es ein Wort $x \in \Sigma^*$ der Länge $|x| \leq t$ gibt, sodass $M(x)$ nach höchstens t Schritten akzeptiert, dann akzeptiert $M'(0^t)$.
- Falls ein solches x nicht existiert, dann hält $M'(0^t)$, ohne zu akzeptieren.

Bemerkung: Damit gilt $L(M') \neq \emptyset \Leftrightarrow L(M) \neq \emptyset$ und $L(M') \in \text{REC}$, selbst wenn $L(M) \in \text{RE} \setminus \text{REC}$.

Aufgabe 78

6 Punkte

Die *Primzahlwillingsvermutung* lautet:

Es gibt unendlich viele Primzahlpaare p, q mit $|p - q| = 2$.

Es ist bis heute ungeklärt, ob diese Vermutung wahr ist. Sind die totalen Funktionen $f_i : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}$ mit $i \in \{1, 2, 3\}$ berechenbar? Begründen Sie!

- (a) $f_1(x) = 1 \Leftrightarrow$ die Primzahlwillingsvermutung ist wahr (2 Punkte)
- (b) $f_2(x) = 1 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : x = \text{bin}(n)$ und n sowie $n + 2$ sind Primzahlen (2 Punkte)
- (c) $f_3(x) = 1 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, n > 5 : n - 2, n$ und $n + 2$ sind Primzahlen (2 Punkte)

Aufgabe 79

6 Punkte

Betrachten Sie die DTM $M = (\{p, q, r\}, \{0, 1\}, \{0, 1, \sqcup\}, \delta, p, \{r\})$ mit

$$\delta : p0 \rightarrow p0R, \quad p1 \rightarrow q1R, \quad q0 \rightarrow p0R, \quad q1 \rightarrow r1N.$$

- (a) Geben Sie $L(M)$ an. (1 Punkt)
- (b) Geben Sie eine 2-DTM M' für $\chi_{L(M)}$ an, d.h. M' berechnet die charakteristische Funktion von $L(M)$. Erinnerung: Die Ausgabe einer DTM steht auf dem letzten Band, links vom Kopf. (5 Punkte)