Übungsblatt 9

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 3.–6. 1. 2023
Bearbeitung des Moodle-MC-Tests bis 3. 1. 2023, 8:00 Uhr
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 10. 1. 2023, 23:59 Uhr

Aufgabe 52 ***mündlich***

Betrachten Sie die Grammatik $G = (\{S, A, B, C, D\}, \{a, b\}, P, S)$ in Chomsky-Normalform mit

$$P\colon\ S \to CB \qquad A \to a \qquad B \to BB, b$$
$$C \to AB, DB \qquad D \to AC$$

(a) Geben Sie ohne Begründung für jedes der Wörter b, ab, bba und abb an, ob sie in $L(G)$ enthalten sind.

(b) Entscheiden Sie mittels des CYK-Algorithmus, ob das Wort $x = aabbb$ in $L(G)$ enthalten ist.

(c) Geben Sie einen Syntaxbaum, eine Linksableitung und eine Rechtsableitung in G für das Wort $aabbb$ an.

(d) Geben Sie eine explizite Beschreibung der Sprache $L(G)$ an.

(e) Ist G eindeutig? Begründen Sie.

Aufgabe 53 ***mündlich***

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Typ-2-Grammatik und weiter sei $S \Rightarrow \ldots \Rightarrow \alpha_i \Rightarrow \ldots \alpha_m$ eine Ableitung und $T_0, \ldots, T_m$ die dazu gehörenden Syntaxbäume.

(a) Wie viele Blätter und innere Knoten (d.h. alles außer Blättern) hat T_m, falls c Knoten von T_m mit ε markiert sind?

(b) Wie ist groß die Anzahl der inneren Knoten in Abhängigkeit von $|\alpha_m|$, falls G in CNF ist und $\alpha_m \in V^*$ ist? Begründen Sie.

(c) Erklären Sie kurz für jeden der letzten drei Umwandlungsschritte in CNF, (alle außer dem Ersetzen der Terminale) welche Auswirkung das Auslassen des jeweiligen Schritts auf den Beweis des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen hätte.

Aufgabe 54 ***7 Punkte***

Betrachten Sie die kontextfreie Grammatik $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, P, S)$ mit den Produktionen $P : S \to AB, AC; A \to AA, a; C \to SB; B \to a, b$. Testen Sie mit dem CYK-Algorithmus, ob $x = aabbb$ in $L(G)$ ist.

Aufgabe 55 *mündlich*

Eine Sprache $T \subseteq \Sigma^*$ heißt *Tallysprache*, falls Σ *unär* ist, d.h. $\|\Sigma\| = 1$. Die Funktion l_{reg} (l_{kfr}) weise einer Sprache L, die die Konklusion des Pumping-Lemmas für reguläre (kontextfreie) Sprachen erfüllt, ihre Pumpingzahl und allen anderen Sprachen den Wert ∞ zu. Zeigen Sie:

(a) Für jede Tallysprache T gilt $l_{kfr}(T) = l_{reg}(T)$.

(b) Für jede Tallysprache T mit $l = l_{reg}(T) < \infty$ gilt: Falls ein Wort a^n mit $n \geq l$ zu T gehört, so enthält T alle Wörter $a^{n+il!}$ für $i \geq 1$.

(c) Jede Tallysprache T mit $l = l_{reg}(T) < \infty$ ist regulär.
Hinweis: Finden Sie endliche Sprachen $A, B \subseteq T$ mit $T = A \cup B\{a^{l!}\}^*$.

(d) Es gibt keine Tallysprache in $\mathsf{CFL} \setminus \mathsf{REG}$.

Aufgabe 56 *9+3 Punkte*

Sei $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$ eine Grammatik mit den Regeln

$$P: \quad S \to aB, bA \qquad A \to a, aS, bAA \qquad B \to b, bS, aBB.$$

(a) Geben Sie eine explizite Beschreibung für $L(G)$ an. Begründen Sie die Korrektheit Ihrer Angabe. *(2 Zusatzpunkte)*

(b) Konstruieren Sie aus G einen PDA M mit dem Verfahren aus der Vorlesung. *(3 Punkte)*

(c) Geben Sie alle Satzformen α von G der Länge $|\alpha| \leq 4$ in alphabetischer Reihenfolge an. *(3 Punkte)*

(d) Zeigen Sie $aabbab \in L(G)$, indem Sie eine Links-, eine Rechtsableitung und einen Syntaxbaum sowie eine akzeptierende Rechnung von M für w angeben. *(3 Punkte)*

(e) Ist G mehrdeutig? Begründen Sie kurz. *(1 Zusatzpunkt)*

Aufgabe 57 *14 Punkte*

Für die *lexikographische Striktordnung* $<$ auf $\{0,1\}^*$ gilt $x < y$, falls:

- $|x| < |y|$ oder
- $|x| = |y|$ und $\exists i \leq |x| : x_1 \cdots x_{i-1} = y_1 \cdots y_{i-1}$ und $x_i < y_i$.

Betrachten Sie die Sprachen

$$L_1 = \left\{x\#y \;\middle|\; x, y \in \{0,1\}^*, |x| = |y|, x < y\right\} \quad \text{und}$$
$$L_2 = \left\{x\#y \;\middle|\; x, y \in \{0,1\}^*, |x| = |y|, x < y^R\right\}.$$

(a) Geben Sie eine eindeutige Typ-2-Grammatik für L_2 an und den Syntaxbaum für das Wort $w = 11000\#10011$ an. *(7 Punkte)*

(b) Zeigen Sie, dass L_1 nicht kontextfrei ist. Betrachten Sie dazu Wörter der Form $0^l 1^l \# 0^{l-1} 1 0^l$. *(7 Punkte)*