

Übungsblatt 7

*Besprechung der mündlichen Aufgaben am 6.–9. 12. 2022
Bearbeitung des Moodle-MC-Tests bis 6. 12. 2022, 8:00 Uhr
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 13. 12. 2022, 23:59 Uhr*

Aufgabe 40 Beweisen oder widerlegen Sie für $L \subseteq \Sigma^*$: *mündlich*

- (a) $L \in \text{REG} \Rightarrow \forall x \in \Sigma^* : [x]_{\sim_L} \in \text{REG}$, d.h. die Äquivalenzklassen der Nerode-Relation einer regulären Sprache sind regulär.
- (b) $(\forall x \in \Sigma^* : [x]_{\sim_L} \in \text{REG}) \Rightarrow L \in \text{REG}$, d.h. sind die Äquivalenzklassen der Nerode-Relation einer Sprache regulär, so ist es auch die Sprache.

Aufgabe 41 Sei $\Sigma = \{0, 1\}$ und $k \geq 1$. *mündlich*

- (a) Bestimmen Sie einen Minimal-DFA für die Sprache
$$L_k = \{x = x_1 \dots x_n \in \Sigma^* \mid n \geq k, x_k = 1\}.$$
- (b) Geben Sie einen NFA für die gespiegelte Sprache L_k^R mit $\leq k + 1$ Zuständen an.
- (c) Bestimmen Sie die minimale Anzahl von Zuständen eines DFA für L_k^R .
- *d) Geben Sie für jedes $k \geq 1$ einen NFA N mit k Zuständen an, so dass jeder DFA für $L(N)$ mindestens 2^k Zustände hat.

Aufgabe 42 *mündlich*

Für eine Sprache A , sei $l_{\text{reg}}(A)$ die Pumpingzahl von A nach dem Pumping-Lemma für reguläre Sprachen. Zeigen Sie für beliebige Sprachen A, B mit endlichen Pumpingzahlen (nicht nur für reguläre A, B):

- (a) $l_{\text{reg}}(A \cup B) \leq \max \{l_{\text{reg}}(A), l_{\text{reg}}(B)\}$ und es gibt $A, B \in \text{REG}$, sodass Gleichheit gilt.
- (b) $l_{\text{reg}}(AB) \leq l_{\text{reg}}(A) + l_{\text{reg}}(B)$ und es gibt $A, B \in \text{REG}$, sodass Gleichheit gilt.
- (c) $A \neq \emptyset \Rightarrow l_{\text{reg}}(A^*) \leq l_{\text{reg}}(A)$ und es gibt ein $A \in \text{REG}$, sodass Gleichheit gilt.
- (d) Aus den bisherigen Teilaufgaben folgt das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen.

Aufgabe 43 Seien A, B beliebige Typ- i -Sprachen ($i \in \{0, 1, 2\}$). **6 Punkte**
Zeigen Sie:

- (a) $A \cup B$ ist eine Typ- i -Sprache. *(mündlich)*
- (b) A^R ist eine Typ- i -Sprache. *(2 Punkte)*
- (c) AB ist eine Typ- i -Sprache. *(4 Punkte)*

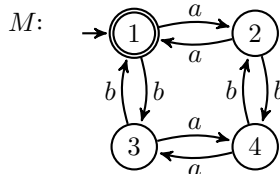
Hinweis: Achten Sie besonders bei Typ-1-Sprachen auf die Sonderfälle.

Aufgabe 44 Betrachten Sie den unten dargestellten DFA M .

7 Punkte

(a) Geben Sie für den DFA M eine äquivalente reguläre Grammatik an.

(3 Punkte)



(b) Geben Sie für die reguläre Grammatik $G = (\{A, B\}, \{a, b\}, P, A)$ mit den Regeln

$$P: A \rightarrow aB, a, \varepsilon$$

$$B \rightarrow bA, b$$

einen äquivalenten NFA an.

(4 Punkte)

Benutzen Sie jeweils das Verfahren aus der Vorlesung.

Aufgabe 45

6 Punkte

Betrachten Sie die folgende Grammatik $G = (\{S, T\}, \{a, b\}, P, S)$ mit den Regeln $P: S \rightarrow aSa, T; T \rightarrow bTa, \varepsilon$.

(a) Zeigen Sie, dass alle aus S ableitbaren Satzformen die Form wXw' haben mit $X \in \{S, T, \varepsilon\}$ sowie $|w| = |w'|$ und $w \in L(a^*b^*), w' \in L(a^*)$.

(2 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass für alle ww' mit $|w| = |w'|$ und $w \in L(a^*b^*), w' \in L(a^*)$ gilt, dass $ww' \in L(G)$.

(3 Punkte)

(c) Geben Sie $L(G)$ an und zeigen Sie die Korrektheit Ihrer Angabe.

(1 Punkt)

Aufgabe 46

11 Punkte

Eine **linksreguläre** Grammatik darf nur Regeln der Bauart $A \rightarrow a, A \rightarrow Ba$ oder $A \rightarrow \varepsilon$ enthalten. Der Begriff **rechtsregulär** ist analog definiert, entspricht also der Vorlesungsdefinition einer regulären Grammatik.

Gegeben sei die Grammatik

$$G_1 = (N, \Sigma, \{S \rightarrow Tb, \varepsilon; T \rightarrow Ub; U \rightarrow Va; V \rightarrow Wa, Va; W \rightarrow Sa\}, S)$$

(a) Geben Sie einen regulären Ausdruck sowie eine rechtsreguläre Grammatik für die Sprache $L(G_1)$ an.

(4 Punkte)

(b) Zeigen Sie: Wenn $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine linksreguläre Grammatik ist, dann gilt für die rechtsreguläre Grammatik $G^R = (V, \Sigma, P', S)$ mit $P^R = \{(\alpha, \beta^R) \mid (\alpha, \beta) \in P\}$ (d.h. rechte Seiten werden gespiegelt): $L(G^R) = L(G)^R$.

(2 Punkte)

(c) Zeigen Sie allgemein, dass eine Sprache genau dann von einer linksregulären Grammatik erzeugt wird, wenn es eine (rechts)reguläre Grammatik für sie gibt. (Hinweis: Nutzen Sie b) und die Aufgabe 12.d.)

(2 Punkte)

(d) Lassen sich mit Grammatiken, die nur Produktionen der Form $A \rightarrow a, A \rightarrow Ba, A \rightarrow aB$ und $A \rightarrow \varepsilon$ enthalten, auch nicht-reguläre Sprachen erzeugen? Begründen Sie Ihre Antwort.

(3 Punkte)