Übungsblatt 5

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 22.–25. 11. 2022
Bearbeitung des Moodle-MC-Tests bis 22. 11. 2022, 8:00 Uhr
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 29. 11. 2022, 23:59 Uhr

Aufgabe 28 Für eine Sprache L seien ***5 Punkte***

$$\begin{aligned} \min(L) &= \{x \in L \mid \text{kein Wort } y \in L \text{ ist echtes Präfix von } x\} \quad \text{und} \\ \max(L) &= \{x \in L \mid x \text{ ist kein echtes Präfix eines Wortes } y \in L\}, \end{aligned}$$

wobei x *echtes Präfix* von y ist, falls es ein $z \neq \varepsilon$ gibt mit $y = xz$. Weiter heißt eine Sprache L *präfixfrei*, falls kein Wort in L echtes Präfix eines anderen Wortes in L ist.

(a) Charakterisieren Sie die Präfixfreiheit mit Hilfe des min-Operators. *(mündlich)*

(b) Zeigen Sie: $L = \max(L) \Leftrightarrow L = \min(L)$. *(mündlich)*

(c) Zeigen Sie, dass die Klasse REG unter dem min-Operator abgeschlossen ist, d. h. für $L \in \mathsf{REG}$ folgt $\min(L) \in \mathsf{REG}$. *(mündlich)*

(d) Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ ein beliebiger DFA und $M' = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E')$ ein DFA für $\max(L(M))$. Geben Sie E' allgemein in Abhängigkeit von M an. *(3 Punkte)*

(e) Geben Sie $\min(L)$ für $L = \left\{a^n b^m \,\middle|\, 3 \text{ teilt } (n + m + 1)\right\}$ an. *(2 Punkte)*

Aufgabe 29 Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $x, y \in \Sigma^*$. ***8 Punkte***

Dann heiße x *Teilwort* von y ($x \sqsubseteq y$), falls $u, v \in \Sigma^*$ existieren mit $y = uxv$.

(a) Zeigen Sie, dass $\sqsubseteq$ eine Ordnung auf Σ^* ist. *(mündlich)*

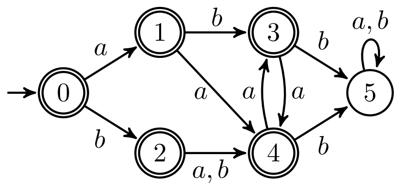
(b) Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm der Einschränkung $\sqsubseteq_A$ von $\sqsubseteq$ auf die Menge $A = \{a, b, aa, ab, ba, aab, abb, bba, aabba\}$ (Erinnerung $\sqsubseteq_A = \sqsubseteq \cap A \times A$). *(mündlich)*

(c) Bestimmen Sie alle größten, kleinsten, minimalen und maximalen Elemente von A in der Ordnung $(A, \sqsubseteq_A)$. *(2 Punkte)*

(d) Bestimmen Sie obere und untere Schranken sowie Supremum und Infimum von $H := \{abb, bba\}$ in der Ordnung $(A, \sqsubseteq_A)$ (sofern vorhanden). *(2 Punkte)*

(e) Gibt es eine Menge $B = \{m_1, \dots, m_9\}$ von endlichen Mengen m_i, sodass $(B, \subseteq)$ isomorph zu $(A, \sqsubseteq_A)$ ist? Falls ja, geben Sie B und einen Isomorphismus an, falls nein, begründen Sie, warum kein solches B existiert. *(4 Punkte)*

Aufgabe 30 Gegeben sei nebenstehender DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, 0, E)$. ***mündlich***



(a) Für $z \in Z$ sei $M_z = (Z, \Sigma, \delta, z, E)$. Geben Sie für alle $z \in Z$ die Sprachen $L(M_z)$ an.

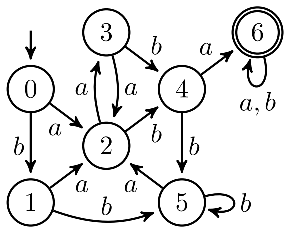
Hinweis: Bearbeiten Sie die Zustände z in absteigender Reihenfolge.

(b) Sei $\sim_M$ die Äquivalenzrelation auf Z mit $p \sim_M q \Leftrightarrow L(M_p) = L(M_q)$. Geben Sie die Äquivalenzklassen von $\sim_M$ und ein Repräsentantensystem an.

(c) Erinnerung: Es gilt $A \vartriangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Ein Wort $x \in L(M_p) \vartriangle L(M_q)$ heißt *Unterscheider* für p und q. Geben Sie je einen Unterscheider für 0 und 1, 2 und 3 sowie 0 und 5 an.

(d) Minimieren Sie M mit dem Algorithmus aus der Vorlesung.

Aufgabe 31 Gegeben sei nebenstehender DFA M. ***11 Punkte***



(a) Minimieren Sie M mit dem Algorithmus aus der Vorlesung und geben Sie dazu eine Tabelle mit Unterscheidern minimaler Länge an. *(8 Punkte)*

(b) Bestimmen Sie den Index der Verschmelzungsrelation $\sim_M$ und der Nerode-Relation $\sim_{L(M)}$ und geben Sie je ein Repräsentantensystem für $\sim_M$ und $\sim_{L(M)}$ an. *(3 Punkte)*

Aufgabe 32 ***6 Punkte***

Welche Aussagen stimmen für beliebige Sprachen A, B, C? Begründen Sie.

(a) $A, C \in \mathsf{REG}$ und $A \subseteq B \subseteq C \Rightarrow B \in \mathsf{REG}$. *(2 Punkte)*

(b) Wenn $A, B \in \mathsf{REG}$, dann ist $A \vartriangle B$ (symmetrische Differenz) regulär. *(2 Punkte)*

Hinweis: $A \vartriangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

(c) $ABC \in \mathsf{REG} \Leftrightarrow CBA \in REG$. *(2 Punkte)*

Bemerkung: Sie dürfen benutzen, dass $\left\{ a^n b^n \,\middle|\, n \geq 1 \right\} \notin \mathsf{REG}$. Nutzen Sie zudem Abschlusseigenschaften von REG.