Übungsblatt 4

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 15.–18. 11. 2022
Bearbeitung des Moodle-MC-Tests bis 15. 11. 2022, 8:00 Uhr
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 22. 11. 2022, 23:59 Uhr

Aufgabe 23 Seien Σ und Γ beliebige Alphabete. ***5 Punkte***

Eine Funktion $h\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ heißt *Homomorphismus*, falls

$$\forall x_1 \dots x_n \in \Sigma^+ : h(x_1 \dots x_n) = h(x_1) \dots h(x_n) \qquad \text{und} \quad h(\varepsilon) = \varepsilon.$$

D.h. h ersetzt Zeichen aus Σ durch Wörter aus Γ^*. Für Sprachen $L_1 \subseteq \Sigma^*$, $L_2 \subseteq \Gamma^*$ sei $h(L_1) = \{h(w) \mid w \in L_1\}$ und $h^{-1}(L_2) = \{w \mid h(w) \in L_2\}$.

(a) Betrachten Sie den Homomorphismus $h\colon \{a,b,c,d\}^* \to \{0,1\}^*$ mit $h(a) = 0$, $h(b) = 01$, $h(c) = 100$ und $h(d) = \varepsilon$. Bestimmen Sie $h(dabd)$ und $h(cc)$. Welche der Wörter 001100 und 10010 sind in $h(L_1)$ mit $L_1 = L((a|ab|cd)^*)$? Begründen Sie. Geben Sie zudem einen regulären Ausdruck γ mit $L(\gamma) = h(L_1)$ an. Geben Sie weiterhin $h^{-1}(L_2)$ mit $L_2 = \{0100\}$ an. *(mündlich)*

(b) Zeigen Sie, dass REG unter Homomorphismen abgeschlossen ist. D.h. für reguläres $L \subseteq \Sigma^*$ und Homomorphismus $h\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ ist auch $h(L)$ regulär. *(mündlich)*
(*Hinweis:* Konstruieren Sie einen regulären Ausdruck.)

(c) Zeigen Sie, dass REG unter inversen Homomorphismen abgeschlossen ist. D.h. für reguläres $L \subseteq \Gamma^*$ und einen Homomorphismus $h\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ ist auch die Sprache $h^{-1}(L)$ regulär. *(mündlich)*
(*Hinweis:* δ_M eines DFAs M wird zu $\delta_{M'}(q,a) = \widehat{\delta_M}(q, h(a))$.)

(d) Zeigen Sie, dass $L_0 = \{(bc)^n c^m a^n \mid n \geq 2, m \leq n\}$ nicht regulär ist, indem Sie nur Abschlusseigenschaften und $\{a^n b^n \mid n \geq 0\} \notin \mathsf{REG}$ nutzen. *(5 Punkte)*
(*Bemerkung:* $\{a^n b^n \mid n \geq 0\} \notin \mathsf{REG}$ wird später in der Vorlesung gezeigt.)

Aufgabe 24 Seien E_1 und E_2 Äquivalenzrelationen auf A. ***9 Punkte***

Sind dann auch $E_1 \cap E_2, E_1 \cup E_2, E_1 \circ E_2$ Äquivalenzrelationen? Welche der drei Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Transitivität bleiben jeweils erhalten, welche nicht? Begründen Sie.

Aufgabe 25 Auf $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ seien folgende Relationen definiert: ***8 Punkte***

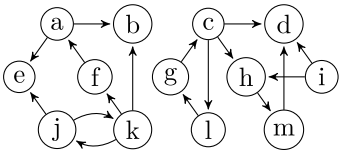
(a) $xRy :\Leftrightarrow x + 2y$ ist durch 3 teilbar, *(mündlich)*
(b) $xSy :\Leftrightarrow |x - y| \leq 7$, *(3 Punkte)*
(c) $xUy :\Leftrightarrow x + y$ ist gerade, *(5 Punkte)*

Welche dieser Relationen sind Äquivalenzrelationen? Begründen Sie. Geben Sie gegebenenfalls die Äquivalenzklassen und ein Repräsentantensystem an.

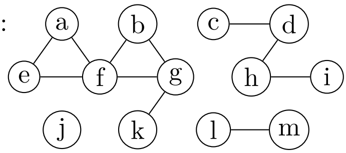
Aufgabe 26 ***mündlich***

Ein Digraph $G' = (V', R')$ heißt *Subgraph* (oder auch *Teilgraph*) des Digraphen $G = (V, R)$, falls $V' \subseteq V$ und $R' \subseteq R$ gilt. Die bzgl. Subgraphenordnung maximalen (stark) zusammenhängenden Subgraphen von G bezeichnen wir als die *(starken) Zusammenhangskomponenten* von G. Für zwei Knoten x und y gelte xZy (xSy), falls es eine (starke) Zusammenhangskomponente gibt, in der sowohl x als auch y liegen. Gegeben seien der Digraph $G_d = (V_d, R_d)$ und der Graph $G_u = (V_u, R_u)$.

G_d:



G_u:



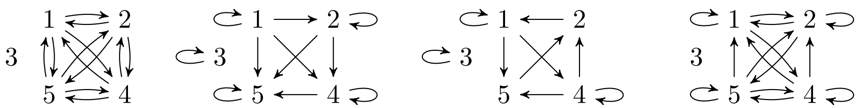
(a) Geben Sie die Knotenmengen der Zusammenhangskomponenten des Graphen G_u sowie der starken Zusammenhangskomponenten des Digraphen G_d an.

(b) Drücken Sie Z in G_u bzw. S für G_d durch die Kantenrelation R_d bzw. R_u aus.

(c) Geben Sie die Menge der Vorgänger $R_d^{-1}[k]$ und die der Nachfolger $R_d[k]$ von k in G_d sowie die Nachbarschaft $R_u[f]$ in G_u an.

Aufgabe 27 Gegeben seien die Digraphen $G_i = (A, R_i), i = 1, 2, 3, 4$: ***8 Punkte***

G_1 : G_2 : G_3 : G_4 :



(a) Geben Sie an, welche der Relationen R_i reflexiv sind. *(1 Punkt)*

(b) Geben Sie an, welche der Relationen R_i transitiv sind. *(1 Punkt)*

(c) Geben Sie an, welche der Relationen R_i konnex sind. *(1 Punkt)*

(d) Geben Sie an, welche der Relationen R_i symmetrisch sind. *(1 Punkt)*

(e) Geben Sie an, welche der Relationen R_i gleichzeitig antisymmetrisch und transitiv sind. *(1 Punkt)*

(f) Wie erkennt man jede der obigen Eigenschaften einer Relation R anhand einer gegebenen Darstellung als Graph $G = (A, R)$? Erläutern Sie. *(3 Punkte)*

Hinweis: Gesucht sind Definitionen der Form: „asymmetrisch: R ist genau dann asymmetrisch, wenn G keine Schleifen enthält und zwischen je zwei verschiedenen Knoten u und v höchstens eine der beiden Kanten existiert."