Einführung in die Komplexitätstheorie — WS 2021/22
Prof. Johannes Köbler — 26. Januar 2022

Übungsblatt 13

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 9. Februar 2022, 24:00 Uhr

Aufgabe 54 Zeigen Sie: ***mündlich***

(a) GI hat eine $\wedge_2$- und eine $\vee_2$-Funktion in FL.

(b) GA hat eine $\vee_2$-Funktion in FL.

Aufgabe 55 ***mündlich***

Eine k-**Färbung** eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine Abbildung $c\colon V \to \{1, \dots, k\}$. Ein Isomorphismus φ zwischen zwei gefärbten Graphen (G_1, c_1) und (G_2, c_2) darf einen Knoten u mit Farbe $c_1(u) = i$ nur auf Knoten v mit derselben Farbe $c_2(v) = i$ abbilden. Bezeichne ColGI das Graphenisomorphieproblem für gefärbte Graphen und bezeichne DirGI das Graphenisomorphieproblem für gerichtete Graphen. Zeigen Sie:

(a) ColGI, DirGI und GI sind logspace-äquivalent, d.h. es gilt ColGI $\equiv_m^{log}$ ColGI $\equiv_m^{log}$ GI.

(b) Das Graphenisomorphieproblem für Bäume liegt in P.

Aufgabe 56 Zeigen Sie: ***mündlich***

Das Primzahlproblem liegt in $\oplus\mathsf{P}$. (*Hinweis:* Auf wie viele Arten lässt sich eine quadratfreie Zahl n in zwei teilerfremde Faktoren zerlegen?)

Aufgabe 57 ***mündlich***

Für zwei gegebene Graphen $G_i = (V, E_i)$, $i = 1, 2$, bezeichne UGI das Problem, zu entscheiden, ob zwischen G_1 und G_2 genau ein Isomorphismus existiert. Zeigen Sie:

(a) $\overline{\text{GA}} \le_m^{log}$ UGI

(b) UGI $\in \mathsf{P}_{\|}^{\text{GA}[2]}$ (ob GI $\in \mathsf{P}^{\text{GA}}$ ist, ist nicht bekannt)

(c) GI $\in \mathsf{SCW}$ (d.h. GI hat selfcomputable witnesses)

(d) Für jedes Graphenpaar $(G_1, G_2) \in$ UGI lässt sich mit nichtadaptiven Orakelfragen an GA ein Isomorphismus in Polynomialzeit berechnen.

(e) GA $\le_d^{log}$ GI

Aufgabe 58 Zeigen Sie: ***mündlich***

(a) Die Anzahl der Automorphismen eines Turniergraphen ist ungerade.

(b) Das Graphenisomorphieproblem für Turniergraphen (d.h. beide Eingabegraphen müssen Turniergraphen sein) liegt in $\oplus\mathsf{P}$

Aufgabe 59 ***10 Punkte***

Sei GapP der Abschluss von $\#\mathsf{P}$ unter Subtraktion. Weiter sei SPP die Klasse aller Sprachen, deren charakteristische Funktion in GapP berechenbar ist, und für eine NTM N bezeichne $\#_{rej}N(x)$ die Anzahl der verwerfenden Berechnungen von $N(x)$. Zeigen Sie:

(a) Eine Funktion g liegt genau dann in GapP, wenn es eine NP-TM N mit $g(x) = \#N(x) - \#_{rej}N(x)$ gibt.

(b) Eine Sprache A liegt genau dann in $\oplus\mathsf{P}$, wenn es eine Funktion $g \in \mathsf{GapP}$ gibt mit $A(x) \equiv_2 g(x)$.

(c) Eine Sprache A liegt genau dann in PP, wenn es eine Funktion $g \in \mathsf{GapP}$ gibt mit $x \in A \Leftrightarrow g(x) > 0$.

(d) GapP besitzt alle in der Vorlesung für $\#\mathsf{P}$ bewiesenen Abschlusseigenschaften (siehe Lemma 119).

(e) $\mathsf{SPP} = \{A \mid \mathsf{GapP}^A = \mathsf{GapP}\}$.