Übungsblatt 12

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 2. Februar 2022, 24:00 Uhr

Aufgabe 49 Sei $A \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache mit $\# \notin \Sigma$. ***mündlich***

f heißt ***unbeschränkte und-Funktion*** (kurz ***$\wedge$-Funktion***) für A, falls für alle $x_1, \ldots, x_k \in \Sigma^*$ gilt:

$$f(x_1\# \cdots \# x_k) \in A \quad \Leftrightarrow \quad \forall i = 1, \ldots, k : x_i \in A.$$

Im Fall $k = 2$ nennen wir f eine ***und-Funktion*** (kurz ***$\wedge_2$-Funktion***). Die Begriffe der ***(unbeschränkten) oder-Funktion*** und der ***nicht-Funktion*** (kurz ***$\neg$-Funktion***) sind analog definiert. Zeigen Sie:

(a) $\textsc{Sat}$, $\textsc{Taut}$ und $\oplus\textsc{Sat}$ haben $\wedge$- und $\vee$-Funktionen in FL.

(b) $\oplus\textsc{Sat}$ hat auch eine $\neg$-Funktion in FL.

Aufgabe 50 Seien g, h Funktionen. ***mündlich***

g heißt ***parsimonious reduzierbar*** auf h (kurz $g \le_{par} h$), falls eine Funktion $f \in \mathsf{FL}$ existiert, so dass für alle x gilt: $g(x) = h(f(x))$.

(a) Zeigen Sie, dass folgende auf der Menge aller booleschen Formeln definierte Funktion $\#\textsc{Sat}$ vollständig für die Klasse $\#\mathsf{P}$ unter parsimonious Reduktionen ist:

$$\#\textsc{Sat} : F(x_1, \cdots, x_n) \mapsto |\{a \in \{0,1\}^n \mid F(a) = 1\}|$$

(b) Folgern Sie, dass $\oplus\textsc{Sat}$ vollständig für $\oplus\mathsf{P}$ ist.

Aufgabe 51 Zeigen Sie: ***mündlich***

(a) $\mathsf{P}^{\textsc{Sat}[k]} \subseteq \mathsf{P}_{\|}^{\textsc{Sat}[2^k-1]}$

(b) $\mathsf{P}_{\|}^{\textsc{Sat}[2^k-1]} \subseteq \mathsf{P}^{\textsc{Sat}[k+1]}$ (*Hinweis:* Benutzen Sie die NP-Sprache $B = \{(F_1, \ldots, F_\ell, j) \mid |\{i \mid F_i \in \textsc{Sat}\}| \ge j\}$.)

(c) $\mathsf{P}_{\|}^{\textsc{Sat}[2^k-1]} = \mathsf{P}^{\textsc{Sat}[k]}$

(d) $\mathsf{P}_{\|}^{\mathsf{NP}} = \mathsf{P}^{\mathsf{NP}[\mathcal{O}(\log n)]}$

(e) $\mathsf{FP}_{\|}^{\mathsf{NP}} = \mathsf{FP}^{\mathsf{NP}[\mathcal{O}(\log n)]} \Rightarrow \mathsf{NP} = \mathsf{RP}$ (*Hinweis:* Überlegen Sie, warum eine erfüllende Belegung für eine Formel in $\textsc{USat}$ in $\mathsf{FP}_{\|}^{\mathsf{NP}}$ berechenbar ist, und benutzen Sie den Satz von Valiant und Vazirani.)

Aufgabe 52 Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ sei ***mündlich***

$$\mathit{perm}(L) = \{y \in \Sigma^* \mid y \text{ ist Permutation eines Wortes } x \in L\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Für jede Sprache L existiert eine tally Sprache $T_L \in \mathsf{TALLY}$ mit $\mathit{perm}(L) \le_m^{log} T_L$.

(b) Zu jeder tally Sprache $T \in \mathsf{TALLY} \cap \mathsf{NP}$ gibt es eine Sprache $B \in \mathsf{P}$, so dass T disjunktiv auf $\mathit{perm}(B)$ reduzierbar ist.

Hinweis: Benutzen Sie die Charakterisierung $\mathsf{NP} = \exists^p \cdot \mathsf{P}$.

(c) P ist genau dann unter perm abgeschlossen, wenn $\mathsf{E} = \mathsf{NE}$ gilt.

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 15.

Aufgabe 53 ***10 Punkte***

Sei $\mathcal{C}$ eine unter $\le_m^{log}$-Reduktionen abgeschlossene Sprachklasse und sei A ein $\mathcal{C}$-vollständiges Problem. Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{C}$ ist genau dann unter Durchschnitt (bzw. Vereinigung, Komplement) abgeschlossen, wenn A eine $\wedge_2$-Funktion (bzw. $\vee_2$-Funktion, $\neg$-Funktion) in FL hat.

(b) NP, $\mathsf{co\text{-}NP}$ und $\mathsf{NP} \cap \mathsf{co\text{-}NP}$ sind unter Schnitt und Vereinigung abgeschlossen.

(c) $\mathsf{NP} \cup \mathsf{co\text{-}NP}$ ist nicht unter Schnitt (oder Vereinigung) abgeschlossen, außer wenn $\mathsf{NP} = \mathsf{co\text{-}NP}$ ist.