

Übungsblatt 11

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 26. Januar 2022, 24:00 Uhr

Aufgabe 45 Zeigen Sie:

mündlich

- (a) Für alle Orakel A gilt $\text{NTIME}^A(t(n)) \subseteq \text{DSPACE}^{\text{strong}(A)}(O(t(n)))$.
- (b) Für alle Orakel A gilt $\text{DSPACE}^A(s(n)) \subseteq \text{DTIME}^A(2^{O(s(n)+\log n)})$.
- (c) Es gibt ein Orakel B mit $\text{NL}^B \not\subseteq \text{P}^B$, das heißt, die Inklusion $\text{NSPACE}(s(n)) \subseteq \text{DTIME}(2^{O(s(n)+\log n)})$ relativiert nicht.

Hinweis: Benutzen Sie das Orakel B aus der Vorlesung mit $\text{P}^B \neq \text{NP}^B$.

- (d) Es gibt ein Orakel B mit $\text{NL}^B \not\subseteq \text{DSPACE}^B(\mathcal{O}(\log^2(n)))$, das heißt, der Satz von Savitch relativiert nicht.

Hinweis: Konstruieren Sie ein Orakel B mit $\{0^n \mid B \cap \{0, 1\}^n \neq \emptyset\} \notin \text{DTIME}^B(n^{O(\log(n))})$ und benutzen Sie Teilaufgabe (b).

Aufgabe 46

mündlich

Eine Sprache $S \subseteq \Sigma^*$ heißt *sparse* (kurz $S \in \text{SPARSE}$), falls für ein Polynom p und alle n gilt: $\|S \cap \Sigma^n\| \leq p(n)$. Sprachen $T \subseteq \{1\}^*$ heißen *tally* (kurz $T \in \text{TALLY}$). Zeigen Sie:

$$\text{P/poly} = \text{P}(\text{SPARSE}) = \text{P}(\text{TALLY}).$$

Aufgabe 47 Zeigen Sie:

mündlich

- (a) Für jedes Orakel A gilt $\# \cdot \text{P}^A = \#\text{P}^A$ und $\oplus \cdot \text{P}^A = \oplus\text{P}^A$.
- (b) USAT ist in der Klasse $\text{D}^{\text{P}} = \{A \setminus B \mid A, B \in \text{NP}\}$ enthalten und hart für $\text{UP} \cup \text{co-NP}$.
- (c) $\#\text{P}^A = \#\text{P} \Leftrightarrow A \in \text{UP} \cap \text{co-UP}$.
- (d) $\exists^{\text{P}} \cdot \text{L} = \text{NL} \Leftrightarrow \text{PH} = \text{NL}$.

Aufgabe 48 Zeigen Sie:

10 Punkte

- (a) Es gibt ein Orakel A mit $\text{P}^A \neq \text{NP}^A \neq \text{co-NP}^A$.
- (b) Es gibt ein Orakel B mit $\text{L}^B \neq \text{NL}^B \neq \text{co-NL}^B$.
- (c) Es gibt ein Orakel C mit $C \in \text{L}^{\text{det}(C)} \setminus \text{NL}^{\text{strong}(C)}$.
- (d) Es gilt

$$\begin{aligned} \text{L} = \text{NL} &\Leftrightarrow \forall A : \text{L}^{\text{det}(A)} = \text{NL}^{\text{det}(A)} \\ &\Leftrightarrow \forall A : \text{L}^{\text{strong}(A)} = \text{NL}^{\text{strong}(A)} \end{aligned}$$