Übungsblatt 10

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 19. Januar 2022, 24:00 Uhr

Aufgabe 42 Zeigen Sie: ***mündlich***

(a) PSPACE ist unter allen Operatoren in $\{\exists^p, \forall^p, \mathsf{R}, \mathsf{BP}, \exists^{\geq 1/2}, \oplus\}$ abgeschlossen und daher gilt PH, $\oplus \cdot \mathsf{P}$, $\mathsf{PP} \subseteq \mathsf{PSPACE}$.

(b) $\mathsf{PH} \subsetneq \mathsf{PSPACE}$, außer wenn PH kollabiert.

Aufgabe 43 ***mündlich***

Eine ***Offline-Orakelturingmaschine*** (kurz ***Offline-OTM***) ist eine Offline-TM mit einem zusätzlichen write-only Orakelband. Der Platzverbrauch einer Offline-OTM M ist genauso definiert wie bei einer Offline-TM, wobei das Orakelband unberücksichtigt bleibt. Sei $L = L(M^A)$ die von einer $s(n)$-platzbeschränkten Offline-OTM M mit Orakel A erkannte Sprache.

Wir sagen, M ***stellt ihre Fragen deterministisch*** und schreiben $L = L(M^{det(A)})$, wenn jede Teilrechnung von M beginnend mit der Ausgabe des jeweils ersten Zeichens auf dem Orakelband bis zum Übergang in den Fragezustand deterministisch ist.

Falls M auch unter Berücksichtigung des Orakelbandes $s(n)$-platzbeschränkt ist, nennen wir M ***streng s(n)-platzbeschränkt*** und schreiben $L = L(M^{strong(A)})$.

Entsprechend erhalten wir die relativierten Klassen $\mathsf{DSPACE}^A(s(n))$, $\mathsf{DSPACE}^{det(A)}(s(n))$ und $\mathsf{DSPACE}^{strong(A)}(s(n))$, sowie $\mathsf{NSPACE}^A(s(n))$, $\mathsf{NSPACE}^{det(A)}(s(n))$ und $\mathsf{NSPACE}^{strong(A)}(s(n))$. Zeigen Sie:

(a) $\mathsf{DSPACE}^{strong(A)}(s(n)) \subseteq \mathsf{DSPACE}^{det(A)}(s(n)) = \mathsf{DSPACE}^A(s(n))$.

(b) $\mathsf{NSPACE}^{strong(A)}(s(n)) \subseteq \mathsf{NSPACE}^{det(A)}(s(n)) \subseteq \mathsf{NSPACE}^A(s(n))$.

(c) Für jedes Orakel A gilt $\mathsf{L}^A \subseteq \mathsf{NL}^{det(A)} \subseteq \mathsf{P}^A$ und $\mathsf{NL}^A \subseteq \mathsf{NP}^A$.

Aufgabe 44 ***10 Punkte***

Eine NP-Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ hat *selfcomputable witnesses* ($A \in \mathsf{SCW}$), falls eine (k,p)-balancierte Sprache $B \in \mathsf{P}$ und ein polynomiell zeitbeschränkter Orakeltransducer M existieren mit

- $A = \exists^p B$, d.h. $\forall x \in \Sigma^* : x \in A \Leftrightarrow \exists y \in \Gamma_k^{p(|x|)} : x\#y \in B$,
- für jede Eingabe $x \in A$ erzeugt M^A eine Ausgabe $M^A(x)$ der Länge $p(|x|)$ mit $x\#M^A(x) \in B$.

Wir sagen auch, M^A berechnet eine witness-Funktion für A (bzgl. B). Zeigen Sie:

(a) $\textsc{Sat} \in \mathsf{SCW}$.

(b) Jede NP-vollständige Sprache besitzt *selfcomputable witnesses*.

(c) Jede Sprache $A \in \mathsf{PSK} \cap \mathsf{SCW}$ hat eine witness-Funktion in PSK, d.h. es existieren ein Polynom p, eine $(2,p)$-balancierte Sprache $B \in \mathsf{P}$ und eine Folge c_n von booleschen Schaltkreisen polynomieller Größe mit $p(n)$ Ausgängen, so dass $A = \exists^p B$ ist und für alle n und alle $x \in A$ der Länge n gilt: $x\#c_n(bin(x)) \in B$.