Einführung in die Komplexitätstheorie WS 2021/22
Prof. Johannes Köbler 8. Dezember 2021

Übungsblatt 8

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 5. Januar 2022, 24:00 Uhr

Aufgabe 36 *mündlich*

Sei $\rho \in [0,1]$ eine reelle Zahl. Eine ρ-PTM ist eine PTM M, die eine ρ-Münze benutzt: Jede Konfiguration von M hat höchstens zwei Folgekonfigurationen und es gilt $\Pr[K \to_M K'] \in \{0, \rho, 1-\rho, 1\}$ für alle Konfigurationen K, K' von M. Ersetzen wir in der Definition von PP, BPP, RP und ZPP PTMs durch ρ-PTMs, so führt dies auf die Klassen PP_ρ, BPP_ρ, RP_ρ und ZPP_ρ. Zeigen Sie:

(a) Für $\rho \in \{0,1\}$ gilt $\mathsf{PP}_\rho = \mathsf{BPP}_\rho = \mathsf{RP}_\rho = \mathsf{ZPP}_\rho = \mathsf{P}$.

(b) Für $\rho \in (0,1)$ kann jede PTM M durch eine ρ-PTM M' mit derselben Akzeptanzwahrscheinlichkeit in erwarteter Laufzeit $\mathcal{O}(\mathrm{time}_M(x))$ simuliert werden.

(c) Jede ρ-PTM M kann durch eine PTM M' mit derselben Akzeptanzwahrscheinlichkeit in erwarteter Laufzeit $\mathcal{O}(\mathrm{time}_M(x))$ simuliert werden, falls ρ P-berechenbar ist (d.h. das n-te Bit b_n der Binärrepresentation $0.b_1b_2\ldots$ von ρ ist in Zeit $n^{\mathcal{O}(1)} + \mathcal{O}(1)$ berechenbar).

(d) Für jedes P-berechenbare $\rho \in (0,1)$ gilt $\mathsf{BPP} = \mathsf{BPP}_\rho$ (entsprechend für RP und ZPP).

(e) Es gibt Zahlen $\rho \in (0,1)$ mit $\mathsf{PP} \neq \mathsf{PP}_\rho$ (sogar $\mathsf{PP}_\rho \not\subseteq \mathsf{RE}$).

Hinweis: Betrachten Sie die Sprachen $L_\rho := \{0^n 1^i \mid \Pr[X_\rho^n \leq i] \geq \frac{1}{2}\}$, wobei X_ρ^n binomialverteilt mit Parametern n, ρ ist und benutzen Sie, dass für den Median $\mathrm{med}(X_\rho^n)$ von X_ρ^n die Ungleichung $|\mathrm{med}(X_\rho^n) - n\rho| < \ln 2$ gilt.

Aufgabe 37 *mündlich*

Zeigen Sie, dass aus $\mathsf{NP} \subseteq \mathsf{BPP}$ die Gleichheit $\mathsf{NP} = \mathsf{RP}$ folgt.

Hinweis: Benutzen Sie eine BPP-TM für Sat, um für eine gegebene Formel $F \in$ Sat mit hoher Wahrscheinlichkeit eine erfüllende Belegung zu finden.

Aufgabe 38 *10 Punkte*

Betrachten Sie folgenden probabilistischen Algorithmus.

Algorithmus: RandomWalk

```
Input: KNF-Formel F(x_1, ..., x_n), n ≥ 1, ohne Einerklauseln
  wähle eine beliebige Belegung a für F
  while F(a) = 0 do
    wähle eine beliebige Klausel C von F mit C(a) = 0
    wähle zufällig ein Literal l in C
    flippe den Wert von a(l)
Output: a
```

Sei F eine 2-KNF-Formel (o.B.d.A. ohne Einerklauseln) und sei h eine Belegung der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ mit $F(h) = 1$. Zeigen Sie, dass die erwartete Laufzeit von RandomWalk(F) polynomiell beschränkt ist.
Hinweis: Zeigen Sie folgende Abschätzungen für die maximale erwartete Anzahl t_i von Schleifendurchläufen, falls die Anfangsbelegung a in höchstens i Variablen von h abweicht:

1. $t_0 = 0$,
2. $t_n \leq t_{n-1} + 1$,
3. $t_i \leq 1 + (t_{i-1} + t_{i+1})/2$ für $i = 1, \ldots, n-1$,
4. $t_i \leq i(2n - i)$ für $i = 0, \ldots, n$.