Übungsblatt 2

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 9. November 2021, 15:00 Uhr

Aufgabe 7 (Blum-Komplexität) — ***mündlich***

Eine partielle Funktion Φ, die (geeignete Kodierungen von) TMs M und Eingaben x in die natürlichen Zahlen abbildet, heißt **Komplexitätsmaß**, falls sie folgende Axiome erfüllt:

Axiom 1: $\Phi(M, x)$ ist genau dann definiert, wenn $M(x)$ hält.
Axiom 2: Die Frage, ob $\Phi(M, x) = m$ gilt, ist entscheidbar.

Welche der folgenden Funktionen sind Komplexitätsmaße?

(a) $\mathrm{time}_M(x)$ und $\mathrm{space}_M(x)$ für DTMs und NTMs.
(b) $\mathit{ink}_M(x)$: Anzahl der Ersetzungen eines Symbols durch ein anderes Symbol.
(c) $\mathit{carbon}_M(x)$: Anzahl der Ersetzungen eines Symbols durch das ***gleiche*** Symbol.

Dabei sollen $\mathit{ink}_M(x)$ und $\mathit{carbon}_M(x)$ (wie $\mathrm{space}_M(x)$) nur dann definiert sein, wenn $M(x)$ nur Rechnungen endlicher Länge ausführt.

Aufgabe 8 — ***mündlich***

Sei M eine DTM. Für jedes Wort $x \in \{0,1\}^*$, für das eine Eingabe $y \in \{0,1\}^*$ mit $M(y) = x$ existiert, bezeichne

$$K_M(x) = \min\{|y| \mid y \in \{0,1\}^*, M(y) = x\}$$

die **Kolmogorov-Komplexität** von x bezüglich M. Zeigen Sie:

(a) Es gibt eine DTM U, so dass für jede DTM M eine Konstante c existiert, so dass für alle Wörter $x \in \{0,1\}^*$ gilt: $K_U(x) \le K_M(x)+c$.

Hinweis: Benutzen Sie eine universelle Turingmaschine.
Für die folgenden Teilaufgaben definieren wir $K(x) = K_U(x)$.

(b) Es gibt eine Konstante c, so dass für alle Wörter $x \in \{0,1\}^*$ gilt: $K(x) \le |x| + c$.
(c) Für alle $n \ge 0$ gibt es ein Wort x der Länge n mit $K(x) \ge n$.
(d) Geben Sie (möglichst enge) untere und obere Schranken für $K(0^n)$ an.

Aufgabe 9 — ***mündlich***

Betrachten Sie die Menge der Palindrome $L = \{x \in \Sigma^* \mid x = x^R\}$, wobei x^R das Wort x in umgekehrter Reihenfolge ist. Beschreiben Sie sowohl eine *1*-DTM M als auch eine *2*-DTM M', die L entscheidet. Vergleichen Sie die Rechenzeiten von M und M'.

Aufgabe 10 — ***10 Punkte***

Wir möchten zeigen, dass jede *1*-DTM M mit $L(M) = \{x \in \{0,1\}^* \mid x = x^R\}$ Zeit $\Omega(n^2)$ benötigt. Führt M eine Konfiguration (q, u, av) in die Konfiguration (q', u', v') über, so heißt dieser Übergang **Überquerung** der Feldgrenze zwischen Feld i und Feld $i+1$ (kurz ***i*-Überquerung**), falls $\{|u|, |u'|\} = \{i, i+1\}$ gilt. Überquert $M(x)$ die Feldgrenze zwischen Feld i und Feld $i+1$ insgesamt m-mal und wechselt M bei diesen Überquerungen der Reihe nach in die Zustände $q_1, \dots, q_m$, so heißt $S_i(M, x) = q_1, \dots, q_m$ die ***i*-Überquerungsfolge** (engl. crossing-sequence) bei Eingabe x.

Für $y \in \{0,1\}^n$ sei $t(y) = \mathrm{time}_M(y0^ny^R)$ der Zeitverbrauch von M bei Eingabe des Palindroms $x = y0^ny^R$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt ein $i \in \{n, \dots, 2n\}$, so dass $S_i(M, x)$ eine Länge $\le \frac{t(y)}{n}$ hat.
(b) Für jedes $i \in \{n, \dots, 2n\}$ ist das Wort y eindeutig durch Angabe von M, $S_i(M, x)$, n und i beschreibbar.
(c) Es gibt eine Konstante c mit $K(y) \le c\left(\frac{t(y)}{|y|} + \log|y|\right)$.
(d) M benötigt Zeit $\Omega(n^2)$ (*Hinweis:* Benutzen Sie Teilaufgabe 8(c)).