

## Übungsblatt 1

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 2. November 2021, 15:00 Uhr

### Aufgabe 1

*mündlich*

Betrachten Sie eine TSP-Instanz mit  $n$  Städten und Entfernungen  $d_{ij} \geq 0$ . Wir definieren für jede Menge  $S$  von Städten (mit  $1 \notin S$ ) und für jedes  $j \in S$  den Wert  $c[S, j]$  als den kürzesten Weg von 1 nach  $j$ , der jede Stadt in  $S \cup \{1\}$  genau einmal besucht.

- Geben Sie einen Algorithmus an, der alle  $c[S, j]$  mit dynamischer Programmierung berechnet, also von kleinen auf große Stadtmengen  $S$  schließt.
- Benutzen Sie diesen Algorithmus, um das TSP in Zeit  $\mathcal{O}(n^2 2^n)$  zu lösen. Welchen Platzbedarf hat der resultierende Algorithmus?

### Aufgabe 2

*mündlich*

Eine Turingmaschine heißt **blind** (engl. *oblivious*: vergesslich, blind), falls ihre Kopfpositionen zu jedem Zeitpunkt  $t$  der Rechnung nur von  $t$  abhängen.

- Zeigen Sie, dass jede Turingmaschine  $M$  von einer blinden Turingmaschine  $M'$  simuliert werden kann.
- Geben Sie eine obere Schranke für die Rechenzeit  $\text{time}_{M'}(x)$  von  $M'$  in Abhängigkeit von  $\text{time}_M(x)$  an.

### Aufgabe 3

*mündlich*

Betrachten Sie eine Turingmaschine  $M$ , die ein **zweidimensionales** Band zur Verfügung hat. Der Schreib-Lesekopf kann sich also auch nach oben und unten bewegen.

- Von welcher Form ist die Überföhrungsfunktion von  $M$ ?
- Zeigen Sie, wie eine solche Turingmaschine durch eine DTM  $M'$  simuliert werden kann.

### Aufgabe 4

*mündlich*

Zeigen Sie:

- Jede  $t(n)$ -zeitbeschränkte  $k$ -DTM  $M$  kann von einer  $1$ -DTM  $M'$  in Zeit  $\mathcal{O}(t(n)^2)$  simuliert werden.
- Jede Sprache, die von einer  $k$ -NTM  $N$  in  $f(n)$  vielen Schritten entschieden wird, kann auch von einer  $2$ -NTM  $N'$  in  $\mathcal{O}(f(n))$  vielen Schritten entschieden werden.
- Überlegen Sie, wie sich die Simulation einer  $t(n)$ -zeitbeschränkten  $k$ -DTM  $M$  bei Verwendung einer  $2$ -DTM ebenfalls effizienter gestalten ließe?

### Aufgabe 5

*mündlich*

Sei  $M$  eine DTM, die für mindestens eine Eingabelänge  $n$  nach  $\leq n + 1$  Schritten hält. Was lässt sich daraus für die Komplexität von  $L(M)$  schließen?

### Aufgabe 6

**10 Punkte**

Bestimmen Sie für alle Paare  $f_i, f_j$  der Funktionen

$$f_1(n) = n^2, f_2(n) = n^3, f_3(n) = n^2 \log n, f_4(n) = 2^n, f_5(n) = n^n, \\ f_6(n) = n^{\log n}, f_7(n) = 2^{2^n}, f_8(n) = 2^{2^{n+1}} \text{ und } f_9(n) = \begin{cases} n^2 & n \text{ gerade,} \\ 2^n & n \text{ sonst,} \end{cases}$$

ob

- $f_i(n) \in O(f_j(n))$ ,
- $f_i(n) \in \Omega(f_j(n))$ , oder
- $f_i(n) \in \Theta(f_j(n))$  gilt.