Humboldt-Universität zu Berlin
Prof. Dr. Johannes Köbler

Übungsblatt 8

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 15. 1. 2021
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 19. 1. 2021, 23:59 Uhr

Aufgabe 49 ***mündlich***

Angenommen, Alice verwendet das ElGamal-Signaturverfahren und möchte bei der Berechnung der beim Signieren verwendeten Zufallszahlen Zeit sparen, indem sie ein z_0 wählt und die i-te Nachricht unter Verwendung von $z_i \equiv_{p-1} z_0 + 2i$ signiert. (Es gilt also $z_i \equiv_{p-1} z_{i-1} + 2$.)

(a) Zeigen Sie, wie Bob bei Kenntnis von zwei aufeinander folgenden signierten Nachrichten $(x_i, sig(x_i, z_i))$ und $(x_{i+1}, sig(x_{i+1}, z_{i+1}))$ den privaten Schlüssel a berechnen kann, ohne einen diskreten Logarithmus zu berechnen.
Bemerkung: Für diesen Angriff muss der Wert von i nicht bekannt sein.

(b) Führen sie den Angriff durch, wenn Bob die Werte $p = 28703$, $\alpha = 5$, $\beta = 11339$, $x_i = 12000$, $sig(x_i, z_i) = (26530, 19862)$, $x_{i+1} = 24567$ und $sig(x_{i+1}, z_{i+1}) = (3081, 7604)$ kennt.

Aufgabe 50 ***mündlich***

Betrachten Sie die folgende Variante des ElGamal-Signaturverfahrens. Die Schlüssel werden ähnlich wie beim ElGamal-Signaturverfahren generiert: p ist prim, α ist ein Erzeuger von $\mathbb{Z}_p^*$, a ist der geheime Exponent und $\beta = \alpha^a \bmod p$. Allerdings wird a jetzt aus $\mathbb{Z}_{p-1}^*$ (anstelle von $\mathbb{Z}_{p-1}$) gewählt. Ein Text $x \in \mathbb{Z}_{p-1}$ wird unter $\hat{k} = (p, \alpha, a)$ mit $sig(\hat{k}, x, z) = (\gamma, \delta)$ signiert, wobei gilt:

$$\gamma = \alpha^z \bmod p \text{ und } \delta = (x - z\gamma)a^{-1} \bmod (p-1) \ .$$

Dieses Verfahren unterscheidet sich also auch in der Berechnung von δ.

(a) Beschreiben Sie, wie sich die Unterschrift (γ, δ) eines Textes x bei Kenntnis des Verifikationsschlüssels $k = (p, \alpha, \beta)$ verifizieren lässt.

(b) Welchen Vorteil bei der Berechnung der Signatur besitzt diese Variante gegenüber dem ursprünglichen Verfahren?

Aufgabe 51 ***mündlich***

(a) Falls sich bei der Berechnung einer ElGamal-Signatur der Wert $\delta = 0$ ergibt, muss eine neue Zufallszahl z gewählt werden. Überlegen Sie, wie sich aus einer ElGamal-Signatur (γ, δ) mit $\delta = 0$ und dem öffentlichen Verifikationsschlüssel der geheime Signaturschlüssel berechnen lässt.

(b) Beim DSA muss auch im Fall $\gamma = 0$ eine neue Zufallszahl z gewählt werden. Überlegen Sie, wie aus einer DSA-Signatur (γ, δ) mit $\gamma = 0$ die benutzte Zufallszahl z bestimmt werden kann, und wie sich daraus für einen beliebigen Text x eine gefälschte Signatur (γ, δ) mit $\gamma = 0$ erhalten lässt.

Aufgabe 52 ***mündlich***

(a) Betrachten Sie folgende Angriffsmöglichkeit auf DSA: Für einen gegebenen Text x sei $w = x^{-1} \bmod q$ und $\epsilon \equiv_p \beta^w$. Nehmen Sie an, dass $\gamma, \lambda \in \mathbb{Z}_q^*$ mit

$$(\alpha\epsilon^\gamma)^{\lambda^{-1} \bmod q} \bmod p \equiv_q \gamma$$

gefunden werden können. Zeigen Sie, dass (γ, δ) für $\delta \equiv_q \lambda x$ eine gültige Signatur für x ist.

(b) Beschreiben sie eine ähnliche Angriffsmöglichkeit auf ECDSA.

Aufgabe 53 ***mündlich***

Sei E die durch $y^2 = x^3 + x + 26$ über $\mathbb{Z}_{127}$ definierte elliptische Kurve mit $\|E\| = 131$ Elementen. Betrachten Sie ECDSA in E mit $A = (2, 6)$ und $m = 54$.

(a) Berechnen Sie den öffentlichen Schlüssel $B = mA$.

(b) Berechnen Sie die Signatur für die Nachricht $x = 10$ unter Verwendung der Zufallszahl $z = 75$.

(c) Prüfen Sie die Verifikationsbedingung für die in (b) berechnete Signatur.

Aufgabe 54 ***mündlich***

Was wären die Folgen, wenn man beim ECDSA-Signaturverfahren Signaturen (γ, δ) mit $\gamma = 0$ oder $\delta = 0$ zulassen würde?

Aufgabe 55 ***10 Punkte***

Bei der Verifikation einer Signatur im ElGamal-Signaturverfahren (oder einer seiner Varianten) ist es nötig, einen Wert der Form $\alpha^e\beta^d$ zu berechnen. Wenn e und d zufällige ℓ-Bit-Exponenten sind, würde die naheliegende Implementierung durch wiederholtes Quadrieren und Multiplizieren (im Durchschnitt) jeweils $\ell/2$ Multiplikationen und ℓ Quadrierungen benötigen. Das Ziel dieser Aufgabe ist es, $\alpha^e\beta^d$ effizienter zu berechnen.

(a) Beschreiben Sie eine Variante des wiederholten Quadrierens und Multiplizierens, bei der in jeder Iteration höchstens eine Multiplikation nötig ist, wenn das Produkt $\alpha\beta$ schon im Voraus berechnet wurde.

(b) Sei $e = 26$ und $d = 17$. Zeigen Sie, wie Ihr Algorithmus $\alpha^e\beta^d$ berechnet, indem Sie für jede Runde die Exponenten i und j des Zwischenergebnisses $z = \alpha^i\beta^j$ angeben.

(c) Begründen Sie, warum Ihr Algorithmus im Durchschnitt ℓ Quadrierungen und $3\ell/4$ Multiplikationen benötigt, wenn e und d zufällige ℓ-Bit-Zahlen sind.

(d) Schätzen Sie den Geschwindigkeitsgewinn im Vergleich zum ursprünglichen Algorithmus ab, bei dem α^e und β^d unabhängig voneinander berechnet und am Schluss multipliziert werden. Nehmen Sie an, dass Quadrieren und Multiplizieren ungefähr gleich viel Zeit brauchen.