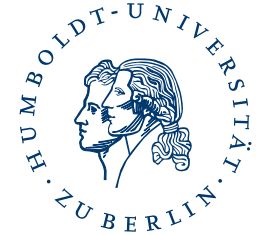
Kryptologie

Johannes Köbler



Institut für Informatik
Humboldt-Universität zu Berlin

WS 2020/21

Organisatorisches

Aktuelle Infos auf der VL-Webseite unter

- *https://hu.berlin/vlkrypto*

bzw.

- *https://www.informatik.hu-berlin.de/de/forschung/gebiete/algorithmenII/Lehre/ws20/krypto*

Ablauf

Skript, Folien und Aufgabenblätter

- Skript, Folien und Aufzeichnung werden jeweils nach der Vorlesung ins Netz (Webseite bzw. Moodle) gestellt
- Übungsblätter werden in der Regel dienstags veröffentlicht
- Die Besprechung der mündlichen Aufgaben erfolgt am Freitag der Folgewoche. Lösungen dazu können bis zum Tag davor in Moodle hochgeladen werden, Details siehe dort
- Die schriftlichen Aufgaben sind bis Dienstag zwei Wochen nach Ausgabe um 23:59 Uhr abzugeben
- Fragen zu Übung und Vorlesung können im Moodle-Forum auch asynchron gestellt und diskutiert werden

Übungen

Anmeldung

- über Agnes
- und bei Moodle (wegen Punktevergabe und Bildung von Abgabegruppen)
- Mails von Agnes und von Moodle werden standardmäßig an den HU-Account gesendet (bitte regelmäßig checken)

Ausgabe der Aufgabenblätter

- über Moodle und auf der VL-Webseite

Abgabe von Lösungen

- digital über Moodle

Bearbeitung der Übungsaufgaben

- in Gruppen von bis zu drei Teilnehmern
- Lösungen für die schriftlichen Aufgaben sollten als PDF abgegeben werden
- die Abgabe von Lösungsvorschlägen für die mündlichen Aufgaben ist freiwillig und geht nicht in die Punktewertung ein
- Lösungsvorschläge für die mündlichen Aufgaben können auch per Texteingabe gemacht werden
- besonders gut gelungene Lösungen werden mit Zustimmung der/des Abgebenden im Forum veröffentlicht

Übungsschein und Prüfung

Scheinkriterien

- Lösen von mindestens 50% der schriftlichen Aufgaben

Prüfungsform

- voraussichtlich mündlich
- Der Übungsschein ist ***nicht*** Prüfungsvoraussetzung

Gibt es zum organisatorischen Ablauf noch Fragen?

Lernziele

- Kryptografische Verfahren schaffen Vertrauen in ungeschützten Umgebungen
- Sie ermöglichen sichere Kommunikation über unsichere Kanäle und können verhindern, dass sich ein Kommunikationspartner unfair verhält
- In unsicheren Umgebungen wie dem Internet können sie die aus direkter Interaktion gewohnte Sicherheit herstellen
- Und auch die Interaktion in sicheren Umgebungen wird um Möglichkeiten erweitert, die ohne Kryptografie nicht denkbar wären
- Im Bachelormodul ***Einführung in die Kryptologie*** haben wir uns mit den mathematischen Grundlagen von kryptografischen Verfahren beschäftigen, wobei (symmetrische und asymmetrische) Verschlüsselungsverfahren im Vordergrund standen
- Im aktuellen Mastermodul ***Kryptologie*** werden wir dagegen kryptografische Verfahren und Protokolle für andere Schutzziele betrachten wie z.B. Hashverfahren und digitale Signaturen sowie Pseudozufallsgeneratoren

Kryptosysteme

- Kryptosysteme (Verschlüsselungsverfahren) dienen der Geheimhaltung von Nachrichten bzw. Daten
- Hierzu gibt es auch andere Methoden wie z.B.
  - Physikalische Maßnahmen: Tresor etc.
  - Organisatorische Maßnahmen: einsamer Waldspaziergang etc.
  - Steganografische Maßnahmen: unsichtbare Tinte etc.

Überblick weiterer Schutzziele

Andererseits können durch kryptografische Verfahren weitere Schutzziele realisiert werden wie z.B.

- Vertraulichkeit
  - Geheimhaltung
  - Anonymität (z.B. Mobiltelefon)
  - Unbeobachtbarkeit (von Transaktionen)
- Integrität
  - von Nachrichten und Daten
- Zurechenbarkeit
  - Authentikation
  - Unabstreitbarkeit
  - Identifizierung
- Verfügbarkeit
  - von Daten
  - von Rechenressourcen
  - von Informationsdienstleistungen

Kryptologie

In das Umfeld der Kryptologie fallen die folgenden Begriffe

- Kryptografie:
  Lehre von der Geheimhaltung von Informationen durch Verschlüsselung
  Im weiteren Sinne: Wissenschaft von der Übermittlung, Speicherung und Verarbeitung von Daten in einer von potentiellen Gegnern bedrohten Umgebung
- Kryptoanalysis:
  Erforschung der Methoden eines unbefugten Angriffs gegen ein Kryptoverfahren
  Zweck: Vereitelung der mit seinem Einsatz verfolgten Ziele
- Kryptoanalyse:
  Analyse eines Kryptoverfahrens zum Zweck der Bewertung seiner kryptografischen Stärken und Schwächen
- Kryptologie:
  Wissenschaft vom Entwurf, der Anwendung und der Analyse von kryptografischen Verfahren (umfasst Kryptografie und Kryptoanalyse)

Kryptografische Hashverfahren

- sind ein wirksames Werkzeug zur Sicherstellung der Integrität von Nachrichten oder generell von digitalisierten Daten
- Sie nehmen somit beim Schutz der Datenintegrität eine ähnlich herausragende Stellung ein wie sie Kryptosystemen bei der Wahrung der Vertraulichkeit zukommt
- Daneben finden kryptografische Hashfunktionen aber auch vielfach als Bausteine von komplexeren Systemen Verwendung
- Wie wir noch sehen werden, sind kryptografische Hashfunktionen etwa bei der Erstellung von digitalen Signaturen sehr nützlich
- Auf weitere Anwendungsmöglichkeiten werden wir später eingehen

Kryptografische Hashverfahren

- Vielen Anwendungen von kryptografischen Hashfunktionen h liegt die Idee zugrunde, dass sie zu einem vorgegebenen Text x eine zwar kompakte aber dennoch repräsentative Darstellung $h(x)$ liefern, die unter praktischen Gesichtspunkten als eine eindeutige Identifikationsnummer von x fungieren kann
- Die Berechnungsvorschrift für h muss somit „charakteristische Merkmale“ von x in den Hashwert $h(x)$ einfließen lassen
- Da der Fingerabdruck eines Menschen ganz ähnliche Eigenschaften besitzt (was ihn für Kriminalisten bekanntlich so wertvoll macht), wird der Hashwert $h(x)$ auch oft als ein ***digitaler Fingerabdruck*** von x bezeichnet
- Gebräuchlich sind auch die Bezeichnungen kryptografische Prüfsumme oder message digest (englische Bezeichnung für „Nachrichtenextrakt“)

Kryptografische Hashverfahren

Typische Schutzziele, die sich mittels Hashfunktionen realisieren lassen:

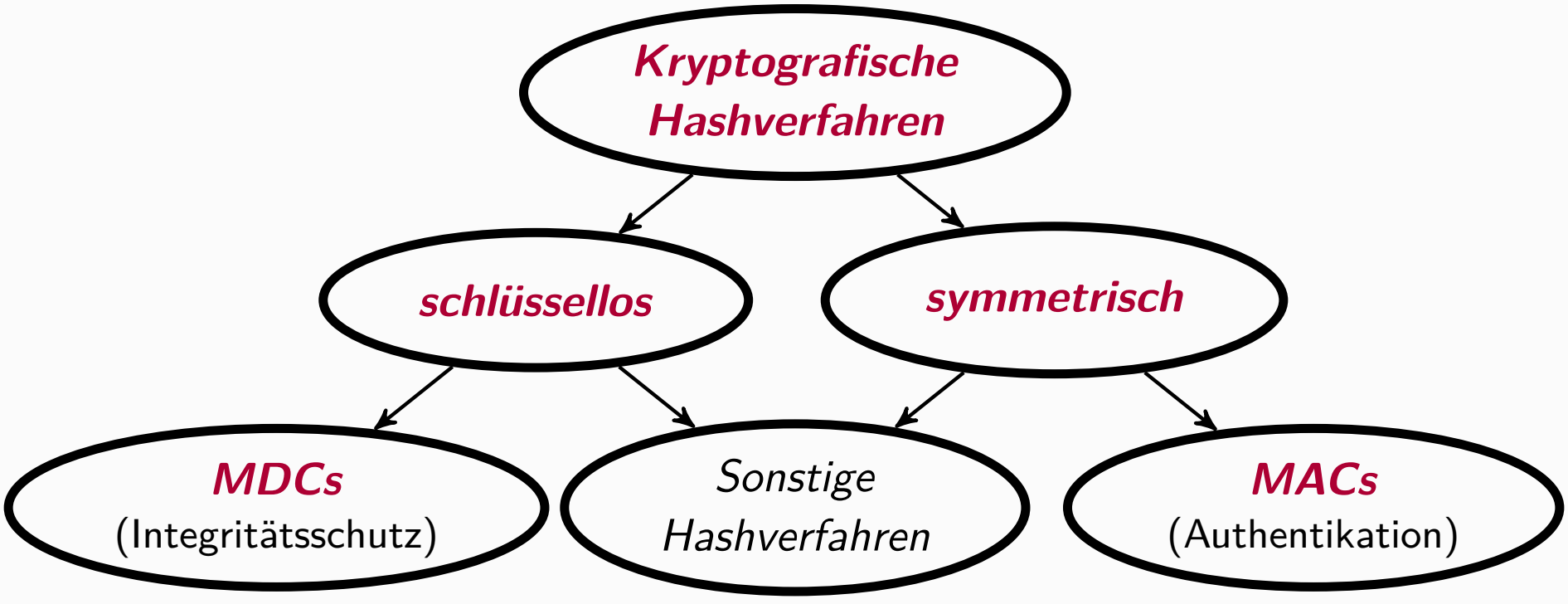
Nachrichtenauthentikation (message authentication)

- Wie lässt sich sicherstellen, dass eine Nachricht (oder eine Datei) während einer (räumlichen oder auch zeitlichen) Übertragung nicht verändert wurde?
- Wie lässt sich der Urheber (oder Absender) einer Nachricht zweifelsfrei feststellen?

Teilnehmerauthentikation (entity authentication, identification)

- Wie kann sich eine Person (oder ein Gerät) anderen gegenüber zweifelsfrei ausweisen?

Klassifikation von Hashverfahren

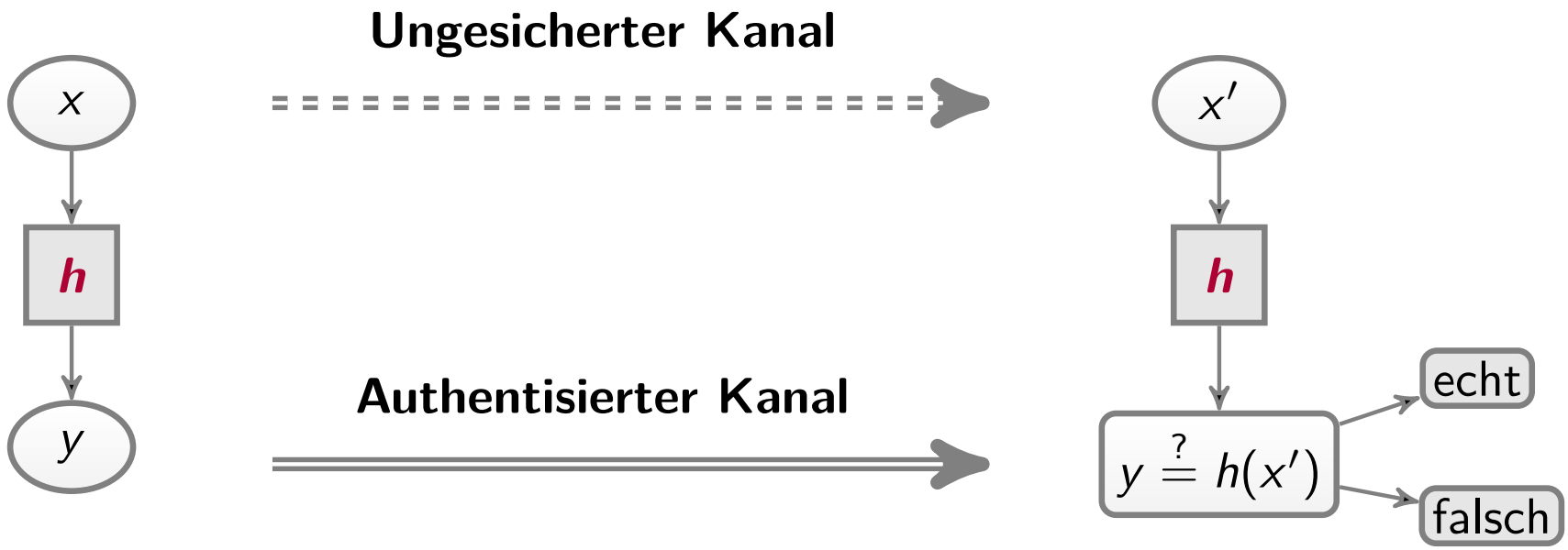


Kryptografische Hashverfahren lassen sich grob danach klassifizieren, ob der Hashwert lediglich in Abhängigkeit vom Eingabetext berechnet wird oder zusätzlich von einem symmetrischen Schlüssel abhängt

Schlüssellose Hashfunktionen

- Kryptografische Hashfunktionen, bei deren Berechnung keine Schlüssel benutzt werden, dienen vornehmlich der Erkennung von unbefugt vorgenommenen Manipulationen an Dateien oder Nachrichten
- Daher werden sie auch als ***MDC*** (***M****anipulation* ***D****etection* ***C****ode*) bezeichnet
- Zuweilen wird das Kürzel ***MDC*** auch als eine Abkürzung für ***M****odification* ***D****etection* ***C****ode* verwendet
- Seltener ist dagegen die Bezeichnung ***MIC*** (***m****essage* ***i****ntegrity* ***c****odes*)

Manipulation Detection Codes



Um die Integrität eines Datensatzes x sicherzustellen, der über einen ungesicherten Kanal gesendet (bzw. auf einem vor Manipulationen nicht sicheren Webserver abgelegt) wird, kann man wie folgt verfahren

- Der MDC-Hashwert $y = h(x)$ von x wird auf einem authentisierten Kanal übertragen
- Nach der Übertragung wird geprüft, ob der Datensatz noch den Hashwert y liefert

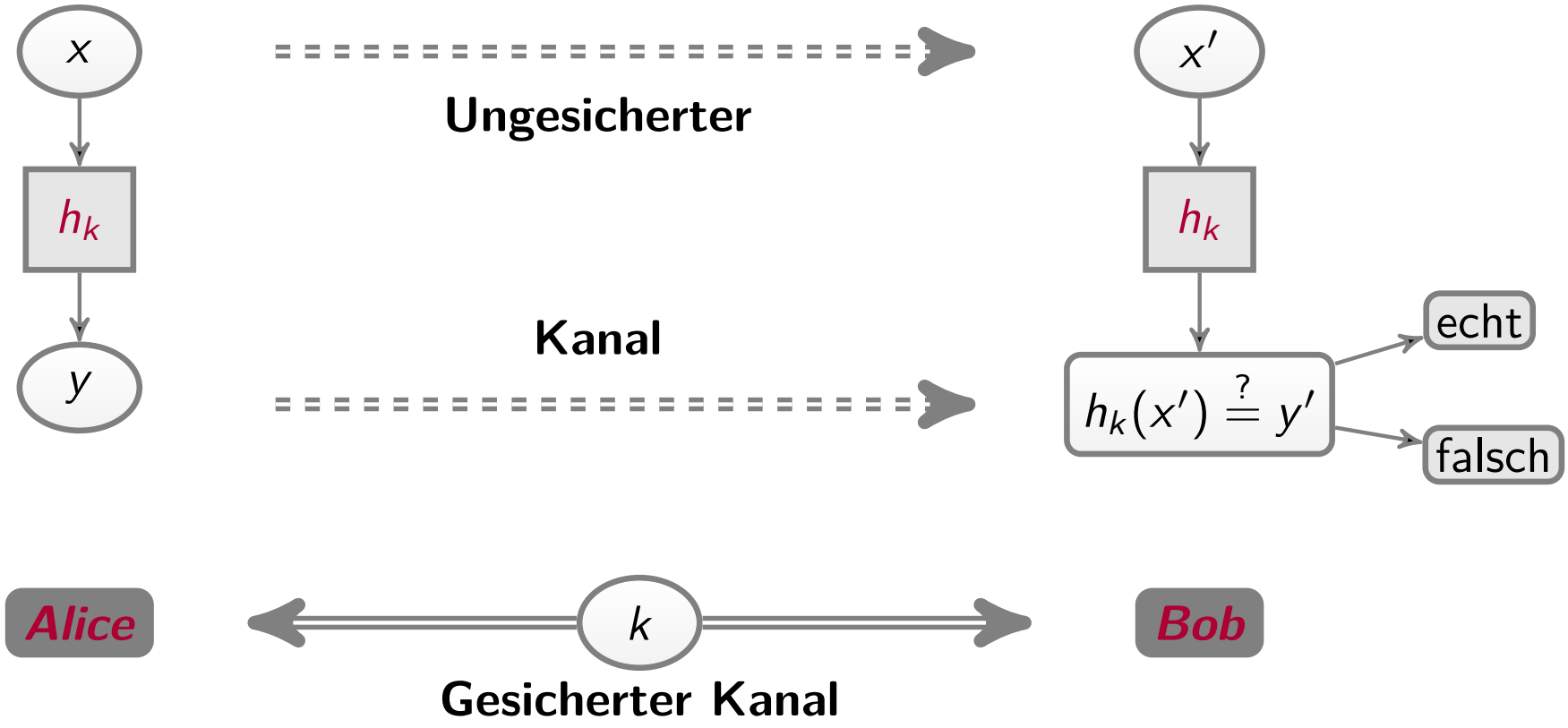
Hashverfahren mit symmetrischen Schlüsseln

- Kryptografische Hashverfahren mit symmetrischen Schlüsseln finden hauptsächlich bei der Authentifizierung von Nachrichten Verwendung
- Diese werden daher auch als ***MAC*** (***m****essage* ***a****uthentication* ***c****ode*) oder als ***Authentikationscode*** bezeichnet
- Daneben gibt es auch Hashverfahren mit asymmetrischen Schlüsseln
- Diese werden jedoch der Rubrik der Signaturverfahren zugeordnet, da mit ihnen ausschließlich digitale Signaturen gebildet werden

Hashverfahren mit symmetrischen Schlüsseln

- Die Abbildung auf der nächsten Folie zeigt, wie sich Nachrichten mit einem MAC authentisieren lassen
- Man beachte, dass nun auch der Hashwert über den unsicheren Kanal gesendet wird
- Möchte Alice eine Nachricht x an Bob übermitteln, so berechnet sie den zugehörigen MAC-Wert $y = h_k(x)$ und fügt diesen der Nachricht x hinzu
- Bob überprüft die Echtheit der empfangenen Nachricht (x', y'), indem er seinerseits den zu x' gehörigen Hashwert $h_k(x')$ berechnet und das Ergebnis mit y' vergleicht
- Der geheime Authentikationsschlüssel k muss hierbei genau wie bei einem symmetrischen Kryptosystem über einen gesicherten Kanal vereinbart werden

Verwendung eines MAC zur Nachrichtenauthentikation



- Hierbei ist k der symmetrische Authentikationsschlüssel und $y = h_k(x)$ der MAC-Wert für x unter k
- Indem Alice ihre Nachricht x um den Hashwert $y = h_k(x)$ ergänzt, hat Bob nicht nur die Möglichkeit, anhand von y die empfangene Nachricht x' auf Manipulationen, sondern auch ihre Herkunft zu überprüfen

Schlüssellose Hashfunktionen (MDCs)

- Wir betrachten nun verschiedene Sicherheitsanforderungen an MDCs h
- Dabei nehmen wir an, dass $h\colon X \to Y$ öffentlich bekannt ist
- Ein Paar $(x, y) \in X \times Y$ heißt ***gültig*** für h, falls $h(x) = y$ ist
- Ein Paar (x, x') mit $x \neq x'$ und $h(x) = h(x')$ heißt ***Kollisionspaar*** für h
- Die Anzahl $\|Y\|$ der Hashwerte bezeichnen wir mit m
- Ist auch der Textraum X endlich, $\|X\| = n$, so heißt h eine (n, m)-***Hashfunktion***
- In diesem Fall verlangen wir meist, dass $n \geq 2m$ ist, und wir nennen h dann eine ***Kompressionsfunktion*** (compression function)

Schlüssellose Hashfunktionen (MDCs)

- Da h öffentlich bekannt ist, ist es sehr einfach, für einen vorgegebenen Text x ein gültiges Paar (x, y) zu erzeugen
- Für bestimmte kryptografische Anwendungen ist es wichtig, dass dies bei vorgegebenem Hashwert y dagegen nicht möglich ist

Problem P1 (Bestimmung eines Urbilds)
Gegeben: Eine Hashfunktion $h\colon X \to Y$ und ein Hashwert $y \in Y$
Gesucht: Ein Text $x \in X$ mit $h(x) = y$

- Falls es einen immensen Aufwand erfordert, bei gegebenem Hashwert y einen Text x mit $h(x) = y$ zu finden, so heißt h ***Einweg-Hashfunktion*** *(one-way hash function bzw. preimage resistant hash function)*
- Diese Eigenschaft wird beispielsweise benötigt, wenn die Hashwerte der Benutzerpasswörter in einer öffentlich zugänglichen Datei abgespeichert werden, wie es bei manchen Unix-Systemen der Fall ist

Schlüssellose Hashfunktionen (MDCs)

- Für andere Anwendungen ist es dagegen wichtig, dass es für einen gebenen Text x praktisch unmöglich ist, einen weiteren Text $x' \neq x$ mit dem gleichen Hashwert $h(x') = h(x)$ zu finden

Problem P2 (Bestimmung eines zweiten Urbilds)
Gegeben: Eine Hashfunktion $h\colon X \to Y$ und ein Text $x \in X$
Gesucht: Ein Text $x' \in X \setminus \{x\}$ mit $h(x') = h(x)$

- Falls Problem P2 einen immensen Aufwand erfordert, heißt h ***schwach kollisionsresistent*** *(weakly collision resistant bzw. second preimage resistant)*
- Diese Eigenschaft wird beim Integritätsschutz durch einen MDC benötigt

Schlüssellose Hashfunktionen (MDCs)

- Für bestimmte Anwendungen ist es sogar nötig, dass sich überhaupt kein Kollisionspaar finden lässt
- Diese Eigenschaft ist bspw. beim Einsatz von MDCs bei der Erstellung von digitalen Signaturen erforderlich

Problem P3 (Bestimmung einer Kollision)
Gegeben: Eine Hashfunktion $h\colon X \to Y$
Gesucht: Zwei Texte $x \neq x' \in X$ mit $h(x') = h(x)$

- Falls Problem P3 einen immensen Aufwand erfordert, heißt h ***(stark) kollisionsresistent*** *(collision resistant)*

Schlüssellose Hashfunktionen (MDCs)

- Falls Problem P3 einen immensen Aufwand erfordert, heißt h ***(stark) kollisionsresistent*** *(collision resistant)*
- Obwohl die schwache Kollisionsresistenz eine gewisse Ähnlichkeit mit der Einweg-Eigenschaft aufweist, sind diese beiden Eigenschaften im allgemeinen unvergleichbar:
  - Eine schwach kollisionsresistente Funktion muss nicht notwendigerweise eine Einwegfunktion sein, da die Bestimmung eines Urbildes gerade für diejenigen Funktionswerte einfach sein kann, die nur ein einziges Urbild besitzen
  - Umgekehrt impliziert die Einweg-Eigenschaft auch nicht die schwache Kollisionsresistenz, da die Kenntnis eines Urbildes das Auffinden weiterer Urbilder sehr stark erleichtern kann

Vergleich von Sicherheitsanforderungen

- Wir zeigen nun, dass stark kollisionsresistente Hashfunktionen sowohl schwach kollisionsresistent als auch Einweghashfunktionen sind
- Hierzu reduzieren wir das Kollisionsroblem auf das Problem, ein zweites Urbild zu bestimmen

Satz

- Sei $h\colon X \to Y$ eine (n, m)-Hashfunktion
- Dann ist das Problem P3, ein Kollisionspaar für h zu bestimmen, auf das Problem P2, ein zweites Urbild zu bestimmen, reduzierbar
- Folglich sind stark kollisionsresistente Hashfunktionen auch schwach kollisionsresistent

Vergleich von Sicherheitsanforderungen

Satz

- Sei $h\colon X \to Y$ eine (n, m)-Hashfunktion
- Dann ist das Problem P3, ein Kollisionspaar für h zu bestimmen, auf das Problem P2, ein zweites Urbild zu bestimmen, reduzierbar
- Folglich sind stark kollisionsresistente Hashfunktionen auch schwach kollisionsresistent

Beweis.

- Sei A ein Las-Vegas Algorithmus, der für ein zufällig aus X gewähltes x mit Erfolgswahrscheinlichkeit ε ein zweites Urbild x' für h liefert und andernfalls ? ausgibt
- Dann ist klar, dass folgender Las-Vegas Algorithmus mit Wahrscheinlichkeit ε ein Kollisionspaar findet:

```
1 wähle zufällig x ∈ X
2 x' := A(x)
3 if x' ≠ ? then return (x, x') else return ?
```

□

Vergleich von Sicherheitsanforderungen

Als nächstes reduzieren wir das Kollisionsproblem auf das Urbildproblem

Satz

- Sei $h\colon X \to Y$ eine (n, m)-Hashfunktion mit $n \geq 2m$
- Dann ist das Problem P3, ein Kollisionspaar für h zu bestimmen, auf das Problem P1, ein Urbild zu bestimmen, reduzierbar

Beweis.

- Sei A ein Invertierungsalgorithmus für h, d.h. A berechnet für jeden Hashwert y in $W(h) = \{h(x) \mid x \in X\}$ ein Urbild x mit $h(x) = y$
- Betrachte folgenden Las-Vegas Algorithmus B:

```
1 wähle zufällig x ∈ X
2 y := h(x)
3 x' := A(y)
4 if x ≠ x' then return (x, x') else return ?
```

Vergleich von Sicherheitsanforderungen

Beweis.

- Sei A ein Invertierungsalgorithmus für h, d.h. A berechnet für jeden Hashwert y in $W(h) = \{h(x) \mid x \in X\}$ ein Urbild x mit $h(x) = y$
- Betrachte folgenden Las-Vegas Algorithmus B:

```
1 wähle zufällig x ∈ X
2 y := h(x)
3 x' := A(y)
4 if x ≠ x' then return (x, x') else return ?
```

- Sei $\mathcal{C} = \{h^{-1}(y) \mid y \in W(X)\}$
- Dann hat B eine Erfolgswahrscheinlichkeit von

$$\sum_{C \in \mathcal{C}} \frac{\|C\|}{\|X\|} \cdot \frac{\|C\| - 1}{\|C\|} = \frac{1}{n} \sum_{C \in \mathcal{C}} (\|C\| - 1) = (n - m)/n \geq \frac{1}{2}$$

□

Das Zufallsorakelmodell (ZOM)

- Das ZOM dient dazu, den Aufwand verschiedener Angriffe auf eine Hashfunktion $h\colon X \to Y$ nach oben abzuschätzen
- Sind X und Y vorgegeben, so können wir eine Hashfunktion $h\colon X \to Y$ dadurch „konstruieren“, dass wir für jedes $x \in X$ zufällig ein $y \in Y$ wählen und $h(x) = y$ setzen
- Äquivalent hierzu ist, für h eine zufällige Funktion aus der Klasse $F(X, Y)$ aller m^n Funktionen von X nach Y zu wählen
- Dieses Verfahren ist auf Grund des hohen Aufwands zwar nicht mehr praktikabel, wenn $n = \|X\|$ eine bestimmte Größe übersteigt
- Es liefert uns aber ein theoretisches Modell für eine Hashfunktion mit „idealen“ kryptografischen Eigenschaften
- Offensichtlich kann ein Angreifer nur dadurch Informationen über h erhalten, dass er für eine Reihe von Texten x_i die zugehörigen Hashwerte $h(x_i)$ berechnet (was der Befragung eines funktionalen Zufallsorakels entspricht)

Das Zufallsorakelmodell (ZOM)

Eine Zufallsfunktion h eignet sich deshalb gut als kryptografische Hashfunktion, weil der Hashwert $h(x)$ für einen Text x auch dann noch schwer vorhersagbar ist, wenn der Angreifer bereits die Hashwerte einer beliebigen Zahl von anderen Texten $x_i \neq x$ kennt

Proposition

- Sei $X_0 = \{x_1, \ldots, x_k\}$ eine beliebige Menge von k verschiedenen Texten $x_i \in X$ und seien $y_1, \ldots, y_k \in Y$
- Dann gilt für eine zufällig aus $F(X, Y)$ gewählte Funktion h und für jedes Paar $(x, y) \in (X - X_0) \times Y$,

$$\Pr[h(x) = y \,|\, h(x_i) = y_i \text{ für } i = 1, \ldots, k] = 1/m$$

Das Zufallsorakelmodell (ZOM)

- Um eine obere Komplexitätsschranke für das Urbildproblem P1 im ZOM zu erhalten, betrachten wir folgenden Algorithmus
- Hierbei gibt der Parameter q die Anzahl der Hashwertberechnungen (also die Anzahl der gestellten Orakelfragen an das Zufallsorakel h) an
- Die Laufzeit des Algorithmus ist also proportional zu q

Prozedur `FindPreimage`(h, y, q)

```
1 wähle eine beliebige Menge X_0 = {x_1, ..., x_q} ⊆ X
2 for each x_i ∈ X_0 do
3    if h(x_i) = y then return(x_i)
4 return ?
```

Das Zufallsorakelmodell (ZOM)

Satz

FindPreimage(h, y, q) gibt im ZOM mit Wahrscheinlichkeit $\varepsilon = 1 - (1 - 1/m)^q$ ein Urbild von y aus (unabhängig von der Wahl der Menge X_0)

Beweis.

- Sei $y \in Y$ fest und sei $X_0 = \{x_1, \ldots, x_q\}$
- Für $i = 1, \ldots, q$ bezeichne E_i das Ereignis "$h(x_i) = y$"
- Nach obiger Proposition sind diese Ereignisse stochastisch unabhängig und ihre Wahrscheinlichkeit ist

$$\Pr[E_i] = 1/m \text{ für } i = 1, \ldots, q$$

- Also folgt

$$\Pr[E_1 \cup \ldots \cup E_q] = 1 - \Pr[\overline{E}_1 \cap \ldots \cap \overline{E}_q] = 1 - (1 - 1/m)^q$$

□

Das Zufallsorakelmodell (ZOM)

Folgender Algorithmus liefert uns eine obere Schranke für die Komplexität des Problems P2, ein zweites Urbild für $h(x)$ zu bestimmen

Prozedur `FindSecondPreimage`(h, x, q)

```
1   y := h(x)
2   wähle eine beliebige Menge X_0 = {x_1, ..., x_{q-1}} ⊆ X − {x}
3   for each x_i ∈ X_0 do
4     if h(x_i) = y then return(x_i)
5   return ?
```

Satz

FindSecondPreimage(h, x, q) gibt im ZOM mit Wahrscheinlichkeit $\varepsilon = 1 - (1 - 1/m)^{q-1}$ ein zweites Urbild $x_0 \neq x$ von $y = h(x)$ aus.

Der Beweis ist analog zum Beweis des vorherigen Satzes

Der Geburtstagsangriff

- Ist q vergleichsweise klein, so ist bei beiden bisher betrachteten Angriffen $\varepsilon \approx q/m$
- Um also auf eine Erfolgswahrscheinlichkeit von $1/2$ zu kommen, ist $q \approx m/2$ zu wählen
- Geht es lediglich darum, *irgendein* Kollisionspaar (x, x') aufzuspüren, so bietet sich ein sogenannter ***Geburtstagsangriff*** an
- Dieser lässt sich deutlich zeiteffizienter realisieren
- Wie der Name schon andeutet, basiert dieser Angriff auf dem sog. Geburtstagsparadoxon, welches in seiner einfachsten Form folgendes besagt

Geburtstagsparadoxon

Bereits in einer Klasse mit 23 Kindern ist die Wahrscheinlichkeit größer $1/2$, dass mindestens zwei Kinder am gleichen Tag Geburtstag haben

Der Geburtstagsangriff

- Der nächste Satz besagt, dass bei q-maligem Ziehen (mit Zurücklegen) aus einer Urne mit m Kugeln mit einer Wahrscheinlichkeit von

  $$1 - (m-1)(m-2)\cdots(m-q+1)/m^{q-1}$$

  mindestens eine Kugel mehrmals gezogen wird
- Für $m = 365$ und $q = 23$ ergibt dies einen Wert von ungefähr 0,507
- Da die Häufigkeiten der Geburtstage in einer Klasse nicht gleichverteilt sind, ist die Wahrscheinlichkeit, dass 2 Kinder am gleichen Tag Geburtstag haben, sogar noch etwas höher
- Zur Kollisionsbestimmung verwenden wir folgenden Algorithmus

Prozedur `Collision`(h, q)

1 wähle eine beliebige Menge $X_0 = \{x_1, \ldots, x_q\} \subseteq X$
2 **for** each $x_i \in X_0$ **do** $y_i := h(x_i)$
3 **if** $\exists i \neq j : y_i = y_j$ **then return** (x_i, x_j) **else return** ?

Der Geburtstagsangriff

Prozedur `Collision`(h, q)

1 wähle eine beliebige Menge $X_0 = \{x_1, \ldots, x_q\} \subseteq X$
2 **for** each $x_i \in X_0$ **do** $y_i := h(x_i)$
3 **if** $\exists i \neq j : y_i = y_j$ **then return** (x_i, x_j) **else return** ?

- Bei einer naiven Implementierung würde zwar der Zeitaufwand für die Auswertung der if-Bedingung quadratisch von q abhängen
- Trägt man aber jeden Text x unter dem Suchwort $h(x)$ in eine Hashtabelle der Größe q ein, so wird der Zeitaufwand für jeden einzelnen Text x im wesentlichen durch die Berechnung von $h(x)$ bestimmt

Satz

$\textsc{Collision}(h, q)$ gibt im ZOM mit Erfolgswahrscheinlichkeit

$$\varepsilon = 1 - \frac{(m-1)(m-2)\cdots(m-q+1)}{m^{q-1}}$$

ein Kollisionspaar (x, x') für h aus

Der Geburtstagsangriff

Beweis.

- Sei $X_0 = \{x_1, \ldots, x_q\}$ und für $i = 1, \ldots, q$ bezeichne E_i das Ereignis

$$h(x_i) \notin \{h(x_1), \ldots, h(x_{i-1})\}$$

- Dann ist $E_1 \cap \ldots \cap E_q$ das Ereignis "$\textsc{Collision}(h, q)$ gibt ? aus"
- Für $i = 1, \ldots, q$ gilt nun

$$\Pr[E_i \,|\, E_1 \cap \ldots \cap E_{i-1}] = \frac{m - i + 1}{m}$$

- Dies führt auf die Erfolgswahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 1 - \Pr[E_1 \cap \ldots \cap E_q] \\ &= 1 - \Pr[E_1]\Pr[E_2 \,|\, E_1] \cdots \Pr[E_q \,|\, E_1 \cap \ldots \cap E_{q-1}] \\ &= 1 - \left(\frac{m-1}{m}\right)\left(\frac{m-2}{m}\right)\cdots\left(\frac{m-q+1}{m}\right) \end{aligned}$$

□

Der Geburtstagsangriff

- Mit der Approximation $1 - x \approx e^{-x}$ erhalten wir folgende Abschätzung für ε:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 1 - \prod_{i=1}^{q-1} \left(1 - \frac{i}{m}\right) \\ &\approx 1 - \prod_{i=1}^{q-1} e^{\frac{-i}{m}} = 1 - e^{-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{q-1} i} = 1 - e^{-\frac{q(q-1)}{2m}} \\ &\approx 1 - e^{-\frac{q^2}{2m}} \approx q^2/2m \end{aligned}$$

- Für q erhalten wir daraus die Abschätzung

$$q \approx c_\varepsilon \sqrt{m}$$

  mit einer von ε abhängigen Konstante $c_\varepsilon = \sqrt{2\varepsilon}$
- Diese Abschätzung ist nur für ε-Werte nahe Null hinreichend genau

Der Geburtstagsangriff

- Aus der Abschätzung $\varepsilon \approx 1 - e^{-\frac{q^2}{2m}}$ für ε (siehe vorige Folie) erhalten wir insbesondere für größere Werte von ε eine bessere Abschätzung für q:

  $$q \approx c'_\varepsilon \sqrt{m}$$

  mit der Konstanten $c'_\varepsilon = \sqrt{2 \ln \frac{1}{1-\varepsilon}}$
- Für $\varepsilon = 1/2$ ergibt sich somit $q \approx \sqrt{(2 \ln 2)m} \approx 1{,}17\sqrt{m}$
- Besitzt also eine binäre Hashfunktion $h\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}^m$ die Hashwertlänge $m = 128$ Bit, so müssen im ZOM $q \approx 1{,}17 \cdot 2^{64}$ Texte gehasht werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von $1/2$ eine Kollision zu finden
- Um einem Geburtstagsangriff widerstehen zu können, sollte eine Hashfunktion mindestens eine Hashwertlänge von 128 oder besser 160 Bit haben

Iterierte Hashfunktionen

- Im Folgenden beschäftigen wir uns mit der Frage, wie sich aus einer kollisionsresistenten Kompressionsfunktion

  $$h\colon \{0,1\}^{m+t} \to \{0,1\}^{m}$$

  eine kollisionsresistente Hashfunktion

  $$\hat{h}\colon \{0,1\}^{*} \to \{0,1\}^{l}$$

  konstruieren lässt
- Hierzu betrachten wir folgende kanonische Konstruktionsmethode:

Iterierte Hashfunktionen

Preprocessing: Transformiere $x \in \{0,1\}^*$ mittels einer Funktion

$$y : \{0,1\}^* \to \bigcup_{r \geq 1} \{0,1\}^{rt}$$

zu einem String $y(x)$ mit der Eigenschaft $|y(x)| \equiv_t 0$

Processing: Sei $IV \in \{0,1\}^m$ ein öffentlich bekannter Initialisierungsvektor und sei $y(x) = y_1 \cdots y_r$ mit $|y_i| = t$ für $i = 1, \ldots, r$. Berechne eine Folge $z_0, \ldots, z_r$ von Strings $z_i \in \{0,1\}^m$ wie folgt:

$$z_i = \begin{cases} IV, & i = 0, \\ h(z_{i-1} y_i), & i = 1, \ldots, r \end{cases}$$

Optionale Ausgabetransformation: Berechne den Wert $\hat{h}(x) = g(z_r)$, wobei $g : \{0,1\}^m \to \{0,1\}^l$ eine öffentlich bekannte Funktion ist (meist wird für g die Identität verwendet)

Zur Berechnung von $\hat{h}(x)$ wird also die Funktion h genau r-mal aufgerufen

Iterierte Hashfunktionen

Wir formulieren nun eine für Preprocessing-Funktionen wünschenswerte Eigenschaft

Definition

- Eine Funktion $y\colon \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ heißt ***suffixfrei***, falls es keine Strings $x \neq \tilde{x}$ und z in $\{0,1\}^*$ mit $y(\tilde{x}) = zy(x)$ gibt
- Mit anderen Worten: kein Funktionswert $y(x)$ ist Suffix eines Funktionswertes $y(\tilde{x})$ an einer Stelle $\tilde{x} \neq x$

Man beachte, dass jede suffixfreie Funktion insbesondere injektiv ist

Iterierte Hashfunktionen

Satz

Falls die Preprocessing-Funktion y suffixfrei und die Ausgabetransformation g injektiv ist, so ist mit h auch $\hat{h}$ kollisionsresistent

Beweis.

- Wir nehmen an, dass es gelingt, ein Kollisionspaar $(x, \tilde{x})$ für $\hat{h}$ zu finden (d.h. $\hat{h}(x) = \hat{h}(\tilde{x})$ und $x \neq \tilde{x}$)
- Seien $y(x) = y_1 \dots y_r$ und $y(\tilde{x}) = \tilde{y}_1 \dots \tilde{y}_s$ mit $r \leq s$
- Da y suffixfrei ist, muss ein Index $i \in \{1, \dots, r\}$ mit $y_i \neq \tilde{y}_{s-r+i}$ existieren
- Weiter seien z_i $(i = 0, \dots, r)$ und $\tilde{z}_j$ $(j = 0, \dots, s)$ die in der Processing-Phase berechneten Hashwerte
- Da g injektiv ist, muss mit $g(z_r) = \hat{h}(x) = \hat{h}(\tilde{x}) = g(\tilde{z}_s)$ auch $z_r = \tilde{z}_s$ gelten

Iterierte Hashfunktionen

Beweis.

- Wir nehmen an, dass es gelingt, ein Kollisionspaar $(x, \tilde{x})$ für $\hat{h}$ zu finden (d.h. $\hat{h}(x) = \hat{h}(\tilde{x})$ und $x \neq \tilde{x}$)
- Seien $y(x) = y_1 \dots y_r$ und $y(\tilde{x}) = \tilde{y}_1 \dots \tilde{y}_s$ mit $r \leq s$
- Da y suffixfrei ist, muss ein Index $i \in \{1, \dots, r\}$ mit $y_i \neq \tilde{y}_{s-r+i}$ existieren
- Weiter seien z_i $(i = 0, \dots, r)$ und $\tilde{z}_j$ $(j = 0, \dots, s)$ die in der Processing-Phase berechneten Hashwerte
- Da g injektiv ist, muss mit $g(z_r) = \hat{h}(x) = \hat{h}(\tilde{x}) = g(\tilde{z}_s)$ auch $z_r = \tilde{z}_s$ gelten
- Sei i_{max} der größte Index $i \in \{1, \dots, r\}$ mit $z_{i-1} y_i \neq \tilde{z}_{s-r+i-1} \tilde{y}_{s-r+i}$
- Dann bilden $z_{i_{max}-1} y_{i_{max}}$ und $\tilde{z}_{s-r+i_{max}-1} \tilde{y}_{s-r+i_{max}}$ wegen

$$h(z_{i_{max}-1} y_{i_{max}}) = z_{i_{max}} = \tilde{z}_{s-r+i_{max}} = h(\tilde{z}_{s-r+i_{max}-1} \tilde{y}_{s-r+i_{max}})$$

ein Kollisionspaar für h

□

Die Merkle-Damgaard-Konstruktion

- Merkle und Damgaard schlugen 1989 folgende konkrete Realisierung ihrer Konstruktion vor
- Als Initialisierungsvektor wird der Nullvektor $IV = 0^m$ benutzt, die optionale Ausgabetransformation entfällt, und für $y(x)$ wird im Fall $t \geq 2$ die folgende Funktion verwendet
  (den Fall $t = 1$ betrachten wir später)

Die Merkle-Damgaard-Konstruktion

- Für $x = \varepsilon$ sei $y(x) = 0^t$
- Für $x \in \{0,1\}^n$ mit $n > 0$ sei $r = \lceil \frac{n}{t-1} \rceil$ und $x = x_1 x_2 \ldots x_{r-1} x_r$ mit $|x_1| = |x_2| = \ldots = |x_{r-1}| = t - 1$ sowie $|x_r| = t - 1 - d$, wobei $0 \leq d < t - 1$
- Im Fall $r = 1$ ist dann $y(x) = y_1 y_2$ mit $y_1 = 0x0^d$ und $y_2 = 1bin_{t-1}(d)$
- Und für $r > 1$ ist $y(x) = y_1 \cdots y_{r+1}$, wobei

$$y_i = \begin{cases} 0x_1, & i = 1, \\ 1x_i, & 2 \leq i < r, \\ 1x_r 0^d, & i = r, \\ 1bin_{t-1}(d), & i = r+1, \end{cases} \tag{1}$$

und $bin_{t-1}(d)$ die durch führende Nullen auf die Länge $t - 1$ aufgefüllte Binärdarstellung von d ist

Die Merkle-Damgaard-Konstruktion

Satz

Die durch (1) definierte Preprocessing-Funktion y ist suffixfrei

Beweis.

- Seien $x \neq \tilde{x}$ zwei Texte mit $|x| \leq |\tilde{x}|$
- Wir müssen zeigen, dass $y(x) = y_1 y_2 \dots y_{r+1}$ kein Suffix von $y(\tilde{x}) = \tilde{y}_1 \tilde{y}_2 \dots \tilde{y}_{s+1}$ ist
- Im Fall $x = \varepsilon$ ist dies klar
- Für $x \neq \varepsilon$ machen wir folgende Fallunterscheidung

  1. Fall: $|x| \not\equiv_{t-1} |\tilde{x}|$. Dann folgt $d \neq \tilde{d}$ und somit $y_{r+1} \neq \tilde{y}_{s+1}$
  2. Fall: $|x| = |\tilde{x}|$. In diesem Fall ist $r = s$. Wegen $x \neq \tilde{x}$ existiert ein Index $i \in \{1, \dots, r\}$ mit $x_i \neq \tilde{x}_i$. Dies impliziert $y_i \neq \tilde{y}_i$, also ist $y(x)$ kein Suffix von $y(\tilde{x})$
  3. Fall: $|x| \neq |\tilde{x}|$ und $|x| \equiv_{t-1} |\tilde{x}|$. In diesem Fall ist $r < s$. Da $y(x)$ mit einer Null beginnt, aber das $(s - r + 1)$-te Bit von $y(\tilde{x})$ eine Eins ist, kann $y(x)$ kein Suffix von $y(\tilde{x})$ sein

Die Merkle-Damgaard-Konstruktion

Nun betrachten wir den Fall $t = 1$

- Sei y die durch $y(x) := 11f(x)$ definierte Funktion, wobei f wie folgt definiert ist:

$$f(x_1 \dots x_n) = f(x_1) \dots f(x_2) \text{ mit } f(0) = 0 \text{ und } f(1) = 01$$

- Dann ist leicht zu sehen, dass y suffixfrei ist □

- Da die Kompressionsfunktion h bei der Berechnung von $\hat{h}(x)$ im Fall $t = 1$ für jedes Bit von $y(x)$ einmal aufgerufen wird, wird h genau $|y(x)| \leq 2(n+1)$-mal aufgerufen
- Im Fall $t > 1$ werden dagegen nur $r + 1 = \lceil \frac{n}{t-1} \rceil + 1$ Aufrufe benötigt

Die MD4-Hashfunktion

- Die MD4-Hashfunktion (***M**essage **D**igest*) wurde 1990 von Rivest vorgeschlagen
- Die Bitlänge von MD4 beträgt $l = 128$ Bit
- Bei einer Wortlänge von 32 Bit entspricht dies 4 Wörtern
- MD4 und die im Folgenden vorgestellten Hashfunktionen benutzen u.a. folgende Operationen auf Wörtern $X, Y \in \{0,1\}^{32}$

Wort-Operationen	
$X \wedge Y$	bitweises „Und“ von X und Y
$X \vee Y$	bitweises „Oder“ von X und Y
$X \oplus Y$	bitweises „exklusives Oder“ von X und Y
$\neg X$	bitweises Komplement von X
$X + Y$	Ganzzahl-Addition modulo 2^{32}
$X \rightarrow s$	Rechtsshift um s Stellen
$X \hookleftarrow s$	zirkulärer Linksshift um s Stellen

Die MD4-Hashfunktion

- Die Ganzzahl-Addition wird bei MD4 und MD5 in little endian Architektur ausgeführt
- D.h. dass ein aus 4 Bytes, zusammengesetztes Wort $X = a_3 a_2 a_1 a_0$, dessen Bytes $a_i \in 2^8$ die Zahlenwerte $(a_i)_2 \in [0, 255]$ haben, die Zahl $(a_0)_2 2^{24} + (a_1)_2 2^{16} + (a_2)_2 2^8 + (a_3)_2$ repräsentiert
- Dagegen verwendet `SHA-1` eine big endian Architektur
- D.h. dass $X = a_3 a_2 a_1 a_0$ die Zahl $(a_3)_2 2^{24} + (a_2)_2 2^{16} + (a_1)_2 2^8 + (a_0)_2$ repräsentiert
- Der MD4-Algorithmus benutzt die folgenden Funktionen f_j für $j = 0, \ldots, 47$:

$$f_j(X, Y, Z) := \begin{cases} (X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge Z), & j = 0, \ldots, 15 \\ (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z), & j = 16, \ldots, 31 \\ X \oplus Y \oplus Z, & j = 32, \ldots, 47 \end{cases}$$

Die MD4-Hashfunktion

- Zudem benutzt er die folgenden Konstanten y_j, z_j, s_j für $j = 0, \ldots, 47$:

	y_j (in Hexadezimaldarstellung)
$j = 0, \ldots, 15$	0
$j = 16, \ldots, 31$	5*a*827999
$j = 32, \ldots, 47$	6*ed*9*eba*1

	z_j
$j = 0, \ldots, 15$	$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15$
$j = 16, \ldots, 31$	$0, 4, 8, 12, 1, 5, 9, 13, 2, 6, 10, 14, 3, 7, 11, 15$
$j = 32, \ldots, 47$	$0, 8, 4, 12, 2, 10, 6, 14, 1, 9, 5, 13, 3, 11, 7, 15$

	s_j
$j = 0, \ldots, 15$	$3, 7, 11, 19, 3, 7, 11, 19, 3, 7, 11, 19, 3, 7, 11, 19$
$j = 16, \ldots, 31$	$3, 5, 9, 13, 3, 5, 9, 13, 3, 5, 9, 13, 3, 5, 9, 13$
$j = 32, \ldots, 47$	$3, 9, 11, 15, 3, 9, 11, 15, 3, 9, 11, 15, 3, 9, 11, 15$

Die MD4-Hashfunktion

MD4(x)

1 **input** $x \in \{0,1\}^*, |x| = n$
2 $y := x10^k bin_{64}(n)$, $k \in \{0,1,\ldots,511\}$ mit
$n + 1 + k + 64 \equiv 0 \pmod{512}$
3 $(H_1, H_2, H_3, H_4) := (67452301, efcdab89, 98badcfe, 10325476)$
4 sei $y = M_1 \cdots M_r$, $r = (n + 1 + k + 64)/512$
5 **for** $i := 1$ **to** r **do**
6 sei $M_i = X[0] \cdots X[15]$
7 $(A, B, C, D) := (H_1, H_2, H_3, H_4)$
8 **for** $j := 0$ **to** 47 **do**
9 $(A, B, C, D) := (D, (A + f_j(B, C, D) + X[z_j] + y_j) \hookleftarrow s_j, B, C)$
10 $(H_1, H_2, H_3, H_4) := (H_1 + A, H_2 + B, H_3 + C, H_4 + D)$
11 **output** $H_1 H_2 H_3 H_4$

- In Zeile 9 wird die Kompressionsfunktion von MD4 berechnet:
$(A, B, C, D, X[z_j]) \mapsto (D, (A + f_j(B, C, D) + X[z_j] + y_j) \hookleftarrow s_j, B, C)$

Die MD4-Hashfunktion

- Für MD4 konnten nach ca. 2^{20} Hashwertberechnungen Kollisionen aufgespürt werden
- Deshalb gilt MD4 heutzutage nicht mehr als kollisionsresistent

Die MD5-Hashfunktion

- Der MD5 ist eine 1991 von Rivest präsentierte verbesserte Version von MD4
- Die Bitlänge von MD5 beträgt wie bei MD4 $l = 128$ Bit
- Bei einer Wortlänge von 32 Bit entspricht dies 4 Wörtern
- In MD5 werden teilweise andere Konstanten als in MD4 verwendet
- Zudem besitzt MD5 eine zusätzliche 4. Runde ($j = 48, \ldots, 63$), in der die Funktion $f_j(X, Y, Z) = Y \oplus (X \vee \neg Z)$ verwendet wird
- Außerdem wurde die in Runde 2 von MD4 verwendete Funktion durch $f_j(X, Y, Z) := (X \wedge Z) \vee (Y \wedge \neg Z)$, $j = 16 \ldots 31$, ersetzt
- Die y-Konstanten sind definiert als

  $y_j :=$ die ersten 32 Bit der Binärdarstellung von $\text{abs}(\sin(j + 1))$, $0 \leq j \leq 63$,

Die MD5-Hashfunktion

- Zudem benutzt der MD5 die folgenden Konstanten z_j und s_j:

j	z_j
$0, \ldots, 15$	$z_j = j$: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15$
$16, \ldots, 31$	$z_j = (5j + 1) \bmod 16$: $1, 6, 11, 0, 5, 10, 15, 4, 9, 14, 3, 8, 13, 2, 7, 12$
$32, \ldots, 47$	$z_j = (3j + 5) \bmod 16$: $5, 8, 11, 14, 1, 4, 7, 10, 13, 0, 3, 6, 9, 12, 15, 2$
$48, \ldots, 63$	$z_j = 7j \bmod 16$: $0, 7, 14, 5, 12, 3, 10, 1, 8, 15, 6, 13, 4, 11, 2, 9$

j	s_j
$0, \ldots, 15$	$7, 12, 17, 22, 7, 12, 17, 22, 7, 12, 17, 22, 7, 12, 17, 22$
$16, \ldots, 31$	$5, 9, 14, 20, 5, 9, 14, 20, 5, 9, 14, 20, 5, 9, 14, 20$
$32, \ldots, 47$	$4, 11, 16, 23, 4, 11, 16, 23, 4, 11, 16, 23, 4, 11, 16, 23$
$48, \ldots, 63$	$6, 10, 15, 21, 6, 10, 15, 21, 6, 10, 15, 21, 6, 10, 15, 21$

Die MD5-Hashfunktion

MD5(x)

input $x \in \{0,1\}^*, |x| = n$
$y := x10^k bin_{64}(n)$, $k \in \{0,1,\ldots,511\}$ mit
$n + 1 + k + 64 \equiv 0 \pmod{512}$
$(H_1, H_2, H_3, H_4) := (67452301, efcdab89, 98badcfe, 10325476)$
sei $y = M_1 \cdots M_r$, $r = (n + 1 + k + 64)/512$
for $i := 1$ **to** r **do**
  sei $M_i = X[0] \cdots X[15]$
  $(A, B, C, D) := (H_1, H_2, H_3, H_4)$
  for $j := 0$ **to** 63 **do**
    $(A, B, C, D) := (D, B + (A + f_j(B, C, D) + X[z_j] + y_j) \hookleftarrow s_j, B, C)$
  $(H_1, H_2, H_3, H_4) := (H_1 + A, H_2 + B, H_3 + C, H_4 + D)$
output $H_1 H_2 H_3 H_4$

- Für MD5 konnten in 2004 ebenfalls Kollisionspaare gefunden werden
- Für die Kompressionsfunktion von MD5 gelang dies bereits 1996

Die SHA-1-Hashfunktion

- Der Secure Hash Algorithm (SHA-1) ist eine Weiterentwicklung des MD4 bzw. MD5 Algorithmus
- Er gilt in den USA als Standard und ist Bestandteil des von der US-Behörde NIST (National Institute of Standards and Technology) im August 1991 veröffentlichten DSS (Digital Signature Standard)
- Die Bitlänge von SHA-1 beträgt $l = 160$ Bit
- Bei einer Wortlänge von 32 Bit entspricht dies 5 Wörtern
- SHA-1 unterscheidet sich nur geringfügig von der SHA-0 Hashfunktion, in der eine Schwachstelle dazu führt, dass nach Berechnung von ca. 2^{61} Hashwerten ein Kollisionspaar gefunden werden kann (obwohl bei einem Geburtstagsangriff auf Grund der Hashwertlänge von 160 Bit ca. 2^{80} Berechnungen erforderlich sein müssten)
- Diese potentielle Schwäche von SHA-0 wurde im SHA-1 dadurch entfernt, dass SHA-1 in Zeile 8 einen zirkulären Shift um eine Bitstelle ausführt

Die SHA-1-Hashfunktion

- Der SHA-1-Algorithmus benutzt die folgenden Konstanten K_j für $j = 0, \ldots, 79$:

	K_j (in Hexadezimaldarstellung)
$j = 0, \ldots, 19$	$5a827999$
$j = 20, \ldots, 39$	$6ed9eba1$
$j = 40, \ldots, 59$	$8f1bbcdc$
$j = 60, \ldots, 79$	$ca62c1d6$

und folgende Funktionen f_j für $j = 0, \ldots, 79$:

$$f_j(X, Y, Z) := \begin{cases} (X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge Z), & j = 0, \ldots, 19 \\ X \oplus Y \oplus Z, & j = 20, \ldots, 39 \\ (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z), & j = 40, \ldots, 59 \\ X \oplus Y \oplus Z, & j = 60, \ldots, 79 \end{cases}$$

Die SHA-1-Hashfunktion

SHA-1(x)

1 **input** $x \in \{0,1\}^*, |x| = n$
2 $y := x10^k bin_{64}(n)$, $k \in \{0,1,\ldots,511\}$ mit
$n + 1 + k + 64 \equiv 0 \pmod{512}$
3 $(H_0,\ldots,H_4) := (67452301, efcdab89, 98badcfe, 10325476, c3d2e1f0)$
4 sei $y = M_1 \cdots M_r$, $r = (n+1+k+64)/512$
5 **for** $i := 1$ **to** r **do**
6 sei $M_i = X[0] \cdots X[15]$
7 **for** $t := 16$ **to** 79 **do**
8 $X[t] := (X[t-3] \oplus X[t-8] \oplus X[t-14] \oplus X[t-16]) \hookleftarrow 1$
9 $(A,B,C,D,E) := (H_0,H_1,H_2,H_3,H_4)$
10 **for** $j := 0$ **to** 79 **do**
11 $temp := (A \hookleftarrow 5) + f_j(B,C,D) + E + X[j] + K_j$
12 $(A,B,C,D,E) := (temp, A, B \hookleftarrow 30, C, D)$
13 $(H_0,\ldots,H_4) := (H_0 + A,\ldots,H_4 + E)$
14 **output** $H_0H_1H_2H_3H_4$

Die SHA-2-Familie

- Im Jahr 2001 veröffentlichte die US-Behörde NIST drei weitere Hashfunktionen der SHA-Familie: SHA-256, SHA-384, and SHA-512
- Diese Funktionen werden auch als SHA-2 Hashfunktionen bezeichnet
- In 2004 kam noch SHA-224 als vierte Variante hinzu
- SHA-256 und SHA-512 haben denselben Aufbau, unterscheiden sich aber in erster Linie in der benutzten Wortlänge: 32 Bit bei SHA-256 und 64 Bit bei SHA-512
- Zudem werden unterschiedliche Shift- und Summationskonstanten verwendet und auch die Rundenzahlen differieren
- SHA-224 und SHA-384 sind reduzierte Varianten von SHA-256 und SHA-512

Die SHA-2-Familie

- Der SHA-256-Algorithmus benutzt die folgenden Konstanten K_j, $j = 0, \ldots, 63$ (in Hexadezimaldarstellung):

  428a2f98, 71374491, b5c0fbcf, e9b5dba5, 3956c25b, 59f111f1, 923f82a4, ab1c5ed5,
  d807aa98, 12835b01, 243185be, 550c7dc3, 72be5d74, 80deb1fe, 9bdc06a7, c19bf174,
  e49b69c1, efbe4786, 0fc19dc6, 240ca1cc, 2de92c6f, 4a7484aa, 5cb0a9dc, 76f988da,
  983e5152, a831c66d, b00327c8, bf597fc7, c6e00bf3, d5a79147, 06ca6351, 14292967,
  27b70a85, 2e1b2138, 4d2c6dfc, 53380d13, 650a7354, 766a0abb, 81c2c92e, 92722c85,
  a2bfe8a1, a81a664b, c24b8b70, c76c51a3, d192e819, d6990624, f40e3585, 106aa070,
  19a4c116, 1e376c08, 2748774c, 34b0bcb5, 391c0cb3, 4ed8aa4a, 5b9cca4f, 682e6ff3,
  748f82ee, 78a5636f, 84c87814, 8cc70208, 90befffa, a4506ceb, bef9a3f7, c67178f2

- Dies sind jeweils die ersten 32 Bit der binären Nachkommastellen der dritten Wurzeln der ersten 64 Primzahlen $2, \ldots, 311$

Die SHA-256-Hashfunktion

1 **input** $x \in \{0,1\}^*, |x| = n$
2 $y := x10^k bin_{64}(n)$, $k \in \{0,\ldots,511\}$ mit $n+1+k+64 \equiv 0 \pmod{512}$
3 $(H_0,\ldots,H_7) := (6a09e667,\ldots,5be0cd19)$
4 sei $y = M_1 \cdots M_r$, $r = (n+1+k+64)/512$
5 **for** $i := 1$ **to** r **do**
6 sei $M_i = X[0] \cdots X[15]$
7 **for** $t := 16$ **to** 63 **do**
8 $s0 := (X[t-15] \hookrightarrow 7) \oplus (X[t-15] \hookrightarrow 18) \oplus (X[t-15] \to 3)$
9 $s1 := (X[t-2] \hookrightarrow 17) \oplus (X[t-2] \hookrightarrow 19) \oplus (X[t-2] \to 10)$
10 $X[t] := X[t-16] + s0 + X[t-7] + s1$
11 $(A,B,C,D,E,F,G,H) := (H_0,H_1,H_2,H_3,H_4,H_5,H_6,H_7)$
12 **for** $j := 0$ **to** 63 **do** α
13 $(H_0,H_1,\ldots,H_7) := (H_0+A, H_1+B,\ldots,H_7+H)$
14 **output** $H_0H_1H_2H_3H_4H_5H_6H_7$

Die Werte von $H_0,\ldots,H_7$ in Zeile 3 sind die ersten 32 Bit der binären Nachkommastellen der Wurzeln der Primzahlen $2,3,5,7,11,13,17,19$

Die SHA-256-Hashfunktion

Programmstück α

1 $s0 := (A \hookrightarrow 2) \oplus (A \hookrightarrow 13) \oplus (A \hookrightarrow 22)$
2 $maj := (A \wedge B) \oplus (A \wedge C) \oplus (B \wedge C)$
3 $t2 := s0 + maj$
4 $s1 := (E \hookrightarrow 6) \oplus (E \hookrightarrow 11) \oplus (E \hookrightarrow 25)$
5 $ch := (E \wedge F) \oplus (\neg E \wedge G)$
6 $t1 := H + s1 + ch + K_j + X[j]$
7 $(A, B, C, D, E, F, G, H) := (t1 + t2, A, B, C, D + t1, E, F, G)$

Kryptoanalyse von Hashfunktionen (MD4 und MD5)

- Bereits 1991 wurden von den Boer und Bosselaers Schwächen im MD4 aufgedeckt
- Im August 2004 erschien ein Bericht [1] mit einer Anleitung, wie sich Kollisionen für MD4 mittels “hand calculation” finden lassen
- In 1993, fanden den Boer und Bosselaers einen Weg, so genannte “Pseudo-Kollisionen” für die MD5 Kompressionsfunktion zu generieren
- In 1996, fand Dobbertin ein Kollisionspaar für die MD5 Kompressionsfunktion
- Im August 2004 wurden schließlich Kollisionen für MD5 von Xiaoyun Wang, Dengguo Feng, Xuejia Lai und Hongbo Yu berechnet
- Der benötigte Aufwand wurde mit ca. 1 Stunde auf einem IBM p690 Cluster abgeschätzt

Kryptoanalyse von Hashfunktionen (MD5)

- Im März 2005 veröffentlichten Arjen Lenstra, Xiaoyun Wang und Benne de Weger zwei X.509 Zertifikate mit unterschiedlichen Public-keys, die auf denselben MD5-Hashwert führten
- Nur wenige Tage später beschrieb Vlastimil Klima eine Möglichkeit, Kollisionen für MD5 innerhalb weniger Stunden auf einem Notebook zu berechnen
- Mittels der so genannten Tunneling-Methode wurde die Rechenzeit vom gleichen Autor im März 2006 auf eine Minute verkürzt
- Auf der CRYPTO 98 stellten Chabaud und Joux einen Angriff auf SHA-0 vor, der ein Kollisionspaar mit nur 2^{61} Hashwertberechnungen (anstelle von 2^{80} bei einem Geburtstagsangriff) aufspürt

Kryptoanalyse von Hashfunktionen (SHA-0)

- In 2004 fanden Biham und Chen Beinahe-Kollisionen für den SHA-0, bei denen sich die Hashwerte nur an 18 von den 160 Bitpositionen unterschieden
- Zudem legten sie volle Kollisionen für den auf 62 Runden reduzierten SHA-0 Algorithmus vor
- Schließlich wurde im August 2004 die Berechnung einer Kollision für den vollen 80-Runden SHA-0 Algorithmus von Joux, Carribault, Lemuet und Jalby bekannt gegeben
- Hierzu wurden lediglich 2^{51} Hashwerte berechnet, die ca. 80 000 Stunden CPU-Rechenzeit auf einem 2-Prozessor 256-Itanium Supercomputer benötigten

Kryptoanalyse von Hashfunktionen (SHA-0)

- Ebenfalls im August 2004 wurde von Wang, Feng, Lai und Yu auf der CRYPTO 2004 eine Angriffsmethode für MD5, SHA-0 und andere Hashfunktionen vorgestellt, mit der sich die Anzahl der Hashwertberechnungen auf 2^{40} senken lässt
- Dies wurde im Februar 2005 von Xiaoyun Wang, Yiqun Lisa Yin und Hongbo Yu geringfügig auf 2^{39} Hashwertberechnungen verbessert
- Aufgrund der erfolgreichen Angriffe auf SHA-0 rieten mehrere Experten von einer weiteren Verwendung des `SHA-1` ab. Daraufhin kündigte die amerikanische Behörde NIST an, `SHA-1` in 2010 zugunsten der SHA-2 Varianten abzulösen

Kryptoanalyse von Hashfunktionen (SHA-1 und SHA-2)

- Im Jahr 2005 veröffentlichten Rijmen und Oswald einen Angriff, der mit weniger als 2^{80} Hashwertberechnungen ein Kollisionspaar für den auf 53 Runden reduzierten `SHA-1` Algorithmus findet
- Nur wenig später kündigten Xiaoyun Wang, Yiqun Lisa Yin und Hongbo Yu einen Angriff auf den vollen 80-Runden `SHA-1` mit 2^{69} Hashwertberechnungen an
- Im August 2005 erfuhr der benötigte Aufwand von Xiaoyun Wang, Andrew Yao und Frances Yao auf der CRYPTO 2005 eine weitere Reduktion auf 2^{63} Berechnungen
- In 2008 wurde von Stephane Manuel ein Kollisionsangriff mit einem geschätzten Aufwand von 2^{51} bis 2^{57} Berechnungen veröffentlicht
- Im Februar 2017 fanden Stevens, Bursztein, Karpman, Albertini und Markov die erste Kollision für SHA-1
- Die besten bekannten Angriffe gegen SHA-2 brechen die von 64 auf 41 Runden reduzierte Variante von SHA-256 und die von 80 auf 46 Runden reduzierte Variante von SHA-512

Der SHA-3 Algorithmus

- Im Oktober 2012 wurde der Hash-Algorithmus Keccak als Gewinner des vom NIST ausgeschriebenen Wettbewerbs für den SHA-3-Algorithmus ausgewählt
- Die Intention dabei war nicht, SHA-2 als Standard durch SHA-3 abzulösen, zumal bisher keine erfolgreichen Angriffe gegen SHA-2 bekannt sind
- Vielmehr ging es bei diesem Wettbewerb darum, angesichts der erfolgreichen Angriffe gegen MD5 und SHA-0, die einen ähnlichen Aufbau wie SHA-1 und SHA-2 haben, eine auf einem vollkommen anderen Entwurfsprinzip basierende Alternative zur Verfügung zu stellen

Die Sponge-Konstruktion

- Die Konstruktionsidee hinter dem SHA-3-Gewinner Keccak wird von den Autoren als *Sponge* (Schwamm) bezeichnet
- Auf der Basis dieser Entwurfsmethode lassen sich außer Hashfunktionen bspw. auch Pseudozufallsgeneratoren gewinnen
- Der Aufbau eines Sponges ähnelt oberflächlich betrachtet der bereits vorgestellten Konstruktion von iterierten Hashfunktionen, weist aber einige Unterschiede auf
- So basiert ein Sponge statt auf einer Kompressionsfunktion h auf einer Permutation (oder allgemeiner Transformation) $f : \{0,1\}^b \to \{0,1\}^b$, die wie h iteriert angewendet wird
- Dabei wird der aktuelle b-Bitblock in zwei Teilblöcke der Länge r und c unterteilt, die als äußerer bzw. innerer Zustand bezeichnet werden

Die Sponge-Konstruktion

- Wie der Name schon sagt, verbleiben die Bits des inneren Zustands im Sponge, d.h. sie dienen nur zur Berechnung des nächsten Zustands und werden im Gegensatz zu den Bits des äußeren Zustands nicht unmittelbar für die Gewinnung der Ausgabe genutzt
- Die Anzahl c der Bits des inneren Zustands wird als ***Kapazität*** des Sponges bezeichnet und ist sein wichtigster Sicherheitsparameter
- Die Anzahl r der Bits des äußeren Zustands heißt ***Bitrate***, wobei $r + c = b$ gelten muss

Die Sponge-Konstruktion

- Bevor die Funktion f im Kern des Algorithmus iteriert angewendet wird, um eine Zustandsfolge zu generieren, wird ein Preprocessing ausgeführt
- Die Anforderungen an diese Funktion beschreiben wir vorab

Definition

Eine Funktion $y\colon \{0,1\}^* \to \bigcup_{k\geq 1}\{0,1\}^{kr}$ heißt ***sponge-konforme Paddingfunktion*** für Bitrate $r \geq 1$, falls gilt:

- $\forall n \geq 0\, \exists z \forall x \in \{0,1\}^n : y(x) = xz$
- $\forall k \geq 0\, \forall x \neq x' : y(x) \neq y(x')0^{kr}$

- Es ist leicht zu sehen, dass die Funktion

$$\mathrm{pad10^*1}_r(x) = x10^d1 \text{ mit } d = \min\{i \geq 0 \mid |x| + 2 + i \equiv_r 0\}$$

  sponge-konform für die Bitrate r ist
- Tatsächlich ist $\mathrm{pad10^*1}_r$ sogar für jede Bitrate $r' \geq 1$ sponge-konform
- Ohne die abschließende 1 wäre dies nicht der Fall

Die Sponge-Konstruktion

Definition

- Sei y eine sponge-konforme Paddingfunktion für $r \geq 1$ und $f : \{0,1\}^b \to \{0,1\}^b$
- Dann ist die Funktion $\mathtt{Sponge}_{f,y,r} : \mathbb{N} \times \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ ist wie folgt definiert
- Für $x \in \{0,1\}^*$ sei $y(x) = y_1 \dots y_k$ mit $|y_i| = r$ für $i = 1, \dots, k$
- Wir definieren die Zustände

$$s_i = \begin{cases} 0^b & i = 0 \\ f(s_{i-1} \oplus (y_i 0^c)) & 1 \leq i \leq k \quad \text{(Absorptionsphase)} \\ f(s_{i-1}) & i > k \quad \text{(Squeezing-Phase)} \end{cases}$$

- Weiter bezeichne z_i für $i \geq 1$ die ersten r Bit von s_{k+i-1}

Die Sponge-Konstruktion

Definition (Fortsetzung)

- Zudem sei $m = \lfloor \frac{l}{r} \rfloor$ und z'_{m+1} bezeichne die ersten $l - mr$ Bits von z_{m+1}
- Dann ist

$$\texttt{Sponge}_{f,y,r}(l, x) = z_1 \dots z_m z'_{m+1}$$

- Für die Analyse definieren wir noch

$$\texttt{Absorb}_{f,y,r}(x) = s_k \text{ und } \texttt{Squeeze}_{f,r}(l, s_k) = z_1 \dots z_m z'_{m+1}$$