Vorlesungsskript

Einführung in die Theoretische Informatik

Wintersemester 2020/21

Prof. Dr. Johannes Köbler
Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Komplexität und Kryptografie

14. Januar 2021

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Rechenmaschinen spielen in der Informatik eine zentrale Rolle. In dieser Vorlesung beschäftigen wir uns mit mathematischen Modellen für Maschinentypen von unterschiedlicher Berechnungskraft. Unter anderem lernen wir das Rechenmodell der Turingmaschine (TM) kennen, mit dem sich alle anderen Rechenmodelle simulieren lassen. Ein weiteres wichtiges Thema der Vorlesung ist die Frage, welche Probleme algorithmisch lösbar sind und wo die Grenzen der Berechenbarkeit verlaufen.

Schließlich untersuchen wir die Komplexität von algorithmischen Problemen, indem wir den benötigten Rechenaufwand möglichst gut nach oben und unten abschätzen. Eine besondere Rolle spielen hierbei die NP-vollständigen Probleme, deren Komplexität bis heute offen ist.

Themen der Vorlesung

- Welche Rechenmodelle sind für bestimmte Aufgaben adäquat? (Automatentheorie)
- Welche Probleme sind lösbar? (Berechenbarkeitstheorie)
- Welcher Aufwand ist zur Lösung eines algorithmischen Problems nötig? (Komplexitätstheorie)

In den theoretisch orientierten Folgeveranstaltungen wird es dagegen um folgende Themen gehen.

Thema der Vorlesung Algorithmen und Datenstrukturen

- Wie lassen sich praktisch relevante Problemstellungen möglichst effizient lösen? (Algorithmik)

Thema der Vorlesung Logik in der Informatik

- Mathematische Grundlagen der Informatik, Beweise führen, Modellierung (Aussagenlogik, Prädikatenlogik)

Die wichtigsten **Lernziele der Vorlesung** sind:

- Überblick über die wichtigsten Rechenmodelle (Automaten) wie z.B.
  - endliche Automaten
  - Kellerautomaten
  - Turingmaschinen
  - Registermaschinen
  - Schaltkreise
- Charakterisierung der Klassen aller mit diesen Rechenmodellen lösbaren Probleme durch
  - unterschiedliche Typen von formalen Grammatiken
  - Abschlusseigenschaften unter geeigneten Sprachoperationen
  - Reduzierbarkeit auf typische Probleme (Vollständigkeit)
- Erkennen von Grenzen der Berechenbarkeit
- Klassifikation wichtiger algorithmischer Probleme nach ihrer Komplexität

Rechenmaschinen spielen in der Informatik eine zentrale Rolle Es gibt viele unterschiedliche mathematische Modelle für Rechenmaschinen. Diese können sich in ihrer Berechnungskraft unterscheiden. Die Turingmaschine (TM) ist ein universales Berechnungsmodell, da sie alle anderen bekannten Rechenmodelle simulieren kann. Wir betrachten zunächst Einschränkungen des TM-Modells, die vielfältige praktische Anwendungen haben, wie z.B.

- endliche Automaten (DFA, NFA)
- Kellerautomaten (PDA, DPDA) etc.

Der Begriff *Algorithmus* geht auf den persischen Gelehrten Muhammed Al Chwarizmi (8./9. Jhd.) zurück. Der älteste bekannte nicht-triviale

Algorithmus ist der nach *Euklid* benannte Algorithmus zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen (300 v. Chr.). Von einem Algorithmus wird erwartet, dass er für jede zulässige *Problemeingabe* nach endlich vielen Rechenschritten eine korrekte *Ausgabe* liefert. Eine wichtige Rolle spielen *Entscheidungsprobleme*, bei denen jede Eingabe nur mit ja oder nein beantwortet wird. Die (maximale) Anzahl der Rechenschritte bei allen möglichen Eingaben ist nicht beschränkt, d.h. mit wachsender Eingabelänge kann auch die Rechenzeit beliebig anwachsen. Die Beschreibung eines Algorithmus muss jedoch endlich sein. Problemeingaben können Zahlen, Formeln, Graphen etc. sein. Diese werden über einem *Eingabealphabet* Σ kodiert.

Definition 1.

a) Ein ***Alphabet*** *ist eine linear geordnete Menge* $\Sigma = \{a_1, \dots, a_m\}$ *von* $m \geq 1$ ***Zeichen*** $a_1 < \dots < a_m$.

b) Eine Folge $x = x_1 \dots x_n$ *von* $n \geq 0$ *Zeichen* $x_i \in \Sigma$ *heißt* ***Wort*** *der* ***Länge*** n *über* Σ.

c) Die Länge von x *wird mit* $|x|$ *und die Menge aller Wörter der Länge* n *über* Σ *wird mit* Σ^n *bezeichnet.*

d) Die Menge aller Wörter über Σ *ist*

$$\Sigma^* = \bigcup_{n \geq 0} \Sigma^n = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \dots$$

e) Das (einzige) Wort der Länge $n = 0$ *ist das* ***leere Wort****, welches wir mit* ε *bezeichnen, d.h.* $\Sigma^0 = \{\varepsilon\}$.

f) Jede Teilmenge $L \subseteq \Sigma^*$ *heißt* ***Sprache*** *über dem Alphabet* Σ.

Beispiel 2. *Sei* Σ *ein Alphabet. Dann sind* $\varnothing, \Sigma^*, \Sigma$ *und* $\{\varepsilon\}$ *Sprachen über* Σ. *Die Sprache* $\varnothing$ *enthält keine Wörter und heißt* ***leere Sprache****. Die Sprache* Σ^* *enthält dagegen alle Wörter über* Σ*, während die Sprache* Σ *alle Wörter über* Σ *der Länge 1 enthält. Die Sprache* $\{\varepsilon\}$ *enthält nur das leere Wort, ist also einelementig. Einelementige Sprachen werden auch als* ***Singletonsprachen*** *bezeichnet.*

Da Sprachen Mengen sind, können wir sie bzgl. Inklusion vergleichen. Zum Beispiel gilt

$$\varnothing \subseteq \{\varepsilon\} \subseteq \Sigma^*.$$

Wir können Sprachen auch vereinigen, schneiden und komplementieren. Seien A und B Sprachen über Σ. Dann ist

- $A \cap B = \{x \in \Sigma^* \mid x \in A, x \in B\}$ der ***Schnitt*** von A und B,
- $A \cup B = \{x \in \Sigma^* \mid x \in A \vee x \in B\}$ die ***Vereinigung*** von A und B, und
- $\overline{A} = \{x \in \Sigma^* \mid x \notin A\}$ das ***Komplement*** von A.

Neben den Mengenoperationen gibt es auch spezielle Sprachoperationen.

Definition 3.

- *Das* ***Produkt*** *(****Verkettung****,* ***Konkatenation****) der Sprachen* A *und* B *ist*

$$AB = \{xy \mid x \in A, y \in B\}.$$

  Ist $A = \{x\}$ *eine Singletonsprache, so schreiben wir für* $\{x\}B$ *auch einfach* xB.

- *Die* ***n-fache Potenz*** $\boldsymbol{A^n}$ *einer Sprache* A *ist induktiv definiert durch*

$$A^n = \begin{cases} \{\varepsilon\}, & n = 0, \\ A^{n-1}A, & n > 0. \end{cases}$$

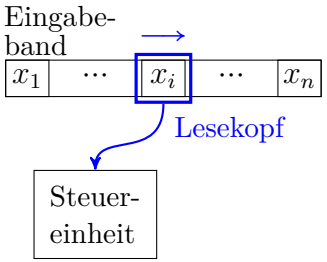
- *Die* ***Sternhülle*** $\boldsymbol{A^*}$ *einer Sprache* A *ist* $A^* = \bigcup_{n \geq 0} A^n$ *und die* ***Plushülle*** $\boldsymbol{A^+}$ *von* A *ist* $A^+ = \bigcup_{n \geq 1} A^n = AA^*$.

2 Reguläre Sprachen

Wir betrachten zunächst Einschränkungen des TM-Modells, die vielfältige praktische Anwendungen haben, wie z.B. endliche Automaten (DFA, NFA), Kellerautomaten (PDA, DPDA) etc.

2.1 Endliche Automaten

Ein endlicher Automat führt bei einer Eingabe der Länge n nur n Rechenschritte aus. Um die gesamte Eingabe lesen zu können, muss der Automat also in jedem Schritt ein Zeichen der Eingabe verarbeiten.



Definition 4. *Ein* ***endlicher Automat*** *(kurz: DFA; deterministic finite automaton) wird durch ein 5-Tupel $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ beschrieben, wobei*

- *$Z \neq \varnothing$ eine endliche Menge von* ***Zuständen****,*
- *Σ das* ***Eingabealphabet****,*
- *$\delta : Z \times \Sigma \to Z$ die* ***Überführungsfunktion****,*
- *$q_0 \in Z$ der* ***Startzustand*** *und*
- *$E \subseteq Z$ die Menge der* ***Endzustände*** *ist.*

Die von M ***akzeptierte*** *oder* ***erkannte Sprache*** *ist*

$$L(M) = \left\{ x_1 \dots x_n \in \Sigma^* \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{es gibt } q_1, \dots, q_{n-1} \in Z, q_n \in E \text{ mit} \\ \delta(q_i, x_{i+1}) = q_{i+1} \text{ für } i = 0, \dots, n-1 \end{array} \right\}.$$

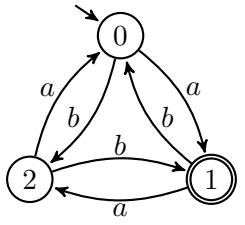
Eine Zustandsfolge $q_0, q_1, \dots, q_n$ heißt ***Rechnung*** *von $M(x_1 \dots x_n)$, falls $\delta(q_i, x_{i+1}) = q_{i+1}$ für $i = 0, \dots, n-1$ gilt. Sie heißt* ***akzeptierend****, falls $q_n \in E$ ist, und andernfalls* ***verwerfend****. Eine von einem DFA akzeptierte Sprache wird als* ***regulär*** *bezeichnet. Die zugehörige Sprachklasse ist*

$$\mathsf{REG} = \{L(M) \mid M \text{ ist ein DFA}\}.$$

Beispiel 5. *Betrachte den DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, 0, E)$ mit $Z = \{0, 1, 2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $E = \{1\}$ und der Überführungsfunktion*

δ	0	1	2
a	1	2	0
b	2	0	1

Graphische Darstellung:



Der Startzustand wird meist durch einen Pfeil und Endzustände werden durch einen doppelten Kreis gekennzeichnet.

Bei Eingabe $w_1 = aba$ führt M die akzeptierende Rechnung $0, 1, 0, 1$ durch, d.h. $w_1 \in L(M)$. Dagegen verwirft M das Wort $w_2 = abba$ (verwerfende Rechnung: $0, 1, 0, 2, 0$). ◁

Bezeichne $\hat{\delta}(q, x)$ denjenigen Zustand, in dem sich M nach Lesen von x befindet, wenn M im Zustand q gestartet wird. Dann können wir die Funktion

$$\hat{\delta} : Z \times \Sigma^* \to Z$$

induktiv wie folgt definieren. Für $q \in Z$, $x \in \Sigma^*$ und $a \in \Sigma$ sei

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(q, \varepsilon) &= q, \\ \hat{\delta}(q, xa) &= \delta(\hat{\delta}(q, x), a). \end{aligned}$$

Die von M erkannte Sprache lässt sich nun elegant durch

$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, x) \in E\}$$

beschreiben.

Behauptung 6. *Der DFA M aus Beispiel 5 akzeptiert die Sprache*

$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \#_a(x) - \#_b(x) \equiv_3 1\},$$

wobei $\#_a(x)$ die Anzahl der Vorkommen des Zeichens a in x bezeichnet und $i \equiv_m j$ (in Worten: i ist kongruent zu j modulo m) bedeutet, dass $i - j$ durch m teilbar ist.

Beweis. Da M nur den Endzustand 1 hat, ist $L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(0, x) = 1\}$, d.h. wir müssen folgende Äquivalenz zeigen:

$$\hat{\delta}(0, x) = 1 \Leftrightarrow \#_a(x) - \#_b(x) \equiv_3 1.$$

Hierzu reicht es, die Kongruenz

$$\hat{\delta}(0, x) \equiv_3 \#_a(x) - \#_b(x).$$

zu beweisen, wofür wir Induktion über die Länge n von x benutzen.

Induktionsanfang ***($n = 0$):*** klar, da $\hat{\delta}(0, \varepsilon) = \#_a(\varepsilon) = \#_b(\varepsilon) = 0$ ist.

Induktionsschritt ***($n \rightsquigarrow n+1$):*** Sei $x = x_1 \dots x_{n+1}$ gegeben und sei $i = \hat{\delta}(0, x_1 \dots x_n)$. Nach IV gilt dann

$$i \equiv_3 \#_a(x_1 \dots x_n) - \#_b(x_1 \dots x_n).$$

Wegen $\delta(i, a) \equiv_3 i + 1$ und $\delta(i, b) \equiv_3 i - 1$ folgt daher

$$\begin{aligned} \delta(i, x_{n+1}) &\equiv_3 i + \#_a(x_{n+1}) - \#_b(x_{n+1}) \\ &\equiv_3 \#_a(x_1 \dots x_n) - \#_b(x_1 \dots x_n) + \#_a(x_{n+1}) - \#_b(x_{n+1}) \\ &= \#_a(x) - \#_b(x). \end{aligned}$$

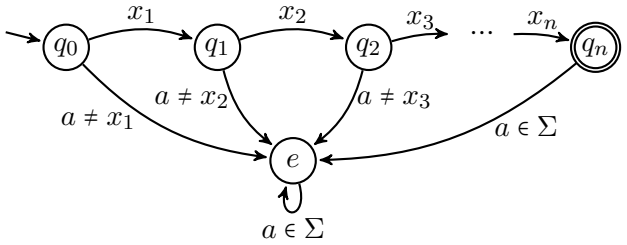
und somit

$$\hat{\delta}(0, x) = \delta(\hat{\delta}(0, x_1 \dots x_n), x_{n+1}) = \delta(i, x_{n+1}) \equiv_3 \#_a(x) - \#_b(x).$$

■

Beobachtung 7. *Alle Singletonsprachen sind regulär.*

Beweis. Für jedes Wort $x = x_1 \dots x_n$ existiert ein DFA M_x mit $L(M_x) = \{x\}$:



Formal ist M_x also das Tupel $(Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ mit $Z = \{q_0, \dots, q_n, e\}$, $E = \{q_n\}$ und der Überführungsfunktion

$$\delta(q, a_j) = \begin{cases} q_{i+1}, & q = q_i \text{ für ein } i \text{ mit } 0 \leq i \leq n-1 \text{ und } a_j = x_{i+1} \\ e, & \text{sonst.} \end{cases}$$

■

Als nächstes betrachten wir Abschlusseigenschaften der Sprachklasse REG.

Definition 8. *Ein* ***k-stelliger Sprachoperator*** *ist eine Abbildung op, die k Sprachen $L_1, \dots, L_k$ auf eine Sprache $op(L_1, \dots, L_k)$ abbildet.*

Beispiel 9. *Der Schnittoperator $\cap$ bildet zwei Sprachen L_1 und L_2 auf die Sprache $L_1 \cap L_2$ ab.* ◁

Definition 10. *Eine Sprachklasse $\mathcal{K}$ heißt unter op* ***abgeschlossen****, wenn gilt:*

$$L_1, \dots, L_k \in \mathcal{K} \Rightarrow op(L_1, \dots, L_k) \in \mathcal{K}.$$

Der ***Abschluss*** *von $\mathcal{K}$ unter op ist die bzgl. Inklusion kleinste Sprachklasse $\mathcal{K}'$, die $\mathcal{K}$ enthält und unter op abgeschlossen ist.*

Beispiel 11. *Der Abschluss der Singletonsprachen unter $\cap$ besteht aus allen Singletonsprachen und der leeren Sprache.*

Der Abschluss der Singletonsprachen unter $\cup$ besteht aus allen nichtleeren endlichen Sprachen.

Der Abschluss der Singletonsprachen unter $\cap$, $\cup$ und Komplement besteht aus allen endlichen und co-endlichen Sprachen.[*] ◁

Definition 12. *Für eine Sprachklasse $\mathcal{C}$ bezeichne co-$\mathcal{C}$ die Klasse $\{\bar{L} \mid L \in \mathcal{C}\}$ aller Komplemente von Sprachen in $\mathcal{C}$.*

Es ist leicht zu sehen, dass $\mathcal{C}$ genau dann unter Komplementbildung abgeschlossen ist, wenn *co-*$\mathcal{C} = \mathcal{C}$ ist.

Beobachtung 13. *Mit $L_1, L_2 \in \mathsf{REG}$ sind auch die Sprachen $\overline{L_1} = \Sigma^* \setminus L_1$, $L_1 \cap L_2$ und $L_1 \cup L_2$ regulär.*

Beweis. Sind $M_i = (Z_i, \Sigma, \delta_i, q_0, E_i)$, $i = 1, 2$, DFAs mit $L(M_i) = L_i$, so akzeptiert der DFA

$$\overline{M_1} = (Z_1, \Sigma, \delta_1, q_0, Z_1 \setminus E_1)$$

das Komplement $\overline{L_1}$ von L_1. Der Schnitt $L_1 \cap L_2$ von L_1 und L_2 wird dagegen von dem DFA

$$M = (Z_1 \times Z_2, \Sigma, \delta, (q_0, q_0), E_1 \times E_2)$$

mit

$$\delta((q,p),a) = (\delta_1(q,a), \delta_2(p,a))$$

akzeptiert (M wird auch **Kreuzproduktautomat** genannt). Wegen $L_1 \cup L_2 = \overline{(\overline{L_1} \cap \overline{L_2})}$ ist dann aber auch die Vereinigung von L_1 und L_2 regulär. (Wie sieht der zugehörige DFA aus?) ■

[*] Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist co-endlich, wenn ihr Komplement $\bar{L}$ endlich ist.

Aus Beobachtung 13 folgt, dass alle endlichen und alle co-endlichen Sprachen regulär sind. Da die in Beispiel 5 betrachtete Sprache weder endlich noch co-endlich ist, haben wir damit allerdings noch nicht alle regulären Sprachen erfasst.

Es stellt sich die Frage, ob REG neben den mengentheoretischen Operationen Schnitt, Vereinigung und Komplement unter weiteren Operationen wie etwa Produkt oder Sternhülle abgeschlossen ist. Im übernächsten Abschnitt werden wir sehen, dass die Klasse REG als der Abschluss der endlichen Sprachen unter Vereinigung, Produkt und Sternhülle charakterisierbar (und somit auch unter diesen Operationen abgeschlossen) ist.

Beim Versuch, einen endlichen Automaten für das Produkt $L(M_1)L(M_2)$ zweier regulärer Sprachen zu konstruieren, stößt man auf die Schwierigkeit, den richtigen Zeitpunkt für den Übergang von (der Simulation von) M_1 zu M_2 zu finden. Unter Verwendung eines nichtdeterministischen endlichen Automaten lässt sich dieses Problem jedoch leicht lösen, da dieser den richtigen Zeitpunkt „erraten“ kann.

Im nächsten Abschnitt werden wir nachweisen, dass auch nichtdeterministische endliche Automaten nur reguläre Sprachen erkennen können.

2.2 Nichtdeterministische endliche Automaten

Definition 14. *Ein **nichtdeterministischer endlicher Automat** (kurz: NFA; nondeterministic finite automaton) $N = (Z, \Sigma, \Delta, Q_0, E)$ ist ähnlich aufgebaut wie ein DFA, nur dass er mehrere Startzustände (zusammengefasst in der Menge $Q_0 \subseteq Z$) haben kann und seine Überführungsfunktion die Form*

$$\Delta : Z \times \Sigma \to \mathcal{P}(Z)$$

hat. Hierbei bezeichnet $\mathcal{P}(Z)$ die **Potenzmenge** *(also die Menge aller Teilmengen) von Z. Diese wird auch oft mit 2^Z bezeichnet. Die von N akzeptierte Sprache ist*

$$L(N) = \left\{ x_1 \dots x_n \in \Sigma^* \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists\, q_0 \in Q_0, q_1, \dots, q_{n-1} \in Z, q_n \in E\colon \\ q_{i+1} \in \Delta(q_i, x_{i+1}) \text{ für } i = 0, \dots, n-1 \end{array} \right\}.$$

Eine Zustandsfolge $q_0, q_1, \dots, q_n$ heißt **Rechnung** *von $N(x_1 \dots x_n)$, falls $q_{i+1} \in \Delta(q_i, x_{i+1})$ für $i = 0, \dots, n-1$ gilt.*

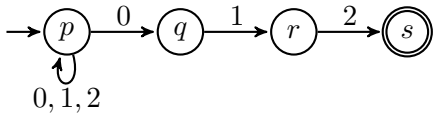
Ein NFA N kann bei einer Eingabe x also nicht nur eine, sondern mehrere verschiedene Rechnungen parallel ausführen. Ein Wort x gehört genau dann zu $L(N)$, wenn $N(x)$ mindestens eine akzeptierende Rechnung hat.

Im Gegensatz zu einem DFA, dessen Überführungsfunktion auf der gesamten Menge $Z \times \Sigma$ definiert ist, kann ein NFA „stecken bleiben“. Das ist dann der Fall, wenn er in einen Zustand q gelangt, in dem das nächste Eingabezeichen x_i wegen $\Delta(q, x_i) = \varnothing$ nicht gelesen werden kann.

Beispiel 15. *Betrachte den NFA $N = (Z, \Sigma, \Delta, Q_0, E)$ mit Zustandsmenge $Z = \{p, q, r, s\}$, Eingabealphabet $\Sigma = \{0, 1, 2\}$, Start- und Endzustandsmenge $Q_0 = \{p\}$ und $E = \{s\}$ sowie der Überführungsfunktion*

Δ	p	q	r	s
0	$\{p, q\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
1	$\{p\}$	$\{r\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
2	$\{p\}$	$\varnothing$	$\{s\}$	$\varnothing$

Graphische Darstellung:



Offensichtlich akzeptiert N die Sprache $L(N) = \{x012 \mid x \in \Sigma^*\}$ aller Wörter, die mit dem Suffix 012 enden. ◁

Beobachtung 16. *Sind $N_i = (Z_i, \Sigma, \Delta_i, Q_i, E_i)$ $(i = 1, 2)$ NFAs, so werden auch die Sprachen $L(N_1)L(N_2)$ und $L(N_1)^*$ von einem NFA erkannt.*

Beweis. Sei $L_i = L(N_i)$. Wir können $Z_1 \cap Z_2 = \varnothing$ annehmen. Dann akzeptiert der NFA

$$N = (Z_1 \cup Z_2, \Sigma, \Delta_3, Q_1, E)$$

mit

$$\Delta_3(p, a) = \begin{cases} \Delta_1(p, a), & p \in Z_1 \setminus E_1, \\ \Delta_1(p, a) \cup \bigcup_{q \in Q_2} \Delta_2(q, a), & p \in E_1, \\ \Delta_2(p, a), & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$E = \begin{cases} E_2, & Q_2 \cap E_2 = \varnothing \\ E_1 \cup E_2, & \text{sonst} \end{cases}$$

die Sprache $L_1 L_2$.

$L_1 L_2 \subseteq L(N)$: Seien $x = x_1 \cdots x_k \in L_1$, $y = y_1 \cdots y_l \in L_2$ und seien $q_0, \dots, q_k$ und $p_0, \dots, p_l$ akzeptierende Rechnungen von $N_1(x)$ und $N_2(y)$. Dann ist $q_0, \dots, q_k, p_1, \dots, p_l$ eine akz. Rechnung von $N(xy)$, da $q_0 \in Q_1$ und $p_l \in E_2$ ist, und

- im Fall $l \geq 1$ wegen $q_k \in E_1$, $p_0 \in Q_2$ und $p_1 \in \Delta_2(p_0, y_1)$ zudem $p_1 \in \Delta(q_k, y_1)$ und
- im Fall $l = 0$ wegen $q_k \in E_1$ und $p_l \in Q_2 \cap E_2$ zudem $q_k \in E$ ist.

$L(N) \subseteq L_1 L_2$: Sei $x = x_1 \cdots x_n \in L(N)$ und sei $q_0, \dots, q_n$ eine akz. Rechnung von $N(x)$. Dann gilt $q_0 \in Q_1$, $q_n \in E$, $q_0, \dots, q_i \in Z_1$ und $q_{i+1}, \dots, q_n \in Z_2$ für ein $i \leq n$. Wir zeigen, dass ein $q \in Q_2$ existiert, so dass $q_0, \dots, q_i$ eine akz. Rechnung von $N_1(x_1 \cdots x_i)$ und $q, q_{i+1}, \dots, q_n$ eine akz. Rechnung von $N_2(x_{i+1} \cdots x_n)$ ist.

- Im Fall $i < n$ impliziert der Übergang $q_{i+1} \in \Delta(q_i, x_{i+1})$, dass $q_i \in E_1$ (also $q_0, \dots, q_i$ eine akz. Rechnung von $N_1(x_1 \cdots x_i)$) und $q_{i+1} \in \Delta_2(q, x_{i+1})$ für ein $q \in Q_2$ ist. Zudem ist $q_n \in E \cap Z_2 = E_2$ (also $q, q_{i+1}, \dots, q_n$ eine akz. Rechnung von $N_2(x_{i+1} \cdots x_n)$).
- Im Fall $i = n$ ist $q_n \in E \cap Z_1$, was $q_n \in E_1$ und $Q_2 \cap E_2 \neq \varnothing$ impliziert (also ist $q_0, \dots, q_n$ eine akz. Rechnung von $N_1(x_1 \cdots x_n)$ und es gibt ein $q \in Q_2$, so dass q eine akz. Rechnung von $N_2(\varepsilon)$ ist).

Ganz ähnlich lässt sich zeigen, dass der NFA

$$N^* = (Z_1 \cup \{q_{neu}\}, \Sigma, \Delta_4, Q_1 \cup \{q_{neu}\}, E_1 \cup \{q_{neu}\})$$

mit

$$\Delta_4(p,a) = \begin{cases} \Delta_1(p,a), & p \in Z_1 \setminus E_1, \\ \Delta_1(p,a) \cup \bigcup_{q \in Q_1} \Delta_1(q,a), & p \in E_1, \\ \varnothing, & \text{sonst} \end{cases}$$

die Sprache L_1^* akzeptiert. ∎

Satz 17 (Rabin und Scott)**.**
$\mathsf{REG} = \{L(N) \mid N \textit{ ist ein NFA}\}$.

Beweis. Die Inklusion von links nach rechts ist klar, da jeder DFA auch als NFA aufgefasst werden kann. Für die Gegenrichtung konstruieren wir zu einem NFA $N = (Z, \Sigma, \Delta, Q_0, E)$ einen DFA $M = (\mathcal{P}(Z), \Sigma, \delta, Q_0, E')$ mit $L(M) = L(N)$. Wir definieren die Überführungsfunktion $\delta : \mathcal{P}(Z) \times \Sigma \to \mathcal{P}(Z)$ von M mittels

$$\delta(Q,a) = \bigcup_{q \in Q} \Delta(q,a).$$

Die Menge $\delta(Q,a)$ enthält also alle Zustände, in die N gelangen kann, wenn N ausgehend von einem beliebigen Zustand $q \in Q$ das Zeichen a liest. Intuitiv bedeutet dies, dass der DFA M den NFA N simuliert, indem M in seinem aktuellen Zustand Q die Information speichert, in welchen Zuständen sich N momentan befinden könnte. Für die Erweiterung $\hat{\delta} : \mathcal{P}(Z) \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Z)$ von δ (siehe Seite 3) können wir nun folgende Behauptung zeigen.

Behauptung. $\hat{\delta}(Q_0, x)$ enthält alle Zustände, die N ausgehend von einem Startzustand nach Lesen von x erreichen kann.

Wir beweisen die Behauptung induktiv über die Länge n von x.

Induktionsanfang **($n = 0$):** klar, da $\hat{\delta}(Q_0, \varepsilon) = Q_0$ ist.

Induktionsschritt **($n-1 \rightsquigarrow n$):** Sei $x = x_1 \dots x_n$ gegeben. Nach Induktionsvoraussetzung enthält

$$Q_{n-1} = \hat{\delta}(Q_0, x_1 \dots x_{n-1})$$

alle Zustände, die $N(x)$ in genau $n-1$ Schritten erreichen kann. Wegen

$$\hat{\delta}(Q_0, x) = \delta(Q_{n-1}, x_n) = \bigcup_{q \in Q_{n-1}} \Delta(q, x_n)$$

enthält dann aber $\hat{\delta}(Q_0, x)$ alle Zustände, die $N(x)$ in genau n Schritten erreichen kann.

Deklarieren wir nun diejenigen Teilmengen $Q \subseteq Z$, die mindestens einen Endzustand von N enthalten, als Endzustände des **Potenzmengenautomaten** M, d.h.

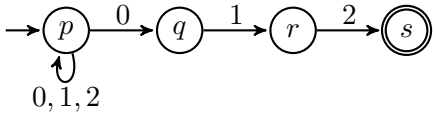
$$E' = \{Q \subseteq Z \mid Q \cap E \neq \varnothing\},$$

so folgt für alle Wörter $x \in \Sigma^*$:

$$\begin{aligned} x \in L(N) &\Leftrightarrow N(x) \text{ kann in genau } |x| \text{ Schritten einen Endzustand erreichen} \\ &\Leftrightarrow \hat{\delta}(Q_0, x) \cap E \neq \varnothing \\ &\Leftrightarrow \hat{\delta}(Q_0, x) \in E' \\ &\Leftrightarrow x \in L(M). \end{aligned}$$

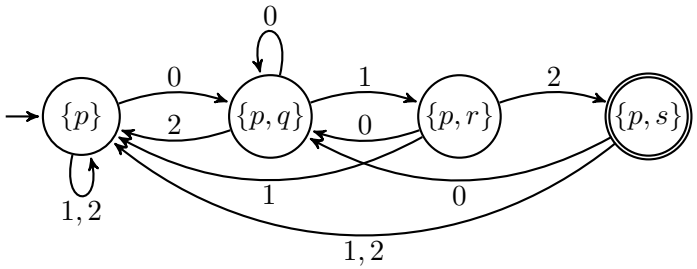
∎

Beispiel 18. *Für den NFA $N = (Z, \Sigma, \Delta, Q_0, E)$ aus Beispiel 15*



ergibt die Konstruktion des vorigen Satzes den folgenden DFA M (nach Entfernen aller vom Startzustand $Q_0 = \{p\}$ aus nicht erreichbaren Zustände):

δ	0	1	2
$Q_0 = \{p\}$	$\{p,q\}$	$\{p\}$	$\{p\}$
$Q_1 = \{p,q\}$	$\{p,q\}$	$\{p,r\}$	$\{p\}$
$Q_2 = \{p,r\}$	$\{p,q\}$	$\{p\}$	$\{p,s\}$
$Q_3 = \{p,s\}$	$\{p,q\}$	$\{p\}$	$\{p\}$



◁

Im obigen Beispiel wurden für die Konstruktion des DFA M aus dem NFA N nur 4 der insgesamt $2^{\|Z\|} = 16$ Zustände benötigt, da die übrigen 12 Zustände in $\mathcal{P}(Z)$ nicht vom Startzustand $Q_0 = \{p\}$ aus erreichbar sind. Es gibt jedoch Beispiele, bei denen alle $2^{\|Z\|}$ Zustände in $\mathcal{P}(Z)$ für die Konstruktion des Potenzmengenautomaten benötigt werden (siehe Übungen).

Korollar 19. *Die Klasse* REG *der regulären Sprachen ist unter folgenden Operationen abgeschlossen:*

- *Komplement,*
- *Schnitt,*
- *Vereinigung,*
- *Produkt,*
- *Sternhülle.*

2.3 Reguläre Ausdrücke

Wir haben uns im letzten Abschnitt davon überzeugt, dass auch NFAs nur reguläre Sprachen erkennen können:

$$\mathsf{REG} = \{L(M) \mid M \text{ ist ein DFA}\} = \{L(N) \mid N \text{ ist ein NFA}\}.$$

In diesem Abschnitt werden wir eine weitere Charakterisierung der regulären Sprachen kennenlernen:

> REG ist die Klasse aller Sprachen, die sich mittels der Operationen Vereinigung, Schnitt, Komplement, Produkt und Sternhülle aus der leeren Menge und den Singletonsprachen bilden lassen.

Tatsächlich kann hierbei sogar auf die Schnitt- und Komplementbildung verzichtet werden.

Definition 20. *Die Menge der* ***regulären Ausdrücke*** γ *(über einem Alphabet* Σ*) und die durch* γ *dargestellte Sprache* $L(\gamma)$ *sind induktiv wie folgt definiert. Die Symbole* $\varnothing$*,* ϵ *und* a *(*$a \in \Sigma$*) sind reguläre Ausdrücke, die*

- *die leere Sprache* $L(\varnothing) = \varnothing$*,*
- *die Sprache* $L(\epsilon) = \{\varepsilon\}$ *und*
- *für jedes Zeichen* $a \in \Sigma$ *die Sprache* $L(a) = \{a\}$

beschreiben. Sind α *und* β *reguläre Ausdrücke, die die Sprachen* $L(\alpha)$ *und* $L(\beta)$ *beschreiben, so sind auch* $\alpha\beta$*,* $(\alpha|\beta)$ *und* $(\alpha)^*$ *reguläre Ausdrücke, die die Sprachen*

- $L(\alpha\beta) = L(\alpha)L(\beta)$*,*
- $L(\alpha|\beta) = L(\alpha) \cup L(\beta)$ *und*
- $L((\alpha)^*) = L(\alpha)^*$

beschreiben.

Bemerkung 21.

- *Um Klammern zu sparen, definieren wir folgende* ***Präzedenzordnung****: Der Sternoperator* * *bindet stärker als der Produktoperator und dieser wiederum stärker als der Vereinigungsoperator. Für* $((a|b(c)^*)|d)$ *können wir also kurz* $a|bc^*|d$ *schreiben.*
- *Da der reguläre Ausdruck* $\gamma\gamma^*$ *die Sprache* $L(\gamma)^+$ *beschreibt, verwenden wir* γ^+ *als Abkürzung für den Ausdruck* $\gamma\gamma^*$*.*

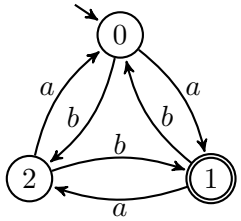
Beispiel 22. *Die regulären Ausdrücke* ϵ^*, $\varnothing^*$, $(0|1)^*00$ *und* $\epsilon 0|\varnothing 1^*$ *beschreiben folgende Sprachen:*

γ	ϵ^*	$\varnothing^*$	$(0\|1)^*00$	$\epsilon 0\|\varnothing 1^*$
$L(\gamma)$	$\{\varepsilon\}^* = \{\varepsilon\}$	$\varnothing^* = \{\varepsilon\}$	$\{x00 \mid x \in \{0,1\}^*\}$	$\{0\}$

◁

Beispiel 23. *Betrachte nebenstehenden DFA* M*. Um für die von* M *erkannte Sprache*

$$L(M) = \{x \in \{a,b\}^* \mid \#_a(x) - \#_b(x) \equiv_3 1\}$$



einen regulären Ausdruck zu finden, betrachten wir zunächst die Sprache $L_{0,0}$ *aller Wörter* x*, die den DFA* M *ausgehend vom Zustand* 0 *in den Zustand* 0 *überführen. Weiter sei* $L_{0,0}^{\neq 0}$ *die Sprache aller solchen Wörter* $w \in L_{0,0}$*, die den Zustand 0 nur zu Beginn und am Ende (aber nicht zwischendurch) besuchen. Dann setzt sich jedes* $x \in L_{0,0}$ *aus beliebig vielen Teilwörtern* $w_1, \ldots, w_k \in L_{0,0}^{\neq 0}$ *zusammen, d.h.* $L_{0,0} = (L_{0,0}^{\neq 0})^*$*.*

Jedes $w \neq \varepsilon$ *in* $L_{0,0}^{\neq 0}$ *beginnt entweder mit einem* a *(Übergang von* 0 *nach* 1*) oder mit einem* b *(Übergang von* 0 *nach* 2*). Im ersten Fall folgt eine beliebige Anzahl von Teilwörtern* ab *(Wechsel zwischen* 1 *und* 2*), an die sich entweder das Suffix* aa *(Rückkehr von* 1 *nach* 0 *über* 2*) oder das Suffix* b *(direkte Rückkehr von* 1 *nach* 0*) anschließt. Analog folgt im zweiten Fall eine beliebige Anzahl von Teilwörtern* ba *(Wechsel zwischen* 2 *und* 1*), an die sich entweder das Suffix* a *(direkte Rückkehr von* 2 *nach* 0*) oder das Suffix* bb *(Rückkehr von* 2 *nach* 0 *über* 1*) anschließt. Daher lässt sich* $L_{0,0}^{\neq 0}$ *durch den regulären Ausdruck*

$$\gamma_{0,0}^{\neq 0} = a(ab)^*(aa|b) \mid b(ba)^*(a|bb) \mid \epsilon$$

beschreiben. Eine ähnliche Überlegung zeigt, dass die Sprache $L_{0,1}^{\neq 0}$ aller Wörter, die M ausgehend von 0 in den Zustand 1 überführen, ohne dass zwischendurch der Zustand 0 nochmals besucht wird, durch den regulären Ausdruck $\gamma_{0,1}^{\neq 0} = (a|bb)(ab)^*$ beschreibbar ist. Somit erhalten wir für $L(M)$ den regulären Ausdruck

$$\gamma_{0,1} = (a(ab)^*(aa|b) \mid b(ba)^*(a|bb))^*(a|bb)(ab)^*.$$

◁

Satz 24. $\{L(\gamma) \mid \gamma$ *ist ein regulärer Ausdruck*$\} = \mathsf{REG}$.

Beweis. Die Inklusion von rechts nach links ist klar, da die Basisausdrücke $\varnothing$, ϵ und a, $a \in \Sigma^*$, nur reguläre Sprachen beschreiben und die Sprachklasse REG unter Produkt, Vereinigung und Sternhülle abgeschlossen ist (siehe Beobachtungen 13 und 16).

Für die Gegenrichtung konstruieren wir zu einem DFA M einen regulären Ausdruck γ mit $L(\gamma) = L(M)$. Sei also $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ ein DFA, wobei wir annehmen können, dass $Z = \{1, \ldots, m\}$ und $q_0 = 1$ ist. Dann lässt sich $L(M)$ als Vereinigung

$$L(M) = \bigcup_{q \in E} L_{1,q}$$

von Sprachen der Form

$$L_{p,q} = \{x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(p,x) = q\}$$

darstellen. Folglich reicht es zu zeigen, dass die Sprachen $L_{p,q}$ durch reguläre Ausdrücke beschreibbar sind. Hierzu betrachten wir die Sprachen

$$L_{p,q}^r = \left\{ x_1 \ldots x_n \in \Sigma^* \;\middle|\; \begin{array}{c} \hat{\delta}(p, x_1 \ldots x_n) = q \text{ und für} \\ i = 1, \ldots, n-1 \text{ gilt } \hat{\delta}(p, x_1 \ldots x_i) \leq r \end{array} \right\}.$$

Wegen $L_{p,q} = L_{p,q}^m$ reicht es, reguläre Ausdrücke $\gamma_{p,q}^r$ für die Sprachen $L_{p,q}^r$ anzugeben. Im Fall $r = 0$ enthält

$$L_{p,q}^0 = \begin{cases} \{a \in \Sigma \mid \delta(p,a) = q\} \cup \{\varepsilon\}, & p = q, \\ \{a \in \Sigma \mid \delta(p,a) = q\}, & \text{sonst} \end{cases}$$

nur Buchstaben (und eventuell das leere Wort) und ist somit leicht durch einen regulären Ausdruck $\gamma^0_{p,q}$ beschreibbar. Wegen

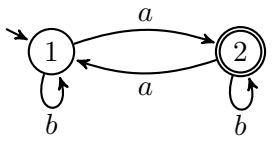
$$L^{r+1}_{p,q} \;=\; L^r_{p,q} \cup L^r_{p,r+1}(L^r_{r+1,r+1})^* L^r_{r+1,q}$$

lassen sich aus den regulären Ausdrücken $\gamma^r_{p,q}$ für die Sprachen $L^r_{p,q}$ leicht reguläre Ausdrücke für die Sprachen $L^{r+1}_{p,q}$ gewinnen:

$$\gamma^{r+1}_{p,q} = \gamma^r_{p,q} | \gamma^r_{p,r+1}(\gamma^r_{r+1,r+1})^* \gamma^r_{r+1,q}.$$

■

Beispiel 25. *Betrachte den DFA*



Da M insgesamt $m = 2$ Zustände und nur den Endzustand 2 besitzt, ist

$$L(M) = \bigcup_{q \in E} L_{1,q} = L_{1,2} = L^2_{1,2} = L(\gamma^2_{1,2}).$$

Um $\gamma^2_{1,2}$ zu berechnen, benutzen wir die Rekursionsformel

$$\gamma^{r+1}_{p,q} = \gamma^r_{p,q} | \gamma^r_{p,r+1}(\gamma^r_{r+1,r+1})^* \gamma^r_{r+1,q}$$

und erhalten

$$\begin{aligned}
\gamma^2_{1,2} &= \gamma^1_{1,2} | \gamma^1_{1,2}(\gamma^1_{2,2})^* \gamma^1_{2,2}, \\
\gamma^1_{1,2} &= \gamma^0_{1,2} | \gamma^0_{1,1}(\gamma^0_{1,1})^* \gamma^0_{1,2}, \\
\gamma^1_{2,2} &= \gamma^0_{2,2} | \gamma^0_{2,1}(\gamma^0_{1,1})^* \gamma^0_{1,2}.
\end{aligned}$$

Um den regulären Ausdruck $\gamma^2_{1,2}$ für $L(M)$ zu erhalten, genügt es also, die regulären Ausdrücke $\gamma^0_{1,1}$, $\gamma^0_{1,2}$, $\gamma^0_{2,1}$, $\gamma^0_{2,2}$, $\gamma^1_{1,2}$ und $\gamma^1_{2,2}$ zu berechnen:

r	p,q			
	$1,1$	$1,2$	$2,1$	$2,2$
0	$\epsilon \mid b$	a	a	$\epsilon \mid b$
1	-	$\underbrace{a \mid (\epsilon \mid b)(\epsilon \mid b)^* a}_{b^* a}$	-	$\underbrace{(\epsilon \mid b) \mid a(\epsilon \mid b)^* a}_{\epsilon \mid b \mid ab^* a}$
2	-	$\underbrace{b^* a \mid b^* a(\epsilon \mid b \mid ab^* a)^*(\epsilon \mid b \mid ab^* a)}_{b^* a(b \mid ab^* a)^*}$	-	-

◁

Korollar 26. *Sei L eine Sprache. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- *L ist regulär (d.h. es gibt einen DFA M mit $L = L(M)$),*
- *es gibt einen NFA N mit $L = L(N)$,*
- *es gibt einen regulären Ausdruck γ mit $L = L(\gamma)$,*
- *L lässt sich mit den Operationen Vereinigung, Produkt und Sternhülle aus endlichen Sprachen gewinnen,*
- *L lässt sich mit den Operationen $\cap$, $\cup$, Komplement, Produkt und Sternhülle aus endlichen Sprachen gewinnen.*

Wir werden bald noch eine weitere Charakterisierung von REG kennenlernen, nämlich durch reguläre Grammatiken. Zuvor befassen wir uns jedoch mit dem Problem, DFAs zu minimieren. Dabei spielen Relationen (insbesondere Äquivalenzrelationen) eine wichtige Rolle.

2.4 Relationalstrukturen

Sei A eine nichtleere Menge, R_i eine k_i-stellige Relation auf A, d.h. $R_i \subseteq A^{k_i}$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann heißt $(A; R_1, \ldots, R_n)$ ***Relationalstruktur***. Die Menge A heißt ***Grundmenge***, ***Trägermenge*** oder ***Individuenbereich*** der Relationalstruktur.

Wir werden hier hauptsächlich den Fall $n = 1$, $k_1 = 2$, also (A, R) mit $R \subseteq A \times A$ betrachten. Man nennt dann R eine ***(binäre) Relation*** auf A. Oft wird für $(a, b) \in R$ auch die ***Infix-Schreibweise*** aRb benutzt.

Beispiel 27.

- (F, M) *mit* $F = \{f \mid f$ *ist Fluss in Europa*$\}$ *und*
$$M = \{(f, g) \in F \times F \mid f \text{ mündet in } g\}.$$
- (U, B) *mit* $U = \{x \mid x$ *ist Berliner*$\}$ *und*
$$B = \{(x, y) \in U \times U \mid x \text{ ist Bruder von } y\}.$$
- $(\mathsf{P}(M), \subseteq)$*, wobei* $\mathsf{P}(M)$ *die Potenzmenge einer beliebigen Menge* M *und* $\subseteq$ *die Inklusionsbeziehung auf den Teilmengen von* M *ist.*
- (A, Id_A)*, wobei* $Id_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$ *die* ***Identität auf*** A *ist.*
- $(\mathbb{R}, \leq)$.
- $(\mathbb{Z}, |)$*, wobei* $|$ *die "teilt"-Relation bezeichnet (d.h.* $a|b$*, falls ein* $c \in \mathbb{Z}$ *mit* $b = ac$ *existiert).* ◁

Da Relationen Mengen sind, sind auf ihnen die mengentheoretischen Operationen ***Schnitt***, ***Vereinigung***, ***Komplement*** und ***Differenz*** definiert. Seien R und S Relationen auf A, dann ist

$$\begin{aligned} R \cap S &= \{(x, y) \in A \times A \mid xRy \wedge xSy\}, \\ R \cup S &= \{(x, y) \in A \times A \mid xRy \vee xSy\}, \\ R - S &= \{(x, y) \in A \times A \mid xRy \wedge \neg xSy\}, \\ \overline{R} &= (A \times A) - R. \end{aligned}$$

Sei allgemeiner $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(A \times A)$ eine beliebige Menge von Relationen auf A. Dann sind der ***Schnitt über*** $\mathcal{M}$ und die ***Vereinigung über*** $\mathcal{M}$ folgende Relationen:

$$\begin{aligned} \bigcap \mathcal{M} &= \bigcap_{R \in \mathcal{M}} R = \{(x, y) \mid \forall R \in \mathcal{M} : xRy\}, \\ \bigcup \mathcal{M} &= \bigcup_{R \in \mathcal{M}} R = \{(x, y) \mid \exists R \in \mathcal{M} : xRy\}. \end{aligned}$$

Die ***transponierte (konverse) Relation*** zu R ist

$$R^T = \{(y, x) \mid xRy\}.$$

R^T wird oft auch mit R^{-1} bezeichnet. Z.B. ist $(\mathbb{R}, \leq^T) = (\mathbb{R}, \geq)$.

Seien R und S Relationen auf A. Das ***Produkt*** oder die ***Komposition*** von R und S ist

$$R \circ S = \{(x, z) \in A \times A \mid \exists y \in A : xRy \wedge ySz\}.$$

Beispiel 28. *Ist* B *die Relation "ist Bruder von",* V *"ist Vater von",* M *"ist Mutter von" und* $E = V \cup M$ *"ist Elternteil von", so ist* $B \circ E$ *die Onkel-Relation.* ◁

Übliche Bezeichnungen für das Relationenprodukt sind auch $R;S$ und $R \cdot S$ oder einfach RS. Das n-fache Relationenprodukt $R \circ \cdots \circ R$ von R wird mit R^n bezeichnet. Dabei ist $R^0 = Id$.

Vorsicht: Das n-fache Relationenprodukt R^n von R sollte nicht mit dem n-fachen kartesischen Produkt $R \times \cdots \times R$ der *Menge* R verwechselt werden. Wir vereinbaren, dass R^n das n-fache Relationenprodukt bezeichnen soll, falls R eine Relation ist.

Eigenschaften von Relationen

Sei R eine Relation auf A. Dann heißt R

reflexiv,	falls $\forall x \in A : xRx$	(also $Id_A \subseteq R$)
irreflexiv,	falls $\forall x \in A : \neg xRx$	(also $Id_A \subseteq \overline{R}$)
symmetrisch,	falls $\forall x, y \in A : xRy \Rightarrow yRx$	(also $R \subseteq R^T$)
asymmetrisch,	falls $\forall x, y \in A : xRy \Rightarrow \neg yRx$	(also $R \subseteq \overline{R^T}$)
antisymmetrisch,	falls $\forall x, y \in A : xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$	(also $R \cap R^T \subseteq Id$)
konnex,	falls $\forall x, y \in A : xRy \vee yRx$	(also $A \times A \subseteq R \cup R^T$)
semikonnex,	falls $\forall x, y \in A : x \neq y \Rightarrow xRy \vee yRx$	(also $\overline{Id} \subseteq R \cup R^T$)
transitiv,	falls $\forall x, y, z \in A : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$	(also $R^2 \subseteq R$)

gilt.

Die nachfolgende Tabelle gibt einen Überblick über die wichtigsten Relationalstrukturen.

	refl.	sym.	trans.	antisym.	asym.	konnex	semikon.
Äquivalenzrelation	✓	✓	✓				
(Halb-)Ordnung	✓		✓	✓			
Striktordnung			✓		✓		
lineare Ordnung			✓	✓		✓	
lin. Striktord.			✓		✓		✓
Quasiordnung	✓		✓				

In der Tabelle sind nur die definierenden Eigenschaften durch ein "✓" gekennzeichnet. Das schließt nicht aus, dass gleichzeitig auch noch weitere Eigenschaften vorliegen können.

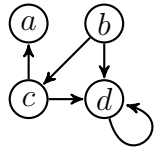
Beispiel 29.

- *Die Relation "ist Schwester von" ist zwar in einer reinen Damengesellschaft symmetrisch, i.a. jedoch weder symmetrisch noch asymmetrisch noch antisymmetrisch.*
- *Die Relation "ist Geschwister von" ist zwar symmetrisch, aber weder reflexiv noch transitiv und somit keine Äquivalenzrelation.*
- $(\mathbb{R}, <)$ *ist irreflexiv, asymmetrisch, transitiv und semikonnex und somit eine lineare Striktordnung.*
- $(\mathbb{R}, \leq)$ *und* $(\mathsf{P}(M), \subseteq)$ *sind reflexiv, antisymmetrisch und transitiv und somit Ordnungen.*
- $(\mathbb{R}, \leq)$ *ist auch konnex und somit eine lineare Ordnung.*
- $(\mathsf{P}(M), \subseteq)$ *ist zwar im Fall* $\|M\| \leq 1$ *konnex, aber im Fall* $\|M\| \geq 2$ *weder semikonnex noch konnex.* ◁

Graphische Darstellung von Relationen

Eine Relation R auf einer endlichen Menge A kann durch einen ***gerichteten Graphen*** (oder ***Digraphen***) $G = (V, E)$ mit ***Knotenmenge*** $V = A$ und ***Kantenmenge*** $E = R$ veranschaulicht werden. Hierzu stellen wir jedes Element $x \in A$ als einen Knoten dar und verbinden jedes Knotenpaar $(x, y) \in R$ durch eine gerichtete Kante (Pfeil). Zwei durch eine Kante verbundene Knoten heißen ***benachbart*** oder ***adjazent***.

Beispiel 30. *Für die Relation* (A, R) *mit* $A = \{a, b, c, d\}$ *und* $R = \{(b, c), (b, d), (c, a), (c, d), (d, d)\}$ *erhalten wir folgende graphische Darstellung.*



◁

Der ***Ausgangsgrad*** eines Knotens $x \in V$ ist $\deg^+(x) = \|R[x]\|$, wobei $R[x] = \{y \in V \mid xRy\}$ die Menge der ***Nachfolger*** von x ist. Entsprechend ist $\deg^-(x) = \|\{y \in V \mid yRx\}\|$ der ***Eingangsgrad*** von x und $R^{-1}[x] = \{y \in V \mid yRx\}$ die Menge der ***Vorgänger*** von x. Falls R symmetrisch ist, werden die Pfeilspitzen meist weggelassen. In diesem Fall ist $d(x) = \deg^-(x) = \deg^+(x)$ der ***Grad*** von x und $R[x] = R^{-1}[x]$ heißt die ***Nachbarschaft*** von x. Ist G zudem ***schleifenfrei*** (d.h. R ist irreflexiv), erhalten wir einen ***(ungerichteten) Graphen***. Eine irreflexive und symmetrische Relation R wird meist als Menge der ungeordneten Paare $E = \big\{\{a,b\} \mid aRb\big\}$ notiert.

Darstellung durch Adjazenzmatrizen

Eine Relation R auf einer endlichen (geordneten) Menge $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ lässt sich durch eine boolesche $n \times n$-Matrix $M_R = (m_{ij})$ mit

$$m_{ij} := \begin{cases} 1, & a_i R a_j, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

darstellen. Beispielsweise hat die Relation

$$R = \{(b,c),(b,d),(c,a),(c,d),(d,d)\}$$

auf der Menge $A = \{a,b,c,d\}$ die Matrixdarstellung

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Darstellung durch Adjazenzlisten

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, eine endliche Relation R in Form einer Tabelle darzustellen, die jedem Element $x \in A$ seine Nachfolger in Form einer Liste zuordnet. Für obige Relation R erhalten wir folgende Listen:

x:	$R[x]$
a:	-
b:	c, d
c:	a, d
d:	d

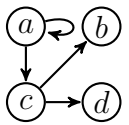
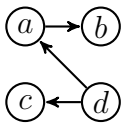
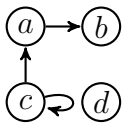
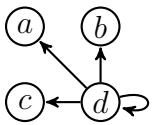
Sind $M_R = (r_{ij})$ und $M_S = (s_{ij})$ boolesche $n \times n$-Matrizen für R und S, so erhalten wir für $T = R \circ S$ die Matrix $M_T = (t_{ij})$ mit

$$t_{ij} = \bigvee_{k=1,\ldots,n} (r_{ik} \wedge s_{kj})$$

Die Nachfolgermenge $T[x]$ von x bzgl. der Relation $T = R \circ S$ berechnet sich zu

$$T[x] = \bigcup \{S[y] \mid y \in R[x]\} = \bigcup_{y \in R[x]} S[y].$$

Beispiel 31. *Betrachte die Relationen* $R = \{(a,a),(a,c),(c,b),(c,d)\}$ *und* $S = \{(a,b),(d,a),(d,c)\}$ *auf der Menge* $A = \{a,b,c,d\}$.

Relation	R	S	$R \circ S$	$S \circ R$
Digraph				
Adjazenz-matrix	1 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0	0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0	0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1
Adjazenz-liste	a: a, c b: - c: b, d d: -	a: b b: - c: - d: a, c	a: b b: - c: a, c d: -	a: - b: - c: - d: a, b, c, d

◁

Beobachtung: Das Beispiel zeigt, dass das Relationenprodukt nicht kommutativ ist, d.h. i.a. gilt nicht $R \circ S = S \circ R$.

Manchmal steht man vor der Aufgabe, eine gegebene Relation R durch eine möglichst kleine Modifikation in eine Relation R' mit vorgegebenen Eigenschaften zu überführen. Will man dabei alle in R enthaltenen Paare beibehalten, dann sollte R' aus R durch Hinzufügen möglichst weniger Paare hervorgehen.

Es lässt sich leicht nachprüfen, dass der Schnitt über eine Menge reflexiver (bzw. transitiver oder symmetrischer) Relationen wieder reflexiv (bzw. transitiv oder symmetrisch) ist. Folglich existiert zu jeder Relation R auf einer Menge A eine kleinste reflexive (bzw. transitive oder symmetrische) Relation R', die R enthält.

Definition 32. *Sei R eine Relation auf A.*

- *Die **reflexive Hülle** von R ist*

$$h_{refl}(R) = \bigcap\{S \subseteq A \times A \mid S \text{ ist reflexiv und } R \subseteq S\}.$$

- *Die **symmetrische Hülle** von R ist*

$$h_{sym}(R) = \bigcap\{S \subseteq A \times A \mid S \text{ ist symmetrisch und } R \subseteq S\}.$$

- *Die **transitive Hülle** von R ist*

$$R^+ = \bigcap\{S \subseteq A \times A \mid S \text{ ist transitiv und } R \subseteq S\}.$$

- *Die **reflexiv-transitive Hülle** von R ist*

$$R^* = \bigcap\{S \subseteq A \times A \mid S \text{ ist reflexiv, transitiv und } R \subseteq S\}.$$

- *Die **Äquivalenzhülle** von R ist*

$$h_{äq}(R) = \bigcap\{S \mid S \text{ ist eine Äquivalenzrelation auf } A \text{ und } R \subseteq S\}.$$

Satz 33. *Sei R eine Relation auf A.*

(i) $h_{refl}(R) = R \cup Id_A$,
(ii) $h_{sym}(R) = R \cup R^T$,
(iii) $R^+ = \bigcup_{n\geq 1} R^n$,
(iv) $R^* = \bigcup_{n\geq 0} R^n$,
(v) $h_{äq}(R) = (R \cup R^T)^*$.

Beweis. Siehe Übungen. ∎

Anschaulich besagt der vorhergehende Satz, dass ein Paar (a, b) genau dann in der reflexiv-transitiven Hülle R^* von R ist, wenn es ein $n \geq 0$ gibt mit aR^nb, d.h. es gibt Elemente $x_0, \ldots, x_n \in A$ mit $x_0 = a$, $x_n = b$ und

$$x_0 R x_1 R x_2 \ldots x_{n-1} R x_n.$$

In der Graphentheorie nennt man $x_0, \ldots, x_n$ einen ***Weg*** der Länge n von a nach b. Ein Digraph G heißt ***zusammenhängend***, wenn es für je zwei Knoten a und b einen Weg von a nach b oder einen Weg von b nach a gibt. G heißt ***stark zusammenhängend***, wenn es von jedem Knoten a einen Weg zu jedem Knoten b in G gibt.

2.4.1 Ordnungs- und Äquivalenzrelationen

Wir betrachten zunächst Äquivalenzrelationen, die durch die drei Eigenschaften reflexiv, symmetrisch und transitiv definiert sind.

Ist E eine Äquivalenzrelation, so nennt man die Nachbarschaft $E[x]$ die ***von x repräsentierte Äquivalenzklasse*** und bezeichnet sie mit $[x]_E$ oder einfach mit $[x]$. Eine Menge $S \subseteq A$ heißt ***Repräsentantensystem***, falls sie genau ein Element aus jeder Äquivalenzklasse enthält.

Beispiel 34.

- *Auf der Menge aller Geraden im $\mathbb{R}^2$ die Parallelität. Offenbar bilden alle Geraden mit derselben Richtung (oder Steigung)*

jeweils eine Äquivalenzklasse. Daher wird ein Repräsentantensystem beispielsweise durch die Menge aller Ursprungsgeraden gebildet.

- *Auf der Menge aller Menschen "im gleichen Jahr geboren wie". Hier bildet jeder Jahrgang eine Äquivalenzklasse.*
- *Auf $\mathbb{Z}$ die Relation "gleicher Rest bei Division durch m". Die zugehörigen Äquivalenzklassen sind*

$$[r] = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \equiv_m r\},\ r = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Ein Repräsentantensystem wird beispielsweise durch die Reste $0, 1, \ldots, m-1$ gebildet. ◁

Die (bzgl. Inklusion) kleinste Äquivalenzrelation auf A ist die ***Identität*** Id_A, die größte die ***Allrelation*** $A \times A$. Die Äquivalenzklassen der Identität enthalten jeweils nur ein Element, d.h. $[x]_{Id_A} = \{x\}$ für alle $x \in A$, und die Allrelation erzeugt nur eine Äquivalenzklasse, nämlich $[x]_{A\times A} = A$ für jedes $x \in A$. Die Identität Id_A hat nur ein Repräsentantensystem, nämlich A. Dagegen kann jede Singletonmenge $\{x\}$ mit $x \in A$ als Repräsentantensystem für die Allrelation $A \times A$ fungieren.

Definition 35. *Eine Familie $\{B_i \mid i \in I\}$ von nichtleeren Teilmengen $B_i \subseteq A$ heißt* ***Partition*** *der Menge A, falls gilt:*

a) die Mengen B_i ***überdecken*** *A, d.h. $A = \bigcup_{i\in I} B_i$ und*

b) die Mengen B_i sind ***paarweise disjunkt****, d.h. für je zwei verschiedene Mengen $B_i \neq B_j$ gilt $B_i \cap B_j = \varnothing$.*

Wie der nächste Satz zeigt, bilden die Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation E eine Partition $\{[x] \mid x \in A\}$ von A. Diese Partition wird auch ***Quotienten-*** oder ***Faktormenge*** genannt und mit A/E bezeichnet. Die Anzahl der Äquivalenzklassen von E wird auch als der ***Index*** von E bezeichnet.

Für zwei Äquivalenzrelationen $E \subseteq E'$ sind auch die Äquivalenzklassen $[x]_E$ von E in den Klassen $[x]_{E'}$ von E' enthalten. Folglich ist jede Äquivalenzklasse von E' die Vereinigung von (evtl. mehreren) Äquivalenzklassen von E. E bewirkt also eine ***feinere*** Partitionierung als E'. Demnach ist die Identität die ***feinste*** und die Allrelation die ***gröbste*** Äquivalenzrelation.

Satz 36. *Sei E eine Relation auf A. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) E ist eine Äquivalenzrelation auf A.

(ii) Es gibt eine Partition $\{B_i \mid i \in I\}$ von A mit

$$xEy \Leftrightarrow \exists i \in I : x, y \in B_i.$$

Beweis.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Sei E eine Äquivalenzrelation auf A. Wir zeigen, dass dann $\{E[x] \mid x \in A\}$ eine Partition von A mit der gewünschten Zusatzeigenschaft bildet:

Da E reflexiv ist, gilt xEx und somit $x \in E[x]$, d.h. $A = \bigcup_{x\in A} E[x]$.

Ist $E[x] \cap E[y] \neq \varnothing$ und $u \in E[x] \cap E[y]$, so folgt $E[x] = E[y]$:

$$z \in E[x] \Leftrightarrow xEz \overset{xEu}{\Leftrightarrow} uEz \overset{yEu}{\Leftrightarrow} yEz \Leftrightarrow z \in E[y]$$

Zudem gilt

$$\exists z \in A : x, y \in E[z] \Leftrightarrow \exists z : z \in E[x] \cap E[y]$$
$$\Leftrightarrow E[x] = E[y] \overset{y\in E[y]}{\Leftrightarrow} xEy$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Existiert umgekehrt eine Partition $\{B_i \mid i \in I\}$ von A mit $xEy \Leftrightarrow \exists i \in I : x, y \in B_i$, so ist E

- reflexiv, da zu jedem $x \in A$ eine Menge B_i mit $x \in B_i$ existiert,
- symmetrisch, da aus $x, y \in B_i$ auch $y, x \in B_i$ folgt, und
- transitiv, da aus $x, y \in B_i$ und $y, z \in B_j$ wegen $y \in B_i \cap B_j$ die Gleichheit $B_i = B_j$ und somit $x, z \in B_i$ folgt. ■

Als nächstes betrachten wir Ordnungsrelationen, die durch die drei Eigenschaften reflexiv, antisymmetrisch und transitiv definiert sind.

Beispiel 37.

- $(\mathsf{P}(M), \subseteq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$ *und* $(\mathbb{N}, |)$ *sind Ordnungen.* $(\mathbb{Z}, |)$ *ist keine Ordnung, aber eine Quasiordnung.*
- *Für jede Menge* M *ist die relationale Struktur* $(\mathcal{P}(M); \subseteq)$ *eine Ordnung. Diese ist nur im Fall* $\|M\| \leq 1$ *linear.*
- *Ist* R *eine Relation auf* A *und* $B \subseteq A$*, so ist* $R_B = R \cap (B \times B)$ *die* Einschränkung *von* R *auf* B*.*
- *Einschränkungen von (linearen) Ordnungen sind ebenfalls (lineare) Ordnungen.*
- *Beispielsweise ist* $(\mathbb{Q}, \leq)$ *die Einschränkung von* $(\mathbb{R}, \leq)$ *auf* $\mathbb{Q}$ *und* $(\mathbb{N}, |)$ *die Einschränkung von* $(\mathbb{Z}, |)$ *auf* $\mathbb{N}$*.* ◁

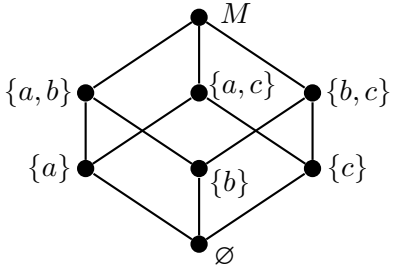
Ordnungen lassen sich sehr anschaulich durch Hasse-Diagramme darstellen. Sei $\leq$ eine Ordnung auf A und sei $<$ die Relation $\leq \cap \overline{Id}_A$. Um die Ordnung $\leq$ in einem ***Hasse-Diagramm*** darzustellen, wird nur der Graph der Relation

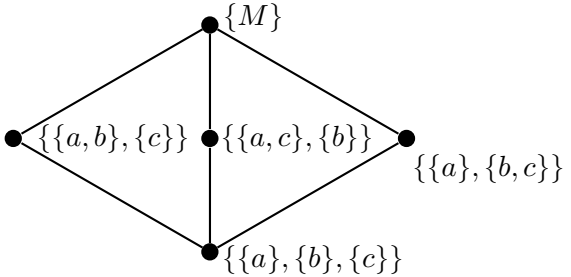
$$\lessdot = < \setminus <^2, \text{ d.h. } x \lessdot y \Leftrightarrow x < y \wedge \neg \exists z : x < z < y$$

gezeichnet. Für $x \lessdot y$ sagt man auch, y ist ***oberer Nachbar*** von x. Weiterhin wird im Fall $x \lessdot y$ der Knoten y oberhalb vom Knoten x gezeichnet, so dass auf Pfeilspitzen verzichtet werden kann.

Beispiel 38.

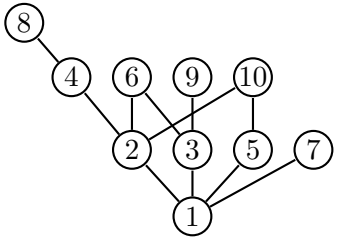
Das Hasse-Diagramm rechts zeigt die Inklusionsrelation auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ *von* $M = \{a, b, c\}$*.*





Das Hasse-Diagramm links zeigt die feiner-Relation auf der Menge aller Partitionen von $M = \{a, b, c\}$*.*

Schränken wir die "teilt"-Relation auf die Menge $\{1, 2, \ldots, 10\}$ *ein, so erhalten wir nebenstehendes Hasse-Diagramm.*



◁

Definition 39. *Sei* $\leq$ *eine Ordnung auf* A *und sei* b *ein Element in einer Teilmenge* $B \subseteq A$*.*

- b *heißt* ***kleinstes Element*** *oder* ***Minimum*** *von* B *(kurz* $b = \min B$*), falls gilt:*

$$\forall b' \in B : b \leq b'.$$

- b *heißt* ***größtes Element*** *oder* ***Maximum*** *von* B *(kurz* $b = \max B$*), falls gilt:*

$$\forall b' \in B : b' \leq b.$$

- b *heißt* ***minimal*** *in* B*, falls es in* B *kein kleineres Element gibt:*

$$\forall b' \in B : b' \leq b \Rightarrow b' = b.$$

- b *heißt* ***maximal*** *in* B*, falls es in* B *kein größeres Element gibt:*

$$\forall b' \in B : b \leq b' \Rightarrow b = b'.$$

Bemerkung 40. *Da Ordnungen antisymmetrisch sind, kann es in jeder Teilmenge B höchstens ein kleinstes und höchstens ein größtes Element geben. Die Anzahl der minimalen und maximalen Elemente in B kann dagegen beliebig groß sein.*

Definition 41. *Sei $\leq$ eine Ordnung auf A und sei $B \subseteq A$.*

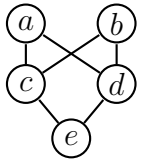
- *Jedes Element $u \in A$ mit $u \leq b$ für alle $b \in B$ heißt* **untere** *und jedes $o \in A$ mit $b \leq o$ für alle $b \in B$ heißt* **obere Schranke** *von B.*
- *B heißt* **nach oben beschränkt**, *wenn B eine obere Schranke hat, und* **nach unten beschränkt**, *wenn B eine untere Schranke hat.*
- *B heißt* **beschränkt**, *wenn B nach oben und nach unten beschränkt ist.*
- *Besitzt B eine größte untere Schranke i, d.h. besitzt die Menge U aller unteren Schranken von B ein größtes Element i, so heißt i das* **Infimum** *von B (kurz $i = \inf B$):*

$$(\forall b \in B : b \geq i) \wedge [\forall u \in A : (\forall b \in B : b \geq u) \Rightarrow u \leq i].$$

- *Besitzt B eine kleinste obere Schranke s, d.h. besitzt die Menge O aller oberen Schranken von B ein kleinstes Element s, so heißt s das* **Supremum** *von B ($s = \sup B$):*

$$(\forall b \in B : b \leq s) \wedge [\forall o \in A : (\forall b \in B : b \leq o) \Rightarrow s \leq o]$$

Beispiel 42. *Betrachte nebenstehende Ordnung. Die folgende Tabelle zeigt für verschiedene Teilmengen $B \subseteq \{a, b, c, d, e\}$ alle minimalen und maximalen Elemente, alle unteren und oberen Schranken sowie Minimum, Maximum, Infimum und Supremum von B (falls existent).*



B	minimal	maximal	min	max	untere Schranken	obere Schranken	inf	sup
$\{a, b\}$	a, b	a, b	-	-	c, d, e	-	-	-
$\{c, d\}$	c, d	c, d	-	-	e	a, b	e	-
$\{a, b, c\}$	c	a, b	c	-	c, e	-	c	-
$\{a, b, c, e\}$	e	a, b	e	-	e	-	e	-
$\{a, c, d, e\}$	e	a	e	a	e	a	e	a

◁

Bemerkung 43.

- *Es kann nicht mehr als ein Supremum und ein Infimum geben.*
- *Auch in linearen Ordnungen muss nicht jede beschränkte Teilmenge ein Supremum oder Infimum besitzen. So hat in der linear geordneten Menge $(\mathbb{Q}, \leq)$ die Teilmenge*

$$\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\} \;=\; \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$$

  weder ein Supremum noch ein Infimum.
- *Dagegen hat in $(\mathbb{R}, \leq)$ jede beschränkte Teilmenge ein Supremum und ein Infimum (aber eventuell kein Maximum oder Minimum).*

2.4.2 Abbildungen

Definition 44. *Sei R eine binäre Relation auf einer Menge M.*

- *R heißt* **rechtseindeutig**, *falls für alle $x, y, z \in M$ gilt:*

$$xRy \wedge xRz \Rightarrow y = z.$$

- *R heißt* **linkseindeutig**, *falls für alle $x, y, z \in M$ gilt:*

$$xRz \wedge yRz \Rightarrow x = y.$$

- *Der* **Nachbereich** $N(R)$ *und der* **Vorbereich** $V(R)$ *von* R *sind*
$$N(R) = \bigcup_{x \in M} R[x] \quad \text{und} \quad V(R) = \bigcup_{x \in M} R^T[x].$$
- *Eine rechtseindeutige Relation* R *mit* $V(R) = A$ *und* $N(R) \subseteq B$ *heißt* **Abbildung** *oder* **Funktion von A nach B** *(kurz* $R : A \to B$*).*

Bemerkung 45.

- R *ist also genau dann rechts- bzw. linkseindeutig, wenn jedes Element* $x \in M$ *höchstens einen Nachfolger bzw. Vorgänger hat.*
- *Wie üblich werden wir Abbildungen meist mit kleinen Buchstaben* $f, g, h, \ldots$ *bezeichnen und für* $(x, y) \in f$ *nicht* xfy *sondern* $f(x) = y$ *oder* $f : x \mapsto y$ *schreiben.*
- *Ist* $f : A \to B$ *eine Abbildung, so wird der Vorbereich* $V(f) = A$ *der* **Definitionsbereich** *und die Menge* B *der* **Wertebereich** *oder* **Wertevorrat** *von* f *genannt.*
- *Der Nachbereich* $N(f)$ *wird als* **Bild** *von* f *bezeichnet.*

Definition 46.

- *Im Fall* $N(f) = B$ *heißt* f ***surjektiv***.
- *Ist* f *linkseindeutig, so heißt* f ***injektiv***. *In diesem Fall impliziert* $f(x) = f(y)$ *die Gleichheit* $x = y$.
- *Eine injektive und surjektive Abbildung heißt* ***bijektiv***.
- *Ist* f *injektiv, so ist auch* $f^{-1} : N(f) \to A$ *eine Abbildung, die als die zu* f inverse Abbildung *bezeichnet wird.*

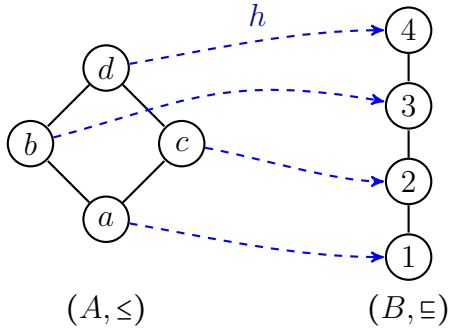
Man beachte, dass der Definitionsbereich $V(f^{-1}) = N(f)$ von f^{-1} nur dann gleich B ist, wenn f auch surjektiv, also eine Bijektion ist.

2.4.3 Homo- und Isomorphismen

Definition 47. *Seien* (A_1, R_1) *und* (A_2, R_2) *Relationalstrukturen.*

- *Eine Abbildung* $h : A_1 \to A_2$ *heißt* **Homomorphismus**, *falls für alle* $a, b \in A_1$ *gilt:*
$$aR_1b \Rightarrow h(a)R_2h(b).$$
- *Sind* (A_1, R_1) *und* (A_2, R_2) *Ordnungen, so spricht man von* **Ordnungshomomorphismen** *oder einfach von* **monotonen** *Abbildungen.*
- *Injektive Ordnungshomomorphismen werden auch* **streng monotone** *Abbildungen genannt.*

Beispiel 48. *Folgende Abbildung* $h : A_1 \to A_2$ *ist ein bijektiver Ordnungshomomorphismus.*



Obwohl h *ein bijektiver Homomorphismus ist, ist die Umkehrung* h^{-1} *kein Homomorphismus, da* h^{-1} *nicht monoton ist. Es gilt nämlich*
$$2 \sqsubseteq 3, \text{ aber } h^{-1}(2) = b \not\leq c = h^{-1}(3).$$
Dagegen ist für jede monotone Bijektion f *zwischen linearen Ordnungen auch ihre Umkehrabbildung* f^{-1} *monoton.* ◁

Definition 49. *Ein bijektiver Homomorphismus* $h : A_1 \to A_2$, *bei dem auch* h^{-1} *ein Homomorphismus ist, d.h. es gilt*
$$\forall a, b \in A_1 : aR_1b \Leftrightarrow h(a)R_2h(b).$$
heißt ***Isomorphismus***. *In diesem Fall heißen die Strukturen* (A_1, R_1) *und* (A_2, R_2) ***isomorph*** *(kurz:* $(A_1, R_1) \cong (A_2, R_2)$*).*

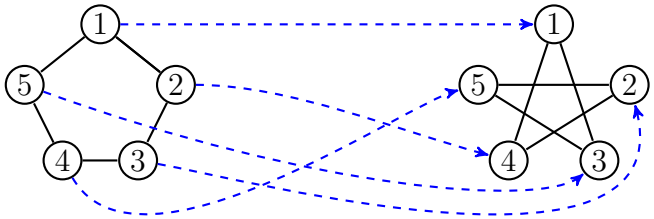
Beispiel 50.

- *Für $n \in \mathbb{N}$ sei $T_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ teilt } n\}$ die Menge aller Teiler von n und $P_n = \{p \in T_n \mid p \text{ ist prim}\}$ die Menge aller Primteiler von n. Dann ist die Abbildung*

$$h : k \mapsto P_k$$

ein (surjektiver) Ordnungshomomorphismus von $(T_n, |)$ auf $(\mathcal{P}(P_n), \subseteq)$. h ist sogar ein Isomorphismus, falls n quadratfrei *ist (d.h. es gibt kein $k \geq 2$, so dass k^2 die Zahl n teilt).*

- *Die beiden folgenden Graphen G und G' sind isomorph. Zwei Isomorphismen sind beispielsweise h_1 und h_2.*



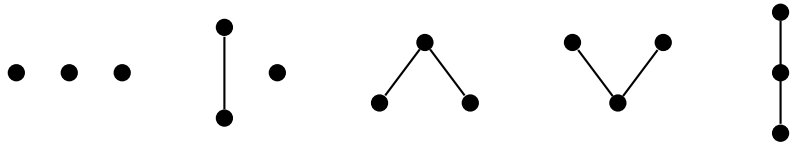
$G = (V, E)$ $\qquad$ $G' = (V, E')$

v	1	2	3	4	5
$h_1(v)$	1	3	5	2	4
$h_2(v)$	1	4	2	5	3

- *Während auf der Knotenmenge $V = [3]$ insgesamt $2^3 = 8$ verschiedene Graphen existieren, gibt es auf dieser Menge nur 4 verschiedene nichtisomorphe Graphen:*

- *Die Abbildung $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ mit $h(x) = e^x$ ist ein Ordnungsisomorphismus zwischen $(\mathbb{R}, \leq)$ und $(\mathbb{R}^+, \leq)$.*

- *Es existieren genau 5 nichtisomorphe Ordnungen mit 3 Elementen:*



Anders ausgedrückt: Die Klasse aller dreielementigen Ordnungen zerfällt unter der Äquivalenzrelation $\cong$ in fünf Äquivalenzklassen, die durch obige fünf Hasse-Diagramme repräsentiert werden.

◁

2.5 Minimierung von DFAs

Wie können wir feststellen, ob ein DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ unnötige Zustände enthält? Zunächst einmal können alle Zustände entfernt werden, die nicht vom Startzustand aus erreichbar sind. Im folgenden gehen wir daher davon aus, dass M keine unerreichbaren Zustände enthält.

Offensichtlich können zwei Zustände q und p zu einem Zustand verschmolzen werden (kurz: $q \sim_M p$), wenn M von q und von p ausgehend jeweils dieselben Wörter akzeptiert. Bezeichnen wir den DFA $(Z, \Sigma, \delta, q, E)$ mit M_q, so sind q und p genau dann verschmelzbar, wenn $L(M_q) = L(M_p)$ ist. Offensichtlich ist $\sim_M$ eine Äquivalenzrelation.

Fassen wir alle mit einem Zustand z verschmelzbaren Zustände in dem neuen Zustand

$$[z]_{\sim_M} = \{z' \in Z \mid L(M_{z'}) = L(M_z)\}$$

zusammen (wofür wir auch kurz $[z]$ oder $\tilde{z}$ schreiben) und ersetzen wir Z und E durch $\tilde{Z} = \{\tilde{z} \mid z \in Z\}$ und $\tilde{E} = \{\tilde{z} \mid z \in E\}$, so erhalten wir den DFA $M' = (\tilde{Z}, \Sigma, \delta', \tilde{q}_0, \tilde{E})$ mit

$$\delta'(\tilde{q}, a) = \widetilde{\delta(q, a)}.$$

Hierbei bezeichnet $\tilde{Q}$ für eine Teilmenge $Q \subseteq Z$ die Menge $\{\tilde{q} \mid q \in Q\}$ aller Äquivalenzklassen $\tilde{q}$, die mindestens ein Element $q \in Q$ enthalten. Der nächste Satz zeigt, dass M' tatsächlich der gesuchte Minimalautomat ist.

Satz 51. *Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ ein DFA, der nur Zustände enthält, die vom Startzustand q_0 aus erreichbar sind. Dann ist $M' = (\tilde{Z}, \Sigma, \delta', \tilde{q}_0, \tilde{E})$ mit*

$$\delta'(\tilde{q}, a) = \widetilde{\delta(q, a)}$$

ein DFA für $L(M)$ mit einer minimalen Anzahl von Zuständen.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass δ' wohldefiniert ist, also der Wert von $\delta'(\tilde{q}, a)$ nicht von der Wahl des Repräsentanten q abhängt. Hierzu zeigen wir, dass im Fall $p \sim_M q$ auch $\delta(q, a)$ und $\delta(p, a)$ äquivalent sind:

$$\begin{aligned} L(M_q) = L(M_p) &\Rightarrow \forall x \in \Sigma^* : x \in L(M_q) \leftrightarrow x \in L(M_p) \\ &\Rightarrow \forall x \in \Sigma^* : ax \in L(M_q) \leftrightarrow ax \in L(M_p) \\ &\Rightarrow \forall x \in \Sigma^* : x \in L(M_{\delta(q,a)}) \leftrightarrow x \in L(M_{\delta(p,a)}) \\ &\Rightarrow L(M_{\delta(q,a)}) = L(M_{\delta(p,a)}). \end{aligned}$$

Als nächstes zeigen wir, dass $L(M') = L(M)$ ist. Sei $x = x_1 \dots x_n$ eine Eingabe und seien

$$q_i = \hat{\delta}(q_0, x_1 \dots x_i),\ i = 0, \dots, n$$

die von M bei Eingabe x durchlaufenen Zustände. Wegen

$$\delta'(\tilde{q}_{i-1}, x_i) = \widetilde{\delta(q_{i-1}, x_i)} = \tilde{q}_i$$

durchläuft M' dann die Zustände

$$\tilde{q}_0, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n.$$

Da aber q_n genau dann zu E gehört, wenn $\tilde{q}_n \in \tilde{E}$ ist, folgt $L(M') = L(M)$ (man beachte, dass $\tilde{q}_n$ entweder nur Endzustände oder nur Nicht-Endzustände enthält, vgl. Beobachtung 53).

Es bleibt zu zeigen, dass M' eine minimale Anzahl $\|\tilde{Z}\|$ von Zuständen hat. Dies ist sicher dann der Fall, wenn bereits M minimal ist. Es reicht also zu zeigen, dass die Anzahl $k = \|\tilde{Z}\| = \|\{L(M_z) \mid z \in Z\}\|$ der Zustände von M' nicht von der Anzahl der Zustände von M, sondern nur von der erkannten Sprache $L = L(M)$ abhängt. Für $x \in \Sigma^*$ sei

$$L_x = \{y \in \Sigma^* \mid xy \in L\}$$

die ***Restsprache*** von L für das Wort x. Dann gilt $\{L_x \mid x \in \Sigma^*\} \subseteq \{L(M_z) \mid z \in Z\}$, da $L_x = L(M_{\hat{\delta}(q_0,x)})$ ist. Die umgekehrte Inklusion gilt ebenfalls, da nach Voraussetzung jeder Zustand $q \in Z$ über ein $x \in \Sigma^*$ erreichbar ist. Also hängt $k = \|\{L(M_z) \mid z \in Z\}\| = \|\{L_x \mid x \in \Sigma^*\}\|$ nur von L ab. ∎

Beispiel 52. *Die Sprache $L = \{x_1 \dots x_n \in \{0,1\}^* \mid n \geq 2$ und $x_{n-1} = 0\}$ hat die vier Restsprachen*

$$L_x = \begin{cases} L, & x \in \{\varepsilon, 1\} \text{ oder } x \text{ endet mit } 11, \\ L \cup \{0,1\}, & x = 0 \text{ oder } x \text{ endet mit } 10, \\ L \cup \{\varepsilon, 0, 1\}, & x \text{ endet mit } 00, \\ L \cup \{\varepsilon\}, & x \text{ endet mit } 01. \end{cases}$$

Entsprechend gibt es für L einen DFA mit 4 Zuständen, aber keinen mit 3 Zuständen.

Eine interessante Folgerung aus obigem Beweis ist, dass eine reguläre Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ nur endlich viele verschiedene Restsprachen L_x, $x \in \Sigma^*$, hat. Daraus folgt, dass die durch

$$x \sim_L y \Leftrightarrow L_x = L_y$$

auf Σ^* definierte Äquivalenzrelation $\sim_L$ für jede reguläre Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ einen endlichen Index hat. Die Relation $\sim_L$ wird als *Nerode-Relation* von L bezeichnet.

Für die algorithmische Konstruktion von M' aus M ist es notwendig herauszufinden, ob zwei Zustände p und q von M äquivalent sind oder nicht. Hierzu genügt es, die Menge $D = \left\{\{p,q\} \subseteq Z \,\middle|\, p \not\sim_M q\right\}$ zu berechnen.

Bezeichne $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ die *symmetrische Differenz* von zwei Mengen A und B. Dann ist die Inäquivalenz $p \not\sim_M q$ zweier Zustände p und q gleichbedeutend mit $L(M_p) \triangle L(M_q) \neq \varnothing$. Wir nennen ein Wort $x \in L(M_p) \triangle L(M_q)$ einen *Unterscheider* zwischen p und q. Für $i \geq 0$ sei $D^{=i}$ die Menge aller Paare $\{p,q\}$, die einen Unterscheider x der Länge $|x| = i$ haben und D_i sei die Menge aller Paare $\{p,q\} \in D$, die einen Unterscheider x der Länge $|x| \leq i$ haben. Dann gilt $D_i = D^{=0} \cup D^{=1} \cup \cdots \cup D^{=i}$ und $D = \bigcup_{j\geq 0} D^{=j} = \bigcup_{i\geq 0} D_i$.

Beobachtung 53.

- *Das leere Wort ε unterscheidet Endzustände und Nichtendzustände, d.h.*

$$D_0 = D^{=0} = \left\{\{p,q\} \subseteq Z \,\middle|\, p \in E, q \notin E\right\}.$$

- *Zudem haben zwei Zustände p und q genau dann einen Unterscheider $x = x_1 \dots x_{i+1}$ der Länge $i+1$, wenn die beiden Zustände $\delta(p,x_1)$ und $\delta(q,x_1)$ einen Unterscheider $x = x_2 \dots x_{i+1}$ der Länge i haben. Daher gilt*

$$\{p,q\} \in D^{=i+1} \Leftrightarrow \exists a \in \Sigma : \{\delta(p,a), \delta(q,a)\} \in D^{=i},$$

was wiederum

$$D_{i+1} = \underbrace{D_i}_{D^{=0}\cup\cdots\cup D^{=i}} \cup \underbrace{\left\{\{p,q\} \subseteq Z \,\middle|\, \exists a \in \Sigma : \{\delta(p,a), \delta(q,a)\} \in D_i\right\}}_{D^{=1}\cup\cdots\cup D^{=i+1}}$$

impliziert.

Da es nur endlich viele Zustandspaare gibt, gibt es ein $i \geq 0$ mit $D = D_i$. Offensichtlich gilt

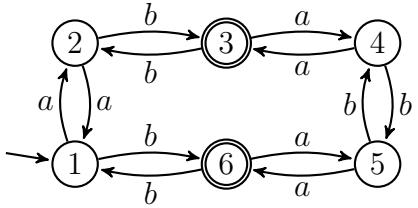
$$D = D_i \Leftrightarrow D_{i+1} = D_i.$$

Der folgende Algorithmus berechnet für einen beliebigen DFA M den zugehörigen Minimal-DFA M'.

Algorithmus `min-DFA`(M)

```
1 Input: DFA M = (Z, Σ, δ, q_0, E)
2   entferne alle unerreichbaren Zustände aus Z
3   D' := D_0 := {{p,q} ⊆ Z | p ∈ E, q ∉ E}
4   repeat
5     D := D'
6     D' := D_0 ∪ {{p,q} | ∃a ∈ Σ : {δ(p,a), δ(q,a)} ∈ D}
7   until D' = D
8 Output: M' = (Z̃, Σ, δ', q̃_0, Ẽ), wobei δ'(q̃, a) = δ̃(q,a) ist
9  und für jeden Zustand q ∈ Z gilt: q̃ = {p ∈ Z | {p,q} ∉ D}
```

Beispiel 54. *Betrachte den DFA M:*



Dann enthält D_0 die Paare

$$\{1,3\},\{1,6\},\{2,3\},\{2,6\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,6\},\{5,6\}.$$

Die Paare in D_0 sind in der folgenden Matrix durch den Unterscheider ε markiert.

2					
3	ε	ε			
4	a	a	ε		
5	a	a	ε		
6	ε	ε		ε	ε
	1	2	3	4	5

Wegen

$\{p,q\}$	$\{1,4\}$	$\{1,5\}$	$\{2,4\}$	$\{2,5\}$
$\{\delta(q,a),\delta(p,a)\}$	$\{2,3\}$	$\{2,6\}$	$\{1,3\}$	$\{1,6\}$

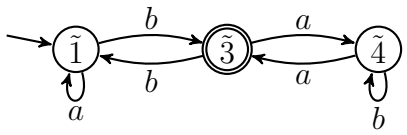
enthält D_1 zusätzlich die Paare $\{1,4\}$, $\{1,5\}$, $\{2,4\}$, $\{2,5\}$ (in obiger Matrix durch den Unterscheider a markiert). Da nun jedoch keines der verbliebenen Paare $\{1,2\}$, $\{3,6\}$, $\{4,5\}$ wegen

$\{p,q\}$	$\{1,2\}$	$\{3,6\}$	$\{4,5\}$
$\{\delta(p,a),\delta(q,a)\}$	$\{1,2\}$	$\{4,5\}$	$\{3,6\}$
$\{\delta(p,b),\delta(q,b)\}$	$\{3,6\}$	$\{1,2\}$	$\{4,5\}$

zu D_2 hinzugefügt werden kann, gilt $D_2 = D_1$ und somit $D = D_1$.
Aus den unmarkierten Paaren $\{1,2\}$, $\{3,6\}$ und $\{4,5\}$ erhalten wir die Äquivalenzklassen

$$\tilde{1} = \{1,2\},\ \ \tilde{3} = \{3,6\}\ \ \textit{und}\ \ \tilde{4} = \{4,5\},$$

die auf folgenden Minimal-DFA M' führen:



◁

Es ist auch möglich, einen Minimalautomaten M_L direkt aus einer regulären Sprache L zu gewinnen (also ohne einen DFA M für L zu kennen). Da wegen

$$\widetilde{\hat\delta(q_0,x)} = \widetilde{\hat\delta(q_0,y)} \Leftrightarrow \hat\delta(q_0,x) \sim_M \hat\delta(q_0,y) \Leftrightarrow L(M_{\hat\delta(q_0,x)}) = L(M_{\hat\delta(q_0,y)}) \Leftrightarrow L_x = L_y$$

zwei Eingaben x und y den DFA M' genau dann in denselben Zustand überführen, wenn $L_x = L_y$ ist, können wir den von M' bei Eingabe x erreichten Zustand auch mit der Sprache L_x bezeichnen. Dies führt auf den zu M' isomorphen (also bis auf die Benennung der Zustände mit M' identischen) DFA $M_L = (Z_L, \Sigma, \delta_L, L_\varepsilon, E_L)$ mit

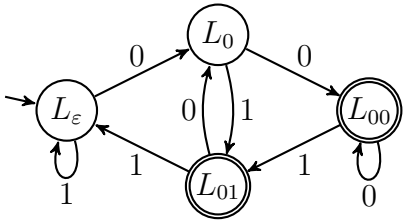
$$\begin{aligned} Z_L &= \{L_x \mid x \in \Sigma^*\}, \\ E_L &= \{L_x \mid x \in L\} \text{ und} \\ \delta_L(L_x,a) &= L_{xa}. \end{aligned}$$

M_L wird auch als ***Restsprachen-DFA*** für L bezeichnet.

Beispiel 55. *Für die Sprache $L = \{x_1 \dots x_n \in \{0,1\}^* \mid n \geq 2$ und $x_{n-1} = 0\}$ mit den vier Restsprachen*

$$L_x = \begin{cases} L, & x \in \{\varepsilon, 1\} \textit{ oder } x \textit{ endet mit } 11, \\ L \cup \{0,1\}, & x = 0 \textit{ oder } x \textit{ endet mit } 10, \\ L \cup \{\varepsilon,0,1\}, & x \textit{ endet mit } 00, \\ L \cup \{\varepsilon\}, & x \textit{ endet mit } 01. \end{cases}$$

erhalten wir den folgenden Minimalautomaten M_L für L:



Man beachte, dass es für die Konstruktion von M_L keine Rolle spielt, wie die Restsprachen L_x konkret aussehen, d.h. ihre Angabe ist nicht erforderlich. ◁

Notwendig und hinreichend für die Existenz von M_L ist, dass die Nerode-Relation $\sim_L$ von L endlichen Index hat bzw. L nur endlich

viele verschiedene Restsprachen hat. Im Fall, dass M bereits ein Minimalautomat ist, sind alle Zustände von M' von der Form $\tilde{q} = \{q\}$, so dass M isomorph zu M' und damit auch isomorph zu M_L ist. Dies zeigt, dass alle Minimalautomaten für eine Sprache L isomorph sind.

Satz 56 (Myhill und Nerode)**.**

1. *Sei L regulär und sei $index(\sim_L)$ der Index von $\sim_L$. Dann gibt es für L bis auf Isomorphie genau einen Minimal-DFA. Dieser hat $index(\sim_L)$ Zustände.*
2. $\mathsf{REG} = \{L \mid$ *die Nerode-Relation $\sim_L$ hat endlichen Index*$\}$.

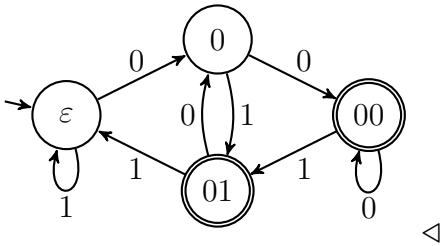
Sei R ein Repräsentantensystem für die Nerode-Relation $\sim_L$ von L, d.h. $\{L_x \mid x \in \Sigma^*\} = \{L_r \mid r \in R\}$ und $L_r \neq L_{r'}$ für alle $r, r' \in R$ mit $r \neq r'$. Dann können wir die Zustände des Minimal-DFA anstelle von L_x auch mit den Repräsentanten $r \in R$ bezeichnen. Dies führt auf den Minimal-DFA $M_R = (R, \Sigma, \delta, \varepsilon, E)$, wobei wir $\varepsilon \in R$ annehmen und $\delta(r, a) \in R$ der Repräsentant der Äquivalenzklasse $\widetilde{ra}$ und $E = R \cap L$ ist. Wir bezeichnen M_R als den zu R gehörigen ***Repräsentanten-DFA*** für L.

Beispiel 57. *Für die Sprache $L = \{x_1 \dots x_n \in \{0,1\}^* \mid x_{n-1} = 0\}$ lässt sich ein Repräsentanten-DFA M_R wie folgt konstruieren:*

1. *Wir beginnen mit $r_1 = \varepsilon$.*
2. *Da $r_1 0 = 0 \not\sim_L \varepsilon$ ist, erhalten wir $r_2 = 0$ und setzen $\delta(\varepsilon, 0) = 0$.*
3. *Da $r_1 1 = 1 \sim_L \varepsilon$ ist, setzen wir $\delta(\varepsilon, 1) = \varepsilon$.*
4. *Da $r_2 0 = 00 \not\sim_L r_i$ für $i = 1, 2$ ist, erhalten wir $r_3 = 00$ und setzen $\delta(0, 0) = 00$.*
5. *Da $r_2 1 = 01 \not\sim_L r_i$ für $i = 1, 2, 3$ ist, erhalten wir $r_4 = 01$ und setzen $\delta(0, 1) = 01$.*
6. *Da zudem $r_3 0 = 000 \sim_L 00$, $r_3 1 = 001 \sim_L 01$, $r_4 0 = 010 \sim_L 0$ und $r_4 1 = 011 \sim_L \varepsilon$ gilt, setzen wir $\delta(00, 0) = 00$, $\delta(00, 1) = 01$, $\delta(01, 0) = 0$ und $\delta(01, 1) = \varepsilon$.*

Wir erhalten also das Repräsentantensystem $R = \{\varepsilon, 0, 00, 01\}$ für $\sim_L$ und folgenden Minimal-DFA M_R für L:

r	ε	0	00	01
$\delta(r, 0)$	0	00	00	0
$\delta(r, 1)$	ε	01	01	ε



◁

Wir fassen nochmals die wichtigsten Ergebnisse zusammen.

Korollar 58. *Für jede Sprache L sind folgende Aussagen äquivalent:*

- *L ist regulär (d.h. es gibt einen DFA M mit $L = L(M)$),*
- *es gibt einen NFA N mit $L = L(N)$,*
- *es gibt einen regulären Ausdruck γ mit $L = L(\gamma)$,*
- *L hat endlich viele Restsprachen $L_x = \{z \in \Sigma^* \mid xz \in L\}$, $x \in \Sigma^*$,*
- *die Nerode-Relation $\sim_L$ von L hat endlichen Index.*

Wir können also beweisen, dass eine Sprache L **nicht** regulär ist, indem wir unendlich viele verschiedene Restsprachen (bzw. unendlich viele paarweise bzgl. $\sim_L$ inäquivalente Wörter) finden.

Satz 59. *Die Sprache $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ ist nicht regulär.*

Beweis. Wegen

$$b^i \in L_{a^i} \triangle L_{a^j} \quad (\text{für } 0 \leq i < j)$$

sind die Restsprachen L_{a^i}, $i \geq 0$, paarweise verschieden und wegen

$$a^i \sim_L a^j \Leftrightarrow L_{a^i} = L_{a^j}$$

folgt auch, dass $a^i \not\sim_L a^j$ für $i < j$ gilt, weshalb $index(\sim_L) = \infty$ ist. ■

Wir werden im nächsten Abschnitt noch eine weitere Methode kennenlernen, mit der man beweisen kann, dass eine Sprache nicht regulär ist, nämlich das Pumping-Lemma.

2.6 Das Pumping-Lemma

Wie kann man von einer Sprache L noch nachweisen, dass sie nicht regulär ist? Eine weitere Möglichkeit besteht darin, die Kontraposition folgender Aussage anzuwenden.

Satz 60 (Pumping-Lemma für reguläre Sprachen)**.**
Zu jeder regulären Sprache L gibt es eine Zahl $l \geq 0$, so dass sich alle Wörter $x \in L$ mit $|x| \geq l$ in $x = uvw$ zerlegen lassen mit

1. $v \neq \varepsilon$,
2. $|uv| \leq l$ *und*
3. $uv^i w \in L$ *für alle* $i \geq 0$.

Falls eine Zahl $l \geq 0$ mit diesen Eigenschaften existiert, wird das kleinste solche l die ***Pumpingzahl*** *von L genannt.*

Beweis. Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ ein NFA für L und sei $l = \|Z\|$ die Anzahl der Zustände von M. Setzen wir M auf eine Eingabe $x = x_1 \dots x_n \in L$ der Länge $n \geq l$ an, so muss M nach spätestens l Schritten einen Zustand $q \in Z$ zum zweiten Mal besuchen:

$$\exists j, k : 0 \leq j < k \leq l \wedge \hat{\delta}(q_0, x_1 \dots x_j) = \hat{\delta}(q_0, x_1 \dots x_k) = q.$$

Wählen wir nun $u = x_1 \dots x_j$, $v = x_{j+1} \dots x_k$ und $w = x_{k+1} \dots x_n$, so ist $|v| = k - j \geq 1$ und $|uv| = k \leq l$. Ausserdem gilt $uv^i w \in L$ für alle $i \geq 0$, da M wegen $\hat{\delta}(q, v^i) = \hat{\delta}(q, v) = q$ nach Lesen von $uv^i w$ einen Endzustand erreicht:

$$\hat{\delta}(q_0, uv^i w) = \hat{\delta}(\underbrace{\hat{\delta}(\underbrace{\hat{\delta}(q_0, u)}_{q}, v^i)}_{q}, w) = \hat{\delta}(\underbrace{\hat{\delta}(\underbrace{\hat{\delta}(q_0, u)}_{q}, v)}_{q}, w) = \hat{\delta}(q_0, x) \in E$$

■

Beispiel 61. *Die Sprache*

$$L = \{x \in \{a, b\}^* \mid \#_a(x) - \#_b(x) \equiv_3 1\}$$

hat die Pumpingzahl $l = 3$. Sei nämlich $x \in L$ beliebig mit $|x| \geq 3$. Dann lässt sich innerhalb des Präfixes von x der Länge drei ein nichtleeres Teilwort v finden, das gepumpt werden kann:

1. Fall: *x hat das Präfix ab (oder ba).*
Zerlege $x = uvw$ mit $u = \varepsilon$ und $v = ab$ (bzw. $v = ba$).

2. Fall: *x hat das Präfix aab (oder bba).*
Zerlege $x = uvw$ mit $u = a$ (bzw. $u = b$) und $v = ab$ (bzw. $v = ba$).

3. Fall: *x hat das Präfix aaa (oder bbb).*
Zerlege $x = uvw$ mit $u = \varepsilon$ und $v = aaa$ (bzw. $v = bbb$). ◁

Beispiel 62. *Eine endliche Sprache L hat die Pumpingzahl $l = l_{max}+1$, wobei*

$$l_{max} = \begin{cases} -1, & L = \varnothing, \\ \max\{|x| \mid x \in L\}, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist. Tatsächlich lässt sich jedes Wort $x \in L$ der Länge $|x| > l_{max}$ „pumpen“ (da solche Wörter gar nicht existieren), weshalb die Pumpingzahl höchstens $l_{max} + 1$ ist. Zudem gibt es im Fall $l_{max} \geq 0$ ein Wort $x \in L$ der Länge $|x| = l_{max} = l - 1$, das sich nicht „pumpen“ lässt, weshalb die Pumpingzahl nicht kleiner als l sein kann. ◁

Sei $min_{DFA}(L)$ ($min_{NFA}(L)$) die minimale Anzahl von Zuständen eines DFA (bzw. NFA) einer regulären Sprache L und sei $l_{reg}(L)$ die Pumping-Zahl für L. Da wir im Beweis des Pumping-Lemmas einen NFA für L mit $l = min_{NFA}(L)$ Zuständen wählen können, folgt

$$l_{reg}(L) \leq min_{NFA}(L) \leq min_{DFA}(L) = index(\sim_L).$$

Tatsächlich gibt es für jedes $i \geq 1$ eine Sprache L mit

$$l_{reg}(L) = index(\sim_L) = i.$$

Andererseits gibt es für jedes $i \geq 1$ auch eine Sprache L mit

$$l_{reg}(L) = 1 \text{ und } index(\sim_L) = i.$$

Dagegen ist $L = \varnothing$ die einzige Sprache mit der Pumping-Zahl 0. Für diese gilt $index(\sim_\varnothing) = 1$.

Wollen wir mit Hilfe des Pumping-Lemmas von einer Sprache L zeigen, dass sie nicht regulär ist, so genügt es, für jede Zahl l ein Wort $x \in L$ der Länge $|x| \geq l$ anzugeben, so dass für jede Zerlegung von x in drei Teilwörter u, v, w mindestens eine der drei in Satz 60 aufgeführten Eigenschaften verletzt ist.

Beispiel 63. *Die Sprache*

$$L = \{a^j b^j \mid j \geq 0\}$$

ist nicht regulär, da sich für jede Zahl $l \geq 0$ das Wort $x = a^l b^l$ der Länge $|x| = 2l \geq l$ in der Sprache L befindet, welches offensichtlich nicht in Teilwörter u, v, w mit $v \neq \varepsilon$ und $uv^2w \in L$ zerlegbar ist. ◁

Beispiel 64. *Die Sprache*

$$L = \{a^{n^2} \mid n \geq 0\}$$

ist ebenfalls nicht regulär. Andernfalls müsste es nämlich eine Zahl $l \geq 0$ geben, so dass jede Quadratzahl $n^2 \geq l$ als Summe von natürlichen Zahlen $u + v + w$ darstellbar ist mit der Eigenschaft, dass $v \geq 1$ und $u + v \leq l$ ist, und für jedes $i \geq 0$ auch $u + iv + w$ eine Quadratzahl ist. Für $n = l$ müsste also insbesondere $u + 2v + w = n^2 + v$ eine Quadratzahl sein, was wegen

$$n^2 < n^2 + v \leq n^2 + l < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

ausgeschlossen ist. ◁

Beispiel 65. *Auch die Sprache*

$$L = \{a^p \mid p \text{ prim }\}$$

ist nicht regulär, da sich sonst jede Primzahl p einer bestimmten Mindestgröße l als Summe von natürlichen Zahlen $u + v + w$ darstellen ließe, so dass $v \geq 1$ und für alle $i \geq 0$ auch $u + iv + w = p + (i-1)v$ prim ist. Dies ist jedoch für $i = p + 1$ wegen

$$p + (p + 1 - 1)v = p(1 + v)$$

nicht der Fall. ◁

Bemerkung 66. *Mit Hilfe des Pumping-Lemmas kann nicht für jede Sprache $L \notin \mathsf{REG}$ gezeigt werden, dass L nicht regulär ist, da seine Umkehrung falsch ist. So hat beispielsweise die Sprache*

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i = 0 \text{ oder } j = k\}$$

die Pumpingzahl 1 (d.h. jedes Wort $x \in L$ mit Ausnahme von ε kann „gepumpt“ werden). Dennoch ist L nicht regulär (siehe Übungen).

2.7 Grammatiken

Eine beliebte Methode, Sprachen zu beschreiben, sind Grammatiken. Implizit haben wir diese Methode bei der Definition der regulären Ausdrücke bereits benutzt.

Beispiel 67. *Die Sprache RA aller regulären Ausdrücke über einem Alphabet $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_k\}$ lässt sich aus dem Symbol R durch wiederholte Anwendung folgender Ersetzungsregeln erzeugen:*

$$\begin{array}{ll} R \to \varnothing, & R \to RR, \\ R \to \epsilon, & R \to (R|R), \\ R \to a_i,\ i = 1, \ldots, k, & R \to (R)^*. \end{array}$$

◁

Definition 68. *Eine **Grammatik** ist ein 4-Tupel $G = (V, \Sigma, P, S)$, wobei*

- *V eine endliche Menge von **Variablen** (auch **Nichtterminalsymbole** genannt),*
- *Σ das **Terminalalphabet**,*

- $P \subseteq (V \cup \Sigma)^+ \times (V \cup \Sigma)^*$ *eine endliche Menge von* ***Regeln*** *(oder* ***Produktionen****) und*
- $S \in V$ *die* ***Startvariable*** *ist.*

Die Produktionenmenge P ist also eine binäre Relation auf $(V \cup \Sigma)^*$. Für $(u, v) \in P$ schreiben wir auch kurz $u \to_G v$ bzw. $u \to v$, wenn die benutzte Grammatik aus dem Kontext ersichtlich ist. Regeln der Form $\varepsilon \to v$ sind nicht erlaubt.

Definition 69. *Seien $\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$.*

a) Wir sagen, ***β ist aus α in einem Schritt ableitbar*** *(kurz: $\alpha \Rightarrow_G \beta$), falls eine Regel $u \to_G v$ und Wörter $l, r \in (V \cup \Sigma)^*$ existieren mit*

$$\alpha = lur \text{ und } \beta = lvr.$$

Hierfür schreiben wir auch $l\underline{u}r \Rightarrow_G lvr$ bzw. $l\underline{u}r \Rightarrow lvr$.[†]

b) Die durch G ***erzeugte Sprache*** *ist*

$$L(G) = \{x \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow^* x\}.$$

c) Ein Wort $\alpha \in (V \cup \Sigma)^*$ mit $S \Rightarrow^* \alpha$ heißt ***Satzform*** *von G.*

Beispiel 70. *Wir betrachten nochmals die Grammatik $G = (\{R\}, \Sigma \cup \{\varnothing, \epsilon, (,), ^*, |\}, P, R)$, die die Menge der regulären Ausdrücke über dem Alphabet Σ erzeugt, wobei P die oben angegebenen Regeln enthält. Ist $\Sigma = \{0, 1\}$, so lässt sich der reguläre Ausdruck $(01)^*(\epsilon|\varnothing)$ beispielsweise wie folgt in 8 Schritten ableiten:*

$$\begin{aligned} \underline{R} &\Rightarrow \underline{R}R \Rightarrow (\underline{R})^*R \Rightarrow (RR)^*R \Rightarrow (\underline{R}R)^*(R|R) \\ &\Rightarrow (0\underline{R})^*(R|R) \Rightarrow (01)^*(\underline{R}|R) \Rightarrow (01)^*(\epsilon|\underline{R}) \Rightarrow (01)^*(\epsilon|\varnothing) \end{aligned}$$

◁

Man unterscheidet vier verschiedene Typen von Grammatiken.

Definition 71. *Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik.*

1. *G heißt vom* ***Typ 3*** *oder* ***regulär****, falls für alle Regeln $u \to v$ gilt: $u \in V$ und $v \in \Sigma V \cup \Sigma \cup \{\epsilon\}$.*
2. *G heißt vom* ***Typ 2*** *oder* ***kontextfrei****, falls für alle Regeln $u \to v$ gilt: $u \in V$.*
3. *G heißt vom* ***Typ 1*** *oder* ***kontextsensitiv****, falls für alle Regeln $u \to v$ gilt: $|v| \geq |u|$ (mit Ausnahme der ε-Sonderregel, siehe unten).*
4. *Jede Grammatik ist automatisch vom* ***Typ 0****.*

ε-Sonderregel: In einer kontextsensitiven Grammatik (V, Σ, P, S) kann auch die verkürzende Regel $S \to \varepsilon$ vorkommen. Aber nur, wenn das Startsymbol S nicht auf der rechten Seite einer Regel steht.

Die Sprechweisen „vom Typ i“ bzw. „regulär“, „kontextfrei“ und „kontextsensitiv“ werden auch auf die durch solche Grammatiken erzeugte Sprachen angewandt. (Der folgende Satz rechtfertigt dies für die regulären Sprachen, die wir bereits mit Hilfe von DFAs definiert haben.) Die zugehörigen neuen Sprachklassen sind

$$\mathsf{CFL} = \{L(G) \mid G \text{ ist eine kontextfreie Grammatik}\},$$

(*context free languages*) und

$$\mathsf{CSL} = \{L(G) \mid G \text{ ist eine kontextsensitive Grammatik}\}$$

(*context sensitive languages*). Da die Klasse der Typ 0 Sprachen mit der Klasse der rekursiv aufzählbaren (*recursively enumerable*) Sprachen übereinstimmt, bezeichnen wir diese Sprachklasse mit

$$\mathsf{RE} = \{L(G) \mid G \text{ ist eine Grammatik}\}.$$

Die Sprachklassen

$$\mathsf{REG} \subset \mathsf{CFL} \subset \mathsf{CSL} \subset \mathsf{RE}$$

[†]Man beachte, dass durch Unterstreichen von u in α sowohl die benutzte Regel als auch die Stelle in α, an der u durch v ersetzt wird, eindeutig erkennbar sind. Da $\Rightarrow$ eine binäre Relation auf $(V \cup \Sigma)^*$ ist, bezeichnet $\Rightarrow^m$ das m-fache Relationenprodukt und $\Rightarrow^*$ die reflexive, transitive Hülle von $\Rightarrow$.

bilden eine Hierarchie (d.h. alle Inklusionen sind echt), die so genannte **Chomsky-Hierarchie**.

Als nächstes zeigen wir, dass sich mit regulären Grammatiken gerade die regulären Sprachen erzeugen lassen.

Satz 72. $\mathsf{REG} = \{L(G) \mid G \textit{ ist eine reguläre Grammatik}\}$.

Beweis. Sei $L \in \mathsf{REG}$ und sei $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ ein DFA mit $L(M) = L$. Wir konstruieren eine reguläre Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $L(G) = L$. Setzen wir

$$\begin{aligned} V &= Z, \\ S &= q_0 \text{ und} \\ P &= \{q \to ap \mid \delta(q,a) = p\} \cup \{q \to \varepsilon \mid q \in E\}, \end{aligned}$$

so gilt für alle Wörter $x = x_1 \dots x_n \in \Sigma^*$:

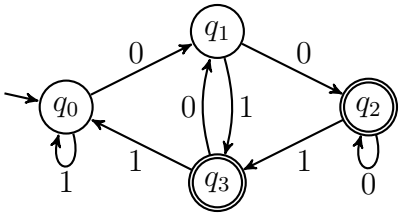
$$\begin{aligned} x \in L(M) &\Leftrightarrow \exists\, q_1, \dots, q_{n-1} \in Z\ \exists\, q_n \in E: \\ &\quad \delta(q_{i-1}, x_i) = q_i \text{ für } i = 1, \dots, n \\ &\Leftrightarrow \exists\, q_1, \dots, q_n \in V: \\ &\quad q_{i-1} \to_G x_i q_i \text{ für } i = 1, \dots, n \text{ und } q_n \to_G \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \exists\, q_1, \dots, q_n \in V: \\ &\quad q_0 \Rightarrow_G^i x_1 \dots x_i q_i \text{ für } i = 1, \dots, n \text{ und } q_n \to_G \varepsilon \\ &\Leftrightarrow x \in L(G) \end{aligned}$$

Für die entgegengesetzte Inklusion sei nun $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine reguläre Grammatik, die keine Produktionen der Form $A \to a$ enthält. Dann können wir die gerade beschriebene Konstruktion einer Grammatik aus einem DFA „umdrehen“, um ausgehend von G einen NFA $M = (Z, \Sigma, \delta, \{S\}, E)$ mit

$$\begin{aligned} Z &= V, \\ E &= \{A \mid A \to_G \varepsilon\} \text{ und} \\ \delta(A, a) &= \{B \mid A \to_G aB\} \end{aligned}$$

zu erhalten. Genau wie oben folgt nun $L(M) = L(G)$. ∎

Beispiel 73. *Der DFA*



führt auf die Grammatik $(\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0,1\}, P, q_0)$ *mit*

$$\begin{aligned} P: \quad & q_0 \to 1q_0, 0q_1, \\ & q_1 \to 0q_2, 1q_3, \\ & q_2 \to 0q_2, 1q_3, \varepsilon, \\ & q_3 \to 0q_1, 1q_0, \varepsilon. \end{aligned}$$

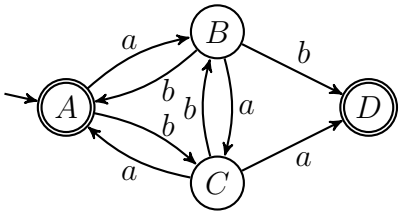
Umgekehrt führt die Grammatik $G = (\{A, B, C\}, \{a, b\}, P, A)$ *mit*

$$\begin{aligned} P: \quad & A \to aB, bC, \varepsilon, \\ & B \to aC, bA, b, \\ & C \to aA, bB, a \end{aligned}$$

über die Grammatik $G' = (\{A, B, C, D\}, \{a, b\}, P', A)$ *mit*

$$\begin{aligned} P': \quad & A \to aB, bC, \varepsilon, \\ & B \to aC, bA, bD, \\ & C \to aA, bB, aD, \\ & D \to \varepsilon \end{aligned}$$

auf den NFA



◁

3 Kontextfreie Sprachen

Wie wir gesehen haben, ist die Sprache $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ nicht regulär. Es ist aber leicht, eine kontextfreie Grammatik für L zu finden:

$$G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aSb, S \to \varepsilon\}, S).$$

Damit ist klar, dass die Klasse der regulären Sprachen echt in der Klasse der kontextfreien Sprachen enthalten ist. Als nächstes wollen wir zeigen, dass die Klasse der kontextfreien Sprachen wiederum echt in der Klasse der kontextsensitiven Sprachen enthalten ist:

$$\mathsf{REG} \subsetneq \mathsf{CFL} \subsetneq \mathsf{CSL}.$$

Kontextfreie Grammatiken sind dadurch charakterisiert, dass sie nur Regeln der Form $A \to \alpha$ haben. Dies lässt die Verwendung von beliebigen ε-Regeln der Form $A \to \varepsilon$ zu. Eine kontextsensitive Grammatik darf dagegen höchstens die ε-Regel $S \to \varepsilon$ haben. Voraussetzung hierfür ist, dass S das Startsymbol ist und dieses nicht auf der rechten Seite einer Regel vorkommt. Daher sind nicht alle kontextfreien Grammatiken kontextsensitiv. Beispielsweise ist die Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aSb, S \to \varepsilon\}, S)$ nicht kontextsensitiv, da sie die Regel $S \to \varepsilon$ enthält, obwohl S auf der rechten Seite der Regel $S \to aSb$ vorkommt.

Es lässt sich jedoch zu jeder kontextfreien Grammatik eine äquivalente kontextfreie Grammatik G' konstruieren, die auch kontextsensitiv ist. Hierzu zeigen wir zuerst, dass sich zu jeder kontextfreien Grammatik G, in der nicht das leere Wort ableitbar ist, eine äquivalente kontextfreie Grammatik G' ohne ε-Regeln konstruieren lässt.

Satz 74. *Zu jeder kontextfreien Grammatik G gibt es eine kontextfreie Grammatik G' ohne ε-Produktionen mit $L(G') = L(G) \setminus \{\varepsilon\}$.*

Beweis. Zuerst sammeln wir mit folgendem Algorithmus alle Variablen A, aus denen das leere Wort ableitbar ist. Diese werden auch als *ε-ableitbar* bezeichnet.

```
1 E' := {A ∈ V | A → ε}
2 repeat
3   E := E'
4   E' := E ∪ {A ∈ V | ∃ B_1, ..., B_k ∈ E : A → B_1 ... B_k}
5 until E = E'
```

Nun konstruieren wir $G' = (V, \Sigma, P', S)$ wie folgt:

> Nehme zu P' alle Regeln $A \to \alpha'$ mit $\alpha' \neq \varepsilon$ hinzu, für die P eine Regel $A \to \alpha$ enthält, so dass α' aus α durch Entfernen von beliebig vielen Variablen $A \in E$ hervorgeht.

■

Beispiel 75. *Betrachte die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, T, U, X, Y, Z\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$ und den Regeln*

$$\begin{aligned} P: \quad & S \to aY, bX, Z; \quad Y \to bS, aYY; \quad T \to U; \\ & X \to aS, bXX; \quad Z \to \varepsilon, S, T, cZ; \quad U \to abc. \end{aligned}$$

Bei der Berechnung von $E = \{A \in V \mid A \Rightarrow^* \varepsilon\}$ ergeben sich der Reihe nach folgende Belegungen für die Mengenvariablen E und E':

E'	$\{Z\}$	$\{Z, S\}$
E	$\{Z, S\}$	$\{Z, S\}$

Um nun die Regelmenge P' zu bilden, entfernen wir aus P die einzige ε-Regel $Z \to \varepsilon$ und fügen die Regeln $X \to a$ (wegen $X \to aS$), $Y \to b$ (wegen $Y \to bS$) und $Z \to c$ (wegen $Z \to cZ$) hinzu:

$$\begin{aligned} P': \quad & S \to aY, bX, Z; \quad Y \to b, bS, aYY; \quad T \to U; \\ & X \to a, aS, bXX; \quad Z \to c, S, T, cZ; \quad U \to abc. \end{aligned}$$

◁

Als direkte Anwendung des obigen Satzes können wir die Inklusion der Klasse der Typ 2 Sprachen in der Klasse der Typ 1 Sprachen zeigen.

Korollar 76. $\mathsf{REG} \subsetneq \mathsf{CFL} \subseteq \mathsf{CSL} \subseteq \mathsf{RE}$.

Beweis. Die Inklusionen $\mathsf{REG} \subseteq \mathsf{CFL}$ und $\mathsf{CSL} \subseteq \mathsf{RE}$ sind klar. Wegen $\{a^n b^n | n \geq 0\} \in \mathsf{CFL} - \mathsf{REG}$ ist die Inklusion $\mathsf{REG} \subseteq \mathsf{CFL}$ auch echt. Also ist nur noch die Inklusion $\mathsf{CFL} \subseteq \mathsf{CSL}$ zu zeigen. Nach obigem Satz ex. zu $L \in \mathsf{CFL}$ eine kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ ohne ε-Produktionen mit $L(G) = L \setminus \{\varepsilon\}$. Da G dann auch kontextsensitiv ist, folgt hieraus im Fall $\varepsilon \notin L$ unmittelbar $L(G) = L \in \mathsf{CSL}$. Im Fall $\varepsilon \in L$ erzeugt die kontextsensitive Grammatik

$$G' = (V \cup \{S'\}, \Sigma, P \cup \{S' \to S, \varepsilon\}, S')$$

die Sprache $L(G') = L$, d.h. $L \in \mathsf{CSL}$. ■

Als nächstes zeigen wir folgende Abschlusseigenschaften der kontextfreien Sprachen.

Satz 77. *Die Klasse* CFL *ist abgeschlossen unter Vereinigung, Produkt und Sternhülle.*

Beweis. Seien $G_i = (V_i, \Sigma, P_i, S_i)$, $i = 1, 2$, kontextfreie Grammatiken für die Sprachen $L(G_i) = L_i$ mit $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ und sei S eine neue Variable. Dann erzeugt die kontextfreie Grammatik

$$G_3 = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1, S_2\}, S)$$

die Vereinigung $L(G_3) = L_1 \cup L_2$. Die Grammatik

$$G_4 = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 S_2\}, S)$$

erzeugt das Produkt $L(G_4) = L_1 L_2$ und die Sternhülle $(L_1)^*$ wird von der Grammatik

$$G_5 = (V_1 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup \{S \to S_1 S, \varepsilon\}, S)$$

erzeugt. ■

Offen bleibt zunächst, ob die kontextfreien Sprachen auch unter Schnitt und Komplement abgeschlossen sind. Um dies zu verneinen, müssen wir für bestimmte Sprachen nachweisen, dass sie nicht kontextfrei sind. Dies gelingt mit einem Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen.

Satz (Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen).
Zu jeder kontextfreien Sprache L gibt es eine Zahl l, so dass sich alle Wörter $z \in L$ mit $|z| \geq l$ in $z = uvwxy$ zerlegen lassen mit

1. $vx \neq \varepsilon$,
2. $|vwx| \leq l$ und
3. $uv^i wx^i y \in L$ für alle $i \geq 0$.

Für den Beweis benötigen wir Grammatiken in Chomsky-Normalform, die wir im nächsten Abschnitt behandeln werden.

Beispiel 78. *Betrachte die Sprache* $L = \{a^n b^n | n \geq 0\}$. *Dann lässt sich jedes Wort* $z = a^n b^n$ *mit* $|z| \geq 2$ *pumpen: Zerlege* $z = uvwxy$ *mit* $u = a^{n-1}$, $v = a$, $w = \varepsilon$, $x = b$ *und* $y = b^{n-1}$. ◁

Beispiel 79. *Die Sprache* $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ *ist nicht kontextfrei. Für eine vorgegebene Zahl* $l \geq 0$ *hat nämlich* $z = a^l b^l c^l$ *die Länge* $|z| = 3l \geq l$. *Dieses Wort lässt sich aber nicht pumpen, da für jede Zerlegung* $z = uvwxy$ *mit* $vx \neq \varepsilon$ *und* $|vwx| \leq l$ *das Wort* $z' = uv^2wx^2y$ *nicht zu* L *gehört:*

- *Wegen* $vx \neq \varepsilon$ *ist* $|z| < |z'|$.
- *Wegen* $|vwx| \leq l$ *kann in* vx *nicht jedes der drei Zeichen* a, b, c *vorkommen.*
- *Kommt aber in* vx *beispielsweise kein* a *vor, so ist*

$$\#_a(z') = \#_a(z) = l = |z|/3 < |z'|/3,$$

also kann z' *nicht zu* L *gehören.* ◁

Die Chomsky-Normalform ist auch Grundlage für einen effizienten Algorithmus zur Lösung des Wortproblems für kontextfreie Grammatiken, das wie folgt definiert ist.

Wortproblem für kontextfreie Grammatiken:

Gegeben: Eine kontextfreie Grammatik G und ein Wort x.
Gefragt: Ist $x \in L(G)$?

Satz. Das Wortproblem für kontextfreie Grammatiken ist effizient entscheidbar.

3.1 Chomsky-Normalform

Definition 80. *Eine Grammatik (V, Σ, P, S) ist in **Chomsky-Normalform** (**CNF**), falls $P \subseteq V \times (V^2 \cup \Sigma)$ ist, also alle Regeln die Form $A \to BC$ oder $A \to a$ haben.*

Um eine kontextfreie Grammatik in Chomsky-Normalform zu bringen, müssen wir neben den ε-Regeln $A \to \varepsilon$ auch sämtliche Variablenumbenennungen $A \to B$ loswerden.

Definition 81. *Regeln der Form $A \to B$ heißen **Variablenumbenennungen**.*

Satz 82. *Zu jeder kontextfreien Grammatik G ex. eine kontextfreie Grammatik G' ohne Variablenumbenennungen mit $L(G') = L(G)$.*

Beweis. Zuerst entfernen wir sukzessive alle Zyklen

$$A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_k \to A_1,$$

indem wir diese Regeln aus P entfernen und alle übrigen Vorkommen der Variablen $A_2, \ldots, A_k$ durch A_1 ersetzen. Falls sich unter den entfernten Variablen $A_2, \ldots, A_k$ die Startvariable S befindet, sei A_1 die neue Startvariable.

Nun entfernen wir sukzessive die restlichen Variablenumbenennungen, indem wir

- eine Regel $A \to B$ wählen, so dass in P keine Variablenumbenennung $B \to C$ mit B auf der rechten Seite existiert,
- diese Regel $A \to B$ aus P entfernen und
- für jede Regel $B \to \alpha$ in P die Regel $A \to \alpha$ zu P hinzunehmen.

■

Beispiel 83. *Ausgehend von den Produktionen*

$$\begin{aligned} P\colon S \to aY, bX, Z; \quad & Y \to b, bS, aYY; \quad T \to U; \\ X \to a, aS, bXX; \quad & Z \to c, S, T, cZ; \quad U \to abc \end{aligned}$$

entfernen wir den Zyklus $S \to Z \to S$, indem wir die Regeln $S \to Z$ und $Z \to S$ entfernen und dafür die Produktionen $S \to c, T, cS$ (wegen $Z \to c, T, cZ$) hinzunehmen:

$$\begin{aligned} & S \to aY, bX, c, T, cS; \quad Y \to b, bS, aYY; \quad T \to U; \\ & X \to a, aS, bXX; \quad U \to abc. \end{aligned}$$

Nun entfernen wir die Regel $T \to U$ und fügen die Regel $T \to abc$ (wegen $U \to abc$) hinzu:

$$\begin{aligned} & S \to aY, bX, c, T, cS; \quad Y \to b, bS, aYY; \quad T \to abc; \\ & X \to a, aS, bXX; \quad U \to abc. \end{aligned}$$

Als nächstes entfernen wir dann auch die Regel $S \to T$ und fügen die Regel $S \to abc$ (wegen $T \to abc$) hinzu:

$$\begin{aligned} & S \to abc, aY, bX, c, cS; \quad Y \to b, bS, aYY; \quad T \to abc; \\ & X \to a, aS, bXX; \quad U \to abc. \end{aligned}$$

Da T und U nun nirgends mehr auf der rechten Seite vorkommen, können wir die Regeln $T \to abc$ und $U \to abc$ weglassen:

$$S \to abc, aY, bX, c, cS;\ Y \to b, bS, aYY;\ X \to a, aS, bXX.$$ ◁

Nach diesen Vorarbeiten ist es nun leicht, eine gegebene kontextfreie Grammatik in Chomsky-Normalform umzuwandeln.

Satz 84. *Jede kontextfreie Grammatik G lässt sich in eine CNF-Grammatik G' mit $L(G') = L(G) \setminus \{\varepsilon\}$ transformieren.*

Beweis. Aufgrund der beiden vorigen Sätze können wir G in eine CNF-Grammatik G' mit $L(G') = L(G) \setminus \{\varepsilon\}$ transformieren, die keine ε-Produktionen und keine Variablenumbenennungen hat. Diese können wir wie folgt in eine äquivalente CNF-Grammatik umwandeln:

- Füge für jedes Terminalsymbol $a \in \Sigma$ eine neue Variable X_a zu V und eine neue Regel $X_a \to a$ zu P hinzu.
- Ersetze alle Vorkommen von a durch X_a, außer wenn a alleine auf der rechten Seite einer Regel steht.
- Führe für jede Regel $A \to B_1 \dots B_k$, $k \geq 3$, neue Variablen $A_1, \dots, A_{k-2}$ ein und ersetze sie durch die $k-1$ Regeln

$$A \to B_1 A_1,\ A_1 \to B_2 A_2,\ \dots,\ A_{k-3} \to B_{k-2} A_{k-2},\ A_{k-2} \to B_{k-1} B_k$$

■

Falls G Regeln mit vielen ε-ableitbaren Variablen auf der rechten Seite hat, empfiehlt es sich, die in obigem Beweis beschriebenen Umformungsschritte zuerst durchzuführen, und erst danach Regeln der Form $A \to \varepsilon$ und $A \to B$ zu beseitigen (siehe Übungen).

Beispiel 85. *In der Produktionenmenge*

$$P\colon\ S \to abc, aY, bX, c, cS;\ \ X \to a, aS, bXX;\ \ Y \to b, bS, aYY$$

ersetzen wir die Terminalsymbole a, b und c durch die Variablen A, B und C (außer wenn sie alleine auf der rechten Seite einer Regel vorkommen) und fügen die Regeln $A \to a$, $B \to b$, $C \to c$ hinzu:

$$S \to c, ABC, AY, BX, CS;\ \ X \to a, AS, BXX;$$
$$Y \to b, BS, AYY;\ \ A \to a;\ \ B \to b;\ \ C \to c.$$

Ersetze nun die Regeln $S \to ABC$, $X \to BXX$ und $Y \to AYY$ durch die Regeln $S \to AS'$, $S' \to BC$, $X \to BX'$, $X' \to XX$ und $Y \to AY'$, $Y' \to YY$:

$$S \to c, AS', AY, BX, CS;\ \ S' \to BC;$$
$$X \to a, AS, BX';\ \ X' \to XX;\ \ Y \to b, BS, AY';\ \ Y' \to YY;$$
$$A \to a;\ B \to b;\ C \to c.$$

◁

Eine interessante Frage ist, ob in einer kontextfreien Grammatik G jedes Wort $x \in L(G)$ "eindeutig" ableitbar ist. Es ist klar, dass in diesem Kontext Ableitungen, die sich nur in der Reihenfolge der Regelanwendungen unterscheiden, nicht als verschieden betrachtet werden sollten. Dies erreichen wir dadurch, dass wir die Reihenfolge der Regelanwendungen festlegen.

Definition 86. *Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik.*

*a) Eine Ableitung $\underline{A_0} \Rightarrow l_1 \underline{A_1} r_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow l_{m-1} \underline{A_{m-1}} r_{m-1} \Rightarrow \alpha_m$ heißt **Linksableitung** von α (kurz $\alpha_0 \Rightarrow_L^* \alpha_m$), falls in jedem Ableitungsschritt die am weitesten links stehende Variable ersetzt wird, d.h. es gilt $l_i \in \Sigma^*$ für $i = 0, \dots, m-1$.*

*b) **Rechtsableitungen** $A_0 \Rightarrow_R^* \alpha_m$ sind analog definiert.*

*c) G heißt **mehrdeutig**, wenn es ein Wort $x \in L(G)$ gibt, das zwei verschiedene Linksableitungen $S \Rightarrow_L^* x$ hat. Andernfalls heißt G **eindeutig**.*

Offenbar gelten für alle Wörter $x \in \Sigma^*$ folgende Äquivalenzen:

$$x \in L(G) \ \Leftrightarrow\ S \Rightarrow^* x \ \Leftrightarrow\ S \Rightarrow_L^* x \ \Leftrightarrow\ S \Rightarrow_R^* x.$$

Beispiel 87. *Wir betrachten die Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aSbS, \varepsilon\}, S)$. Offenbar hat das Wort $aabb$ in G acht verschiedene*

Ableitungen, die sich allerdings nur in der Reihenfolge der Regelanwendungen unterscheiden:

$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aaSb\underline{S}bS \Rightarrow aa\underline{S}bbS \Rightarrow aabb\underline{S} \Rightarrow aabb$$
$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aaSb\underline{S}bS \Rightarrow aaSbb\underline{S} \Rightarrow aa\underline{S}bb \Rightarrow aabb$$
$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aa\underline{S}bSbS \Rightarrow aab\underline{S}bS \Rightarrow aabb\underline{S} \Rightarrow aabb$$
$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aa\underline{S}bSbS \Rightarrow aabSb\underline{S} \Rightarrow aab\underline{S}b \Rightarrow aabb$$
$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aaSbSb\underline{S} \Rightarrow aa\underline{S}bSb \Rightarrow aab\underline{S}b \Rightarrow aabb$$
$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aaSbSb\underline{S} \Rightarrow aaSb\underline{S}b \Rightarrow aa\underline{S}bb \Rightarrow aabb$$
$$\underline{S} \Rightarrow aSb\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}b \Rightarrow aa\underline{S}bSb \Rightarrow aab\underline{S}b \Rightarrow aabb$$
$$\underline{S} \Rightarrow aSb\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}b \Rightarrow aaSb\underline{S}b \Rightarrow aa\underline{S}bb \Rightarrow aabb.$$

Darunter sind genau eine Links- und genau eine Rechtsableitung:

$$\underline{S} \Rightarrow_L a\underline{S}bS \Rightarrow_L aa\underline{S}bSbS \Rightarrow_L aab\underline{S}bS \Rightarrow_L aabb\underline{S} \Rightarrow_L aabb$$

und

$$\underline{S} \Rightarrow_R aSb\underline{S} \Rightarrow_R a\underline{S}b \Rightarrow_R aaSb\underline{S}b \Rightarrow_R aa\underline{S}bb \Rightarrow_R aabb.$$

Die Grammatik G ist eindeutig. Dies liegt daran, dass in jeder Satzform $\alpha S\beta$ von G das Suffix β entweder leer ist oder mit einem b beginnt. Daher muss jede Linksableitung eines Wortes $x \in L(G)$ die am weitesten links stehende Variable der aktuellen Satzform $\alpha S\beta$ genau dann nach $aSbS$ expandieren, falls das Präfix α in x von einem a gefolgt wird.

Dagegen ist die Grammatik $G' = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aSbS, ab, \varepsilon\}, S)$ mehrdeutig, da das Wort $x = ab$ zwei Linksableitungen hat:

$$\underline{S} \Rightarrow_L ab \text{ und } \underline{S} \Rightarrow_L a\underline{S}bS \Rightarrow_L ab\underline{S} \Rightarrow_L ab.$$

◁

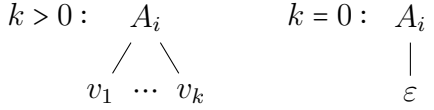
Ableitungen in einer kontextfreien Grammatik lassen sich graphisch sehr gut durch einen Syntaxbaum (auch ***Ableitungsbaum*** genannt, engl. *parse tree*) veranschaulichen.

Definition 88. *Sei $G = (V, E)$ ein Digraph.*

- *Ein **v_0-v_k-Weg** in G ist eine Folge von Knoten $v_0, \ldots, v_k$ mit $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für $i = 0, \ldots, k-1$. Seine **Länge** ist k.*
- *Ein Weg heißt **einfach** oder **Pfad**, falls alle seine Knoten paarweise verschieden sind.*
- *Ein u-v-Weg der Länge ≥ 1 mit $u = v$ heißt **Zyklus**.*
- *G heißt **azyklisch**, wenn es in G keinen Zyklus gibt.*
- *G heißt **gerichteter Wald**, wenn G azyklisch ist und jeder Knoten $v \in V$ Eingangsgrad $\deg^-(v) \leq 1$ hat.*
- *Ein Knoten $u \in V$ vom Ausgangsgrad $\deg^+(u) = 0$ heißt **Blatt**.*
- *Ein Knoten $w \in V$ heißt **Wurzel** von G, falls alle Knoten $v \in V$ von w aus erreichbar sind (d.h. es gibt einen w-v-Weg in G).*
- *Ein **gerichteter Wald**, der eine Wurzel hat, heißt **gerichteter Baum**.*
- *Da die Kantenrichtungen durch die Wahl der Wurzel eindeutig bestimmt sind, kann auf ihre Angabe verzichtet werden. Man spricht dann auch von einem **Wurzelbaum**.*

Definition 89. *Sei $\underline{A_0} \Rightarrow l_1\underline{A_1}r_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow l_{m-1}\underline{A_{m-1}}r_{m-1} \Rightarrow \alpha_m$ eine Ableitung in einer kontextfreien Grammatik G. Wir ordnen ihr den Syntaxbaum T_m zu, wobei die Bäume $T_0, \ldots, T_m$ induktiv wie folgt definiert sind:*

- *T_0 besteht aus einem einzigen Knoten, der mit A_0 markiert ist.*
- *Wird im $(i+1)$-ten Ableitungsschritt die Regel $A_i \to v_1 \ldots v_k$ mit $v_j \in \Sigma \cup V$ für $j = 1, \ldots, k$ angewandt, so ensteht T_{i+1} aus T_i, indem wir das Blatt A_i in T_i durch folgenden Unterbaum ersetzen:*

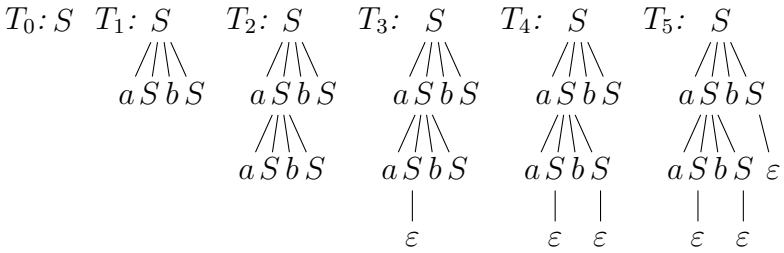


- *Hierbei stellen wir uns die Kanten von oben nach unten gerichtet und die Kinder $v_1 \ldots v_k$ von links nach rechts geordnet vor.*

Beispiel 90. *Betrachte die Grammatik* $G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aSbS, \varepsilon\}, S)$ *und die Ableitung*

$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aaSb\underline{S}bS \Rightarrow aa\underline{S}bbS \Rightarrow aabb\underline{S} \Rightarrow aabb.$$

Die zugehörigen Syntaxbäume sind dann



Die Satzform α_i *ergibt sich aus* T_i*, indem wir die Blätter von* T_i *von links nach rechts zu einem Wort zusammensetzen.* ◁

Bemerkung 91.

- *Aus einem Syntaxbaum ist die zugehörige Linksableitung eindeutig rekonstruierbar. Daher führen unterschiedliche Linksableitungen auch auf unterschiedliche Syntaxbäume. Linksableitungen und Syntaxbäume entsprechen sich also eineindeutig. Ebenso Rechtsableitungen und Syntaxbäume.*
- *Ist* T *Syntaxbaum einer CNF-Grammatik, so hat jeder Knoten in* T *höchstens zwei Kinder (d.h.* T *ist ein Binärbaum).*

3.2 Das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

In diesem Abschnitt beweisen wir das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen. Dabei nutzen wir die Tatsache aus, dass die Syntaxbäume einer CNF-Grammatik Binärbäume sind.

Definition 92. *Die* ***Tiefe*** *eines Baumes mit Wurzel* w *ist die maximale Pfadlänge von* w *zu einem Blatt.*

Lemma 93. *Ein Binärbaum* B *der Tiefe* k *hat höchstens* 2^k *Blätter.*

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion über k.

$k = 0$: Ein Baum der Tiefe 0 kann nur einen Knoten haben.

$k \rightsquigarrow k+1$: Sei B ein Binärbaum der Tiefe $k+1$. Dann hängen an B's Wurzel maximal zwei Teilbäume. Da deren Tiefe $\leq k$ ist, haben sie nach IV höchstens 2^k Blätter. Also hat $B \leq 2^{k+1}$ Blätter. ■

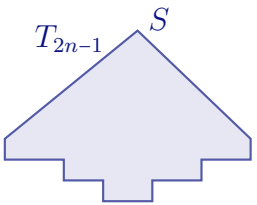
Korollar 94. *Ein Binärbaum* B *mit mehr als* 2^{k-1} *Blättern hat mindestens Tiefe* k*.*

Beweis. Würde B mehr als 2^{k-1} Blätter und eine Tiefe $\leq k-1$ besitzen, so würde dies im Widerspruch zu Lemma 93 stehen. ■

Satz 95 (Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen)**.**
Zu jeder kontextfreien Sprache L *gibt es eine Zahl* l*, so dass sich alle Wörter* $z \in L$ *mit* $|z| \geq l$ *in* $z = uvwxy$ *zerlegen lassen mit*

1. $vx \neq \varepsilon$,
2. $|vwx| \leq l$ *und*
3. $uv^iwx^iy \in L$ *für alle* $i \geq 0$.

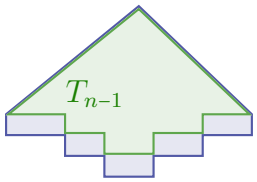
Beweis. Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine CNF-Grammatik für $L \setminus \{\varepsilon\}$. Dann gibt es in G für jedes Wort $z = z_1 \dots z_n \in L$ mit $n \geq 1$, eine Ableitung

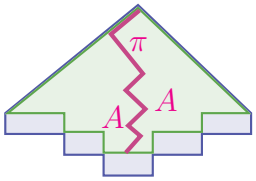


$$S = \alpha_0 \Rightarrow \alpha_1 \cdots \Rightarrow \alpha_m = z.$$

Da G in CNF ist, werden hierbei $n-1$ Regeln der Form $A \to BC$ und n Regeln der Form $A \to a$ angewandt, d.h. $m = 2n-1$ und z hat den Syntaxbaum T_{2n-1}. Wir können annehmen,

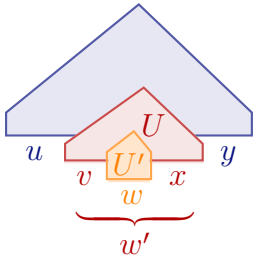
dass zuerst alle Regeln der Form $A \to BC$ und danach die Regeln der Form $A \to a$ zur Anwendung kommen. Dann besteht die Satzform α_{n-1} aus n Variablen und der Syntaxbaum T_{n-1} hat ebenfalls n Blätter. Setzen wir $l = 2^k$, wobei $k = \|V\|$ ist, so hat T_{n-1} im Fall $n \geq l$ mindestens



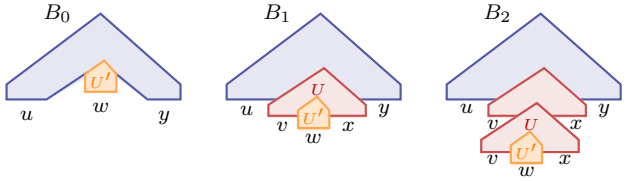


$l = 2^k > 2^{k-1}$ Blätter und daher mindestens die Tiefe k. Sei π ein von der Wurzel ausgehender Pfad maximaler Länge in T_{n-1}. Dann hat π die Länge $\geq k$ und unter den letzten $k+1$ Knoten von π müssen zwei mit derselben Variablen A markiert sein.

Seien U und U' die von diesen Knoten ausgehenden Unterbäume des vollständigen Syntaxbaums T_{2n-1}. Nun zerlegen wir z wie folgt. w' ist das Teilwort von $z = uw'y$, das von U erzeugt wird und w ist das Teilwort von $w' = vwx$, das von U' erzeugt wird. Jetzt bleibt nur noch zu zeigen, dass diese Zerlegung die geforderten 3 Eigenschaften erfüllt.



- Da U mehr Blätter hat als U', ist $vx \neq \varepsilon$ (Bedingung 1).
- Da der Baum $U^* = U \cap T_{n-1}$ die Tiefe $\leq k$ hat (andernfalls wäre π nicht maximal), hat U^* höchstens $2^k = l$ Blätter. Da U^* genau $|vwx|$ Blätter hat, folgt $|vwx| \leq l$ (Bedingung 2).
- Für den Nachweis von Bedingung 3 lassen sich schließlich Syntaxbäume B^i für die Wörter uv^iwx^iy, $i \geq 0$, wie folgt konstruieren:



B^0 entsteht also aus $B^1 = T_{2n-1}$, indem wir U durch U' ersetzen, und B^{i+1} entsteht aus B^i, indem wir U' durch U ersetzen. ■

Satz 96. *Die Klasse* CFL *ist nicht abgeschlossen unter Schnitt und Komplement.*

Beweis. Die beiden Sprachen

$$L_1 = \{a^n b^m c^m \mid n, m \geq 0\} \quad \text{und} \quad L_2 = \{a^n b^n c^m \mid n, m \geq 0\}$$

sind kontextfrei. Nicht jedoch $L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. Also ist CFL nicht unter Schnitt abgeschlossen.

Da CFL zwar unter Vereinigung aber nicht unter Schnitt abgeschlossen ist, kann CFL wegen de Morgan nicht unter Komplementbildung abgeschlossen sein. ■

3.3 Der CYK-Algorithmus

In diesem Abschnitt stellen wir den bereits angekündigten effizienten Algorithmus zur Lösung des Wortproblems für kontextfreie Grammatiken vor.

Wortproblem für kontextfreie Grammatiken:

Gegeben: Eine kontextfreie Grammatik G und ein Wort x.
Gefragt: Ist $x \in L(G)$?

Wir lösen das Wortproblem, indem wir G zunächst in Chomsky-Normalform bringen und dann den nach seinen Autoren Cocke, Younger und Kasami benannten CYK-Algorithmus anwenden, welcher auf dem Prinzip der Dynamischen Programmierung beruht.

Satz 97. *Das Wortproblem für kontextfreie Grammatiken ist effizient entscheidbar.*

Beweis. Seien eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ und ein Wort $x = x_1 \dots x_n$ gegeben. Falls $x = \varepsilon$ ist, können wir effizient prüfen, ob $S \Rightarrow^* \varepsilon$

gilt. Andernfalls transformieren wir G in eine CNF-Grammatik G' für die Sprache $L(G) \setminus \{\varepsilon\}$. Chomsky-Normalform. Es lässt sich leicht verifizieren, dass die nötigen Umformungsschritte effizient ausführbar sind. Nun setzen wir den CYK-Algorithmus auf das Paar (G', x) an, der die Zugehörigkeit von x zu $L(G')$ wie folgt entscheidet.

Bestimme für $l = 1, \ldots, n$ und $k = 1, \ldots, n - l + 1$ die Menge

$$V_{l,k}(x) = \{A \in V \mid A \Rightarrow^* x_k \ldots x_{k+l-1}\}$$

aller Variablen, aus denen das an Position k beginnende Teilwort $x_k \ldots x_{k+l-1}$ von x der Länge l ableitbar ist. Dann gilt offensichtlich

$$x \in L(G') \Leftrightarrow S \in V_{n,1}(x).$$

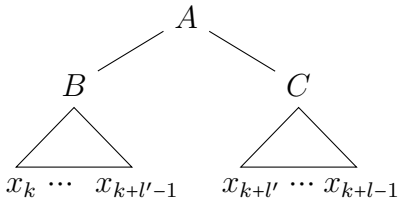
Für $l = 1$ ist

$$V_{1,k}(x) = \{A \in V \mid A \to x_k\}$$

und für $l = 2, \ldots, n$ ist

$$V_{l,k}(x) = \{A \in V \mid \exists l' < l \; \exists B \in V_{l',k}(x) \; \exists C \in V_{l-l',k+l'}(x) \colon A \to BC\}.$$

Eine Variable A gehört also genau dann zu $V_{l,k}(x)$, $l \geq 2$, falls eine Zahl $l' \in \{1, \ldots, l-1\}$ und eine Regel $A \to BC$ existieren, so dass $B \in V_{l',k}(x)$ und $C \in V_{l-l',k+l'}(x)$ sind.



■

Algorithmus CYK(G, x)

```
1  Input: CNF−Grammatik G = (V, Σ, P, S) und ein Wort x = x_1 ... x_n
2  for k := 1 to n do
3    V_{1,k} := {A ∈ V | A → x_k ∈ P}
4  for l := 2 to n do
5    for k := 1 to n − l + 1 do
6      V_{l,k} := ∅
7      for l' := 1 to l − 1 do
8        for all A → BC ∈ P do
9          if B ∈ V_{l',k} and C ∈ V_{l−l',k+l'} then
10           V_{l,k} := V_{l,k} ∪ {A}
11 if S ∈ V_{n,1} then accept else reject
```


Der CYK-Algorithmus lässt sich leicht dahingehend modifizieren, dass er im Fall $x \in L(G)$ auch einen Syntaxbaum T von x ausgibt. Hierzu genügt es, zu jeder Variablen A in $V_{l,k}$ den Wert von l' und die Regel $A \to BC$ zu speichern, die zur Aufnahme von A in $V_{l,k}$ geführt haben. Im Fall $S \in V_{n,1}(x)$ lässt sich dann mithilfe dieser Information leicht ein Syntaxbaum T von x konstruieren.

Beispiel 98. *Betrachte die CNF-Grammatik mit den Produktionen*

$$S \to AS', AY, BX, CS, c; \;\; S' \to BC; \;\; X \to AS, BX', a; \;\; X' \to XX;$$
$$Y \to BS, AY', b; \;\; Y' \to YY; \;\; A \to a; \;\; B \to b; \;\; C \to c.$$

Dann erhalten wir für das Wort $x = abb$ folgende Mengen $V_{l,k}$:

x_k:	a	b	b
l:1	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$
2	$\{S\}$	$\{Y'\}$	
3	$\{Y\}$		

Wegen $S \notin V_{3,1}(abb)$ ist $x \notin L(G)$.

Dagegen gehört das Wort $y = aababb$ wegen $S \in V_{6,1}(aababb)$ zu $L(G)$:

a	a	b	a	b	b
$\{X, A\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$
$\{X'\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{Y'\}$	
$\{X\}$	$\{X\}$	$\{Y\}$	$\{Y\}$		
$\{X'\}$	$\{S\}$	$\{Y'\}$			
$\{X\}$	$\{Y\}$				
$\{S\}$					

◁