Einführung in die Theoretische Informatik

Johannes Köbler

Institut für Informatik
Humboldt-Universität zu Berlin

WS 2020/21

Zeitkomplexität von Turingmaschinen

Die Laufzeit einer NTM M bei Eingabe x ist die maximale Anzahl an Rechenschritten, die $M(x)$ ausführt

Definition

- Die Laufzeit einer NTM M bei Eingabe x ist definiert als

  $$time_M(x) = \sup\{t \geq 0 \mid \exists K : K_x \vdash^t K\},$$

  wobei $\sup \mathbb{N} = \infty$ ist
- Sei $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine monoton wachsende Funktion
- Dann ist M $t(n)$-zeitbeschränkt, falls für alle Eingaben x gilt:

  $$time_M(x) \leq t(|x|)$$

Die Zeitschranke $t(n)$ beschränkt also die Laufzeit bei allen Eingaben der Länge n (worst-case Komplexität)

Zeitkomplexitätsklassen

Wir fassen alle Sprachen und Funktionen, die in einer vorgegebenen Zeitschranke $t(n)$ entscheidbar bzw. berechenbar sind, in folgenden Komplexitätsklassen zusammen

Definition

- Die in deterministischer Zeit $t(n)$ entscheidbaren Sprachen bilden die Sprachklasse

$$\mathrm{DTIME}(t(n)) = \{L(M) \mid M \text{ ist eine } t(n)\text{-zeitbeschränkte DTM}\}$$

- Die in nichtdeterministischer Zeit $t(n)$ entscheidbaren Sprachen bilden die Sprachklasse

$$\mathrm{NTIME}(t(n)) = \{L(M) \mid M \text{ ist eine } t(n)\text{-zeitbeschränkte NTM}\}$$

- Die in deterministischer Zeit $t(n)$ berechenbaren Funktionen bilden die Funktionenklasse

$$\mathrm{FTIME}(t(n)) = \left\{ f \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{es gibt eine } t(n)\text{-zeitbeschränkte} \\ \text{DTM } M \text{, die } f \text{ berechnet} \end{array} \right\}$$

Die wichtigsten Zeitkomplexitätsklassen

- Die wichtigsten deterministischen Zeitkomplexitätsklassen sind

$$\begin{aligned} \text{LINTIME} &= \bigcup_{c\geq 1} \text{DTIME}(cn+c) && \text{„Linearzeit“} \\ \text{P} &= \bigcup_{c\geq 1} \text{DTIME}(n^c+c) && \text{„Polynomialzeit“} \\ \text{E} &= \bigcup_{c\geq 1} \text{DTIME}(2^{cn+c}) && \text{„Lineare Exponentialzeit“} \\ \text{EXP} &= \bigcup_{c\geq 1} \text{DTIME}(2^{n^c+c}) && \text{„Exponentialzeit“} \end{aligned}$$

- Die nichtdeterministischen Klassen NLINTIME, NP, NE, NEXP und die Funktionenklassen FLINTIME, FP, FE, FEXP sind analog definiert
- Für eine Klasse $\mathcal{F}$ von Funktionen sei $\text{DTIME}(\mathcal{F}) = \bigcup_{t\in\mathcal{F}} \text{DTIME}(t(n))$ (die Klassen $\text{NTIME}(\mathcal{F})$ und $\text{FTIME}(\mathcal{F})$ sind analog definiert)

Asymptotische Laufzeit und Landau-Notation

Definition

Seien f und g Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}^+ \cup \{0\} = [0, \infty)$

- Wir schreiben $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$, falls es Zahlen n_0 und c gibt mit

  $$\forall n \geq n_0 : f(n) \leq c \cdot g(n)$$

  Bedeutung: „f wächst nicht wesentlich schneller als g"

- Formal bezeichnet der Term $\mathcal{O}(g(n))$ die Klasse aller Funktionen f, die obige Bedingung erfüllen, d.h.

  $$\mathcal{O}(g(n)) = \{f : \mathbb{N} \to [0, \infty) \mid \exists n_0, c \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0 : f(n) \leq c \cdot g(n)\}$$

- Die Gleichung $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ drückt also in Wahrheit eine Element-Beziehung $f \in \mathcal{O}(g(n))$ aus
- O-Terme können auch auf der linken Seite vorkommen. In diesem Fall wird eine Inklusionsbeziehung ausgedrückt
- So steht $n^2 + \mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(n^2)$ für die Aussage

  $$\{n^2 + f \mid f \in \mathcal{O}(n)\} \subseteq \mathcal{O}(n^2)$$

Asymptotische Laufzeit und Landau-Notation

Beispiel

- $7\log(n) + n^3 = \mathcal{O}(n^3)$ ist richtig
- $7\log(n)n^3 = \mathcal{O}(n^3)$ ist falsch
- $2^{n+\mathcal{O}(1)} = \mathcal{O}(2^n)$ ist richtig
- $2^{\mathcal{O}(n)} = \mathcal{O}(2^n)$ ist falsch (siehe Übungen)

Mit der O-Notation lassen sich die wichtigsten deterministischen Zeitkomplexitätsklassen wie folgt charakterisieren:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{LINTIME} &= \mathrm{DTIME}(\mathcal{O}(n)) && \text{„Linearzeit“}\\
\mathrm{P} &= \mathrm{DTIME}(n^{\mathcal{O}(1)}) && \text{„Polynomialzeit“}\\
\mathrm{E} &= \mathrm{DTIME}(2^{\mathcal{O}(n)}) && \text{„Lineare Exponentialzeit“}\\
\mathrm{EXP} &= \mathrm{DTIME}(2^{n^{\mathcal{O}(1)}}) && \text{„Exponentialzeit“}
\end{aligned}
$$

Das P-NP-Problem

- Wie wir gesehen haben, sind NTMs nicht mächtiger als DTMs, d.h. jede NTM kann von einer DTM simuliert werden
- Die Frage, wieviel Zeit eine DTM zur Simulation einer NTM benötigt, ist eines der wichtigsten offenen Probleme der Informatik
- Wegen $\mathrm{NTIME}(t) \subseteq \mathrm{DTIME}(2^{\mathcal{O}(t)})$ erhöht sich die Laufzeit im schlimmsten Fall exponentiell
- Insbesondere die Klasse NP enthält viele für die Praxis überaus wichtige Probleme, für die kein Polynomialzeitalgorithmus bekannt ist
- Für viele dieser Probleme A konnte folgende Implikation gezeigt werden:

  $$A \in \mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{P} = \mathrm{NP}$$

- Da jedoch nur Probleme in P als effizient lösbar angesehen werden, hat das P-NP-Problem, also die Frage, ob NP = P ist, eine immense praktische Bedeutung

Die Polynomialzeitreduktion

Definition

- Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ ist auf $B \subseteq \Gamma^*$ in Polynomialzeit reduzierbar ($A \leq^p B$), falls eine Funktion $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$ in FP existiert mit

$$\forall x \in \Sigma^* : x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$$

- Eine Sprache A heißt $\leq^p$-hart für eine Sprachklasse $\mathcal{C}$ (kurz: $\mathcal{C}$-hart oder $\mathcal{C}$-schwer), falls gilt:

$$\forall L \in \mathcal{C} : L \leq^p A$$

- Eine $\mathcal{C}$-harte Sprache A, die zu $\mathcal{C}$ gehört, heißt $\mathcal{C}$-vollständig (bzgl. $\leq^p$)
- NPC bezeichnet die Klasse aller NP-vollständigen Sprachen

Lemma

- Aus $A \leq^p B$ folgt $A \leq B$
- Die Reduktionsrelation $\leq^p$ ist reflexiv und transitiv (s. Übungen)

Die Polynomialzeitreduktion

Satz

Die Klassen P und NP sind unter $\le^p$ abgeschlossen

Beweis

- Sei $B \in \mathrm{P}$ und gelte $A \le^p B$ mittels einer Funktion $f \in \mathrm{FP}$
- Seien M und T DTMs mit $L(M) = B$ und $T(x) = f(x)$
- Weiter seien p und q polynomielle Zeitschranken für M und T
- Betrachte die DTM M', die bei Eingabe x zuerst T simuliert, um $f(x)$ zu berechnen, und danach M bei Eingabe $f(x)$ simuliert. Dann gilt
$$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B \Leftrightarrow f(x) \in L(M) \Leftrightarrow x \in L(M')$$
- Also ist $L(M') = A$ und wegen
$$time_{M'}(x) \le time_T(x) + time_M(f(x)) \le q(|x|) + p(q(|x|))$$
ist M' polynomiell zeitbeschränkt und somit A in P
- Die Abgeschlossenheit von NP unter $\le^p$ folgt analog $\square$

NP-Vollständigkeit

Satz

$A \leq^p B$ und A ist NP-hart $\Rightarrow$ B ist NP-hart

Beweis

- Sei $L \in \mathrm{NP}$
- Da A NP-hart ist, gilt $L \leq^p A$
- Da zudem $A \leq^p B$ gilt und $\leq^p$ transitiv ist, folgt $L \leq^p B$

Satz

Falls ein NP-hartes Problem A in P enthalten ist, folgt $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$

Beweis

- Sei $L \in \mathrm{NP}$
- Da A NP-hart ist, gilt $L \leq^p A$
- Da $A \in \mathrm{P}$ ist und P unter $\leq^p$ abgeschlossen ist, folgt $L \in \mathrm{P}$ $\square$

Platzkomplexität von Turingmaschinen

- Als nächstes definieren wir den Platzverbrauch von NTMs
- Intuitiv ist dies die Anzahl aller von einer NTM M besuchten Bandfelder
- Wollen wir auch sublinearen Platz sinnvoll definieren, so dürfen wir die Bandfelder, auf denen die Eingabe steht, nicht mitzählen
- Um sicherzustellen, dass M das erste Band nur zum Lesen der Eingabe und nicht als Speicherplatz benutzt, darf M
  - die Felder auf dem Eingabeband nicht verändern und
  - sich höchstens ein Feld von der Eingabe entfernen

Definition

Eine k-NTM M heißt NTM mit Eingabeband (kurz offline-NTM), falls für jede von M bei Eingabe x erreichbare Konfiguration

$$K = (q, u_1, a_1, v_1, \dots, u_k, a_k, v_k)$$

gilt, dass $u_1 a_1 v_1$ ein Teilwort von $\sqcup x \sqcup$ ist

Definition

- Der Platzverbrauch einer offline-NTM M bei Eingabe x ist definiert als

$$space_M(x) = \sup \left\{ s \geq 1 \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists K = (q, u_1, a_1, v_1, \ldots, u_k, a_k, v_k) \\ \text{mit } K_x \vdash^* K \text{ und } s = \sum\limits_{i=2}^{k} |u_i a_i v_i| \end{array} \right\}$$

- Sei $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine monoton wachsende Funktion
- M heißt $s(n)$-platzbeschränkt, falls für alle Eingaben x gilt:

$$space_M(x) \leq s(|x|) \text{ und } time_M(x) < \infty$$

Platzkomplexitätsklassen

Wir fassen alle Sprachen, die in einer vorgegebenen Platzschranke $s(n)$ entscheidbar sind, in folgenden Platzkomplexitätsklassen zusammen

Definition

- Die auf deterministischem Platz $s(n)$ entscheidbaren Sprachen bilden die Klasse

$$\mathrm{DSPACE}(s(n)) = \{L(M) \mid M \text{ ist eine } s(n)\text{-platzb. offline-DTM}\}$$

- Die auf nichtdeterministischem Platz $s(n)$ entscheidbaren Sprachen bilden die Klasse

$$\mathrm{NSPACE}(s(n)) = \{L(M) \mid M \text{ ist eine } s(n)\text{-platzb. offline-NTM}\}$$

Die wichtigsten Platzkomplexitätsklassen

- Die wichtigsten deterministischen Platzkomplexitätsklassen sind

$$\begin{aligned}
\mathsf{L} &= \mathsf{DSPACE}(\mathcal{O}(\log n)) && \text{„Logarithmischer Platz"} \\
\mathsf{LINSPACE} &= \mathsf{DSPACE}(\mathcal{O}(n)) && \text{„Linearer Platz"} \\
\mathsf{PSPACE} &= \mathsf{DSPACE}(n^{\mathcal{O}(1)}) && \text{„Polynomieller Platz"} \\
\mathsf{EXPSPACE} &= \mathsf{DSPACE}(2^{n^{\mathcal{O}(1)}}) && \text{„Exponentieller Platz"}
\end{aligned}$$

- Die nichtdeterministischen Klassen NL, NLINSPACE, NPSPACE und NEXPSPACE sind analog definiert

Elementare Beziehungen zwischen Komplexitätsklassen

Frage

Welche elementaren Beziehungen gelten zwischen den verschiedenen Zeit- und Platzklassen?

Satz

- Für jede Funktion $t(n) \geq n+2$ gilt

  $$\mathrm{DTIME}(t) \subseteq \mathrm{NTIME}(t) \subseteq \mathrm{DSPACE}(\mathcal{O}(t))$$

- Für jede Funktion $s(n) \geq \log n$ gilt

  $$\mathrm{DSPACE}(s) \subseteq \mathrm{NSPACE}(s) \subseteq \mathrm{DTIME}(2^{\mathcal{O}(s)}) \text{ und}$$

  $$\mathrm{NSPACE}(s) \subseteq \mathrm{DSPACE}(s^2) \qquad \text{(Satz von Savitch)}$$

Korollar

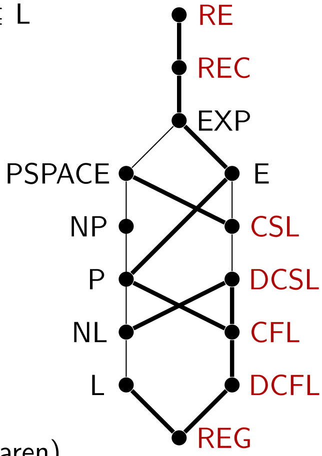
- $\mathrm{L} \subseteq \mathrm{NL} \subseteq \mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PSPACE} \subseteq \mathrm{NPSPACE} \subseteq \mathrm{EXP} \subseteq \mathrm{NEXP} \subseteq \mathrm{EXPSPACE}$
- $\mathrm{PSPACE} = \mathrm{NPSPACE}$ und $\mathrm{EXPSPACE} = \mathrm{NEXPSPACE}$

Komplexität der Stufen der Chomsky-Hierarchie

- REG = DSPACE($\mathcal{O}(1)$) = NSPACE($\mathcal{O}(1)$) $\subsetneq$ L
- DCFL $\subsetneq$ LINTIME
- CFL $\subsetneq$ NLINTIME $\cap$ DTIME($\mathcal{O}(n^3)$) $\subsetneq$ P
- DCSL = LINSPACE $\subseteq$ CSL
- CSL = NLINSPACE $\subseteq$ PSPACE $\cap$ E
- REC $= \bigcup_f \mathrm{DTIME}(f(n)) = \bigcup_f \mathrm{DSPACE}(f(n))$

  $= \bigcup_f \mathrm{NTIME}(f(n)) = \bigcup_f \mathrm{NSPACE}(f(n))$,

  wobei f alle (oder äquivalent: alle berechenbaren) Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durchläuft



- Die Menge der booleschen (oder aussagenlogischen) Formeln über den Variablen $x_1, \dots, x_n$, $n \geq 0$, ist induktiv wie folgt definiert:
  - Die Konstanten 0 und 1 sind boolesche Formeln
  - Jede Variable x_i ist eine boolesche Formel
  - Mit G und H sind auch die Konjunktion $(G \wedge H)$ und die Disjunktion $(G \vee H)$ von G und H sowie die Negation $\neg G$ von G Formeln
- Eine Belegung von $x_1, \dots, x_n$ ist ein Wort $a = a_1 \dots a_n \in \{0,1\}^n$
- Der Wert $F(a)$ von F unter a ist induktiv wie folgt definiert:

F	0	1	x_i	$\neg G$	$(G \wedge H)$	$(G \vee H)$
$F(a)$	0	1	a_i	$1 - G(a)$	$G(a)H(a)$	$G(a) + H(a) - G(a)H(a)$

- Durch die Formel F wird also eine n-stellige boolesche Funktion $F : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ definiert, die wir ebenfalls mit F bezeichnen

Notation

Wir benutzen die Implikation $G \to H$ als Abkürzung für die Formel $\neg G \vee H$ und die Äquivalenz $G \leftrightarrow H$ als Abkürzung für $(G \to H) \wedge (H \to G)$

Beispiel (Wahrheitswerttabelle)

Die Formel $F = (G \to H)$ mit den Teilformeln

- $G = (x_2 \wedge x_3)$ und
- $H = (\neg x_1 \vee \neg x_2)$

berechnet nebenstehende boolesche Funktion $F : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$.

a	$G(a)$	$H(a)$	$F(a)$
000	0	1	1
001	0	1	1
010	0	1	1
011	1	1	1
100	0	1	1
101	0	1	1
110	0	0	1
111	1	0	0

◁

Aussagenlogische Formeln

Definition

- Zwei Formeln F und G heißen (logisch) äquivalent (kurz $F \equiv G$), wenn sie dieselbe boolesche Funktion berechnen
- Eine Formel F heißt erfüllbar, falls es eine Belegung a mit $F(a) = 1$ gibt
- Gilt sogar für alle Belegungen a, dass $F(a) = 1$ ist, so heißt F Tautologie

Beispiel

- Die Formel $F = (G \to H)$ mit $G = (x_2 \wedge x_3)$ und $H = (\neg x_1 \vee \neg x_2)$ ist erfüllbar, da $F(000) = 1$ ist
- F ist aber keine Tautologie, da $F(111) = 0$ ist $\triangleleft$

Aussagenlogische Formeln

Präzedenzregeln zur Klammerersparnis

- Der Junktor $\wedge$ bindet stärker als der Junktor $\vee$ und dieser wiederum stärker als die Junktoren $\to$ und $\leftrightarrow$
- Formeln der Form $(F_1 \circ (F_2 \circ (F_3 \circ \cdots \circ F_n) \cdots)))$, $\circ \in \{\wedge, \vee\}$, kürzen wir durch $(F_1 \circ \cdots \circ F_n)$ ab und schreiben dafür auch $\bigwedge_{1 \le i \le n} F_i$ bzw. $\bigvee_{1 \le i \le n} F_i$

Beispiel (Formel für die mehrstellige Entweder-Oder Funktion)

- Folgende Formel nimmt unter einer Belegung $a = a_1 \ldots a_n$ genau dann den Wert 1 an, wenn $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ ist:

$$G(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 \vee \cdots \vee x_n) \wedge \bigwedge_{1 \le i < j \le n} \neg(x_i \wedge x_j)$$

- D.h. es gilt genau dann $G(a) = 1$, wenn genau eine Variable x_i mit dem Wert $a_i = 1$ belegt ist
- Diese Formel wird im Beweis des nächsten Satzes benötigt $\lhd$

Das aussagenlogische Erfüllbarkeitsproblem

Erfüllbarkeitsproblem für boolesche Formeln (*satisfiability*, SAT):

Gegeben: Eine boolesche Formel F

Gefragt: Ist F erfüllbar?

- Dabei kodieren wir boolesche Formeln F durch Binärstrings w_F und ordnen umgekehrt jedem Binärstring w eine Formel F_w zu
- Um die Notation zu vereinfachen, werden wir zukünftig jedoch F anstelle von w_F schreiben

Satz (Cook, Karp, Levin)

SAT ist NP-vollständig

SAT ist NP-vollständig

Sat $\in$ NP

Eine NTM kann bei Eingabe einer booleschen Formel F zunächst eine Belegung a nichtdeterministisch raten und dann in Polynomialzeit testen, ob $F(a) = 1$ ist (*guess and verify* Strategie)

Sat ist NP-hart

- Sei L eine beliebige NP-Sprache und sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0)$ eine durch ein Polynom p zeitbeschränkte k-NTM mit $L(M) = L$
- Da sich jede $t(n)$-zeitbeschränkte k-NTM in Zeit $O(t^2(n))$ durch eine 1-NTM simulieren lässt, können wir $k = 1$ annehmen
- Zudem können wir $Z = \{q_0, \dots, q_m\}$, $E = \{q_m\}$ und $\Gamma = \{a_1, \dots, a_l\}$ sowie $\delta(q_m, a) = \{(q_m, a, N)\}$ für alle $a \in \Gamma$ annehmen
- Unsere Aufgabe besteht nun darin, zu jedem Wort $w = w_1 \dots w_n \in \Sigma^*$ eine Formel F_w mit folgenden Eigenschaften zu konstruieren:
  - $w \in L(M) \iff F_w \in \text{Sat}$
  - die Reduktionsfunktion $w \mapsto F_w$ ist in FP berechenbar

SAT ist NP-hart

Idee:

Konstruiere F_w so, dass F_w unter einer Belegung a genau dann wahr wird, wenn a eine akzeptierende Rechnung von $M(w)$ beschreibt

- Wir bilden F_w über den Variablen

$$\begin{array}{ll} x_{t,i}, & \text{für } 0 \le t \le p(n), 0 \le i \le m \\ y_{t,j}, & \text{für } 0 \le t \le p(n), -p(n) \le j \le p(n) \\ z_{t,j,a}, & \text{für } 0 \le t \le p(n), -p(n) \le j \le p(n), a \in \Gamma \end{array}$$

- Diese Variablen stehen für folgende Aussagen:

$x_{t,i}$: zum Zeitpunkt t befindet sich M im Zustand q_i

$y_{t,j}$: zur Zeit t besucht M das Feld mit der Nummer j

$z_{t,j,a}$: zur Zeit t steht das Zeichen a auf dem Feld mit der Nr. j

- Konkret sei $F_w = R \wedge S_w \wedge \ddot{U}_1 \wedge \ddot{U}_2 \wedge E$

SAT ist NP-hart

- Konkret sei $F_w = R \wedge S_w \wedge \ddot{U}_1 \wedge \ddot{U}_2 \wedge E$
- Dabei stellt die Formel $R = \bigwedge_{t=0}^{p(n)} R_t$ (Randbedingungen) sicher, dass wir jeder erfüllenden Belegung von F_w eindeutig eine Folge von Konfigurationen $K_0, \ldots, K_{p(n)}$ zuordnen können:

$$R_t = G(x_{t,0}, \ldots, x_{t,m}) \wedge G(y_{t,-p(n)}, \ldots, y_{t,p(n)}) \\ \wedge \bigwedge_{j=-p(n)}^{p(n)} G(z_{t,j,a_1}, \ldots, z_{t,j,a_l})$$

- Die Teilformel R_t sorgt also dafür, dass zum Zeitpunkt t
  - genau ein Zustand $q_i \in Z$ eingenommen wird
  - genau ein Bandfeld $j \in \{-p(n), \ldots, p(n)\}$ besucht wird und
  - auf jedem Feld j genau ein Zeichen $a_k \in \Gamma = \{a_1, \ldots, a_l\}$ steht

Sat ist NP-hart

- Die Formel S_w (wie Startbedingung) stellt sicher, dass zum Zeitpunkt 0 tatsächlich die Startkonfiguration vorliegt:

$-p(n)$		-1	0		$n-1$	n		$p(n)$
$\sqcup$	$\dots$	$\sqcup$	w_1	$\dots$	w_n	$\sqcup$	$\dots$	$\sqcup$
			$\uparrow$ q_0					

$$S_w = x_{0,0} \wedge y_{0,0} \wedge \bigwedge_{j=-p(n)}^{-1} z_{0,j,\sqcup} \wedge \bigwedge_{j=0}^{n-1} z_{0,j,w_{j+1}} \wedge \bigwedge_{j=n}^{p(n)} z_{0,j,\sqcup}$$

- Die Formel $\ddot{U}_1$ sorgt dafür, dass der Inhalt von nicht besuchten Feldern beim Übergang von K_t zu K_{t+1} unverändert bleibt:

$$\ddot{U}_1 = \bigwedge_{t=0}^{p(n)-1} \bigwedge_{j=-p(n)}^{p(n)} \bigwedge_{a\in\Gamma} \left(\neg y_{t,j} \wedge z_{t,j,a} \rightarrow z_{t+1,j,a}\right)$$

SAT ist NP-hart

- $\ddot{U}_2$ achtet darauf, dass sich bei jedem Rechenschritt der Zustand, die Kopfposition und das gerade gelesene Zeichen gemäß einer Anweisung in δ verändern:

$$\ddot{U}_2 = \bigwedge_{t=0}^{p(n)-1} \bigwedge_{j=-p(n)}^{p(n)} \bigwedge_{a\in\Gamma} \bigwedge_{i=0}^{m} \Big(x_{t,i} \wedge y_{t,j} \wedge z_{t,j,a} \to \bigvee_{(q_{i'},a',D)\,\in\,\delta(q_i,a)} x_{t+1,i'} \wedge y_{t+1,j+D} \wedge z_{t+1,j,a'} \Big),$$

  wobei

$$j + D = \begin{cases} j-1, & D = L \\ j, & D = N \\ j+1, & D = R \end{cases}$$

- Schließlich überprüft E, ob $M(w)$ nach (spätestens) $p(n)$ Schritten den Endzustand q_m erreicht hat:

$$E = x_{p(n),m}$$

$\textsc{Sat}$ ist NP-hart

- Da der Aufbau der Formel $f(w) = F_w$ einem einfachen Bildungsgesetz folgt und ihre Länge polynomiell in n ist, folgt $f \in \mathrm{FP}$
- Es ist klar, dass F_w im Fall $w \in L(M)$ erfüllbar ist, indem wir die Variablen von F_w gemäß einer akz. Rechnung von $M(w)$ belegen
- Umgekehrt führt eine Belegung a mit $F_w(a) = 1$ wegen $R(a) = 1$ eindeutig auf eine Konfigurationenfolge $K_0, \ldots, K_{p(n)}$
- Für diese gilt:
  - K_0 ist Startkonfiguration von $M(w)$ (wegen $S_w(a) = 1$)
  - $K_i \vdash K_{i+1}$ für $i = 0, \ldots, p(n) - 1$ (wegen $\ddot{U}_1(a) = \ddot{U}_2(a) = 1$)
  - der Zustand von $K_{p(n)}$ ist m (wegen $E(a) = 1$)
- Also gilt für alle $w \in \Sigma^*$ die Äquivalenz

$$w \in L(M) \Leftrightarrow F_w \in \textsc{Sat},$$

d.h. die FP-Funktion $f : w \mapsto F_w$ reduziert $L(M)$ auf $\textsc{Sat}$ □

Boolesche Schaltkreise

Als nächstes betrachten wir das Erfüllbarkeitsproblem für Schaltkreise

Definition

- Ein boolescher Schaltkreis über den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ ist eine Folge $S = (g_1, \ldots, g_m)$ von Gattern

$$g_l \in \{0, 1, x_1, \ldots, x_n, (\neg, j), (\wedge, j, k), (\vee, j, k)\} \text{ mit } 1 \le j, k < l$$

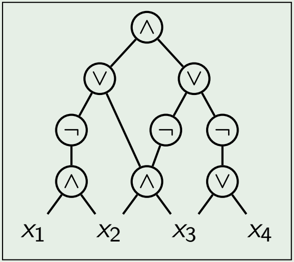
- Jedes Gatter g_l berechnet eine n-stellige boolesche Funktion $g_l\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$
- Für $a = a_1 \ldots a_n \in \{0,1\}^n$ ist $g_l(a)$ induktiv wie folgt definiert:

g_l	0	1	x_i	$(\neg, j)$	$(\wedge, j, k)$	$(\vee, j, k)$
$g_l(a)$	0	1	a_i	$1 - g_j(a)$	$g_j(a)g_k(a)$	$g_j(a) + g_k(a) - g_j(a)g_k(a)$

- S berechnet die boolesche Funktion $S(a) = g_m(a)$
- S heißt erfüllbar, wenn eine Eingabe $a \in \{0,1\}^n$ ex. mit $S(a) = 1$

Boolesche Schaltkreise

Beispiel



Graphische Darstellung des Schaltkreises $S = (x_1, x_2, x_3, x_4, (\wedge, 1, 2), (\wedge, 2, 3), (\vee, 3, 4), (\neg, 5), (\neg, 6), (\neg, 7), (\vee, 6, 8), (\vee, 9, 10), (\wedge, 11, 12))$.

Bemerkung

- Die Anzahl der Eingänge eines Gatters g wird als Fanin von g bezeichnet
- die Anzahl der Ausgänge von g (also die Anzahl der Gatter, die g als Eingabe benutzen) als Fanout
- Boolesche Formeln entsprechen also genau den booleschen Schaltkreisen $S = (g_1, \ldots, g_m)$, bei denen jedes Gatter g_i, $1 \leq i \leq m - 1$, Fanout 1 hat
- Eine boolesche Formel F kann somit leicht in einen äquivalenten Schaltkreis S mit $S(a) = F(a)$ für alle Belegungen a transformiert werden

Das Erfüllbarkeitsproblem für boolesche Schaltkreise

Erfüllbarkeitsproblem für boolesche Schaltkreise ($\textsc{CirSat}$):

Gegeben: Ein boolescher Schaltkreis S

Gefragt: Ist S erfüllbar?

Satz

$\textsc{CirSat}$ ist NP-vollständig

Beweis

Klar, da $\textsc{Sat} \leq^p \textsc{CirSat}$ und $\textsc{CirSat} \in \text{NP}$ gilt. □

Bemerkung

- Da $\textsc{Sat}$ NP-vollständig ist, ist auch $\textsc{CirSat}$ auf $\textsc{Sat}$ reduzierbar
- Dies bedeutet, dass sich jeder Schaltkreis S in Polynomialzeit in eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel F_S überführen lässt
- F_S und S müssen aber nicht logisch äquivalent sein
- $\textsc{CirSat}$ ist sogar auf eine spezielle $\textsc{Sat}$-Variante reduzierbar

Formeln in konjunktiver Normalform (KNF)

- Ein Literal ist eine Variable x_i oder eine negierte Variable $\neg x_i$, die wir auch kurz mit $\bar{x}_i$ bezeichnen
- Eine Klausel ist eine Disjunktion $C = \bigvee_{j=1}^{k} l_j$ von Literalen $l_1, \dots, l_k$
- Hierbei ist auch $k = 0$ zulässig, d.h. die leere Klausel repräsentiert die Konstante 0 und wird üblicherweise mit $\square$ bezeichnet
- Eine boolesche Formel F ist in konjunktiver Normalform (kurz KNF), falls $F = \bigwedge_{j=1}^{m} C_j$ eine Konjunktion von Klauseln $C_1, \dots, C_m$ ist
- Auch hier ist $m = 0$ zulässig, wobei die leere Konjunktion die Konstante 1 repräsentiert
- Enthält jede Klausel höchstens k Literale, so heißt F in k-KNF
- Klauseln werden oft als Menge $C = \{l_1, \dots, l_k\}$ ihrer Literale und KNF-Formeln als Menge $F = \{C_1, \dots, C_m\}$ ihrer Klauseln dargestellt
- Enthält F die leere Klausel, so ist F unerfüllbar
- Dagegen ist die leere Formel eine Tautologie

Erfüllbarkeitsproblem für k-KNF Formeln (k-SAT):

Gegeben: Eine boolesche Formel F in k-KNF

Gefragt: Ist F erfüllbar?

Beispiel

- Der 3-KNF Formel $F = (x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)$ entspricht die Klauselmenge $F = \{\{x_1, \bar{x}_2\}, \{\bar{x}_1, x_3\}, \{x_2, \bar{x}_3, x_4\}\}$
- Offenbar ist $F(0000) = 1$, d.h. $F \in$ 3-SAT

Satz

k-SAT ist für $k \leq 2$ in P entscheidbar und für $k \geq 3$ NP-vollständig

3-SAT ist NP-vollständig

Reduktion von CIRSAT auf 3-SAT

- Wir transformieren einen Schaltkreis $S = (g_1, \dots, g_m)$ mit n Eingängen in eine Formel F_S über den Variablen $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$
- F_S enthält die Klausel $\{y_m\}$ und für jedes Gatter g_i die Klauseln einer 3-KNF F_i, die zu folgender Formel G_i äquivalent ist:

Gatter g_i	G_i	Klauseln von F_i
0	$y_i \leftrightarrow 0$	$\{\bar{y}_i\}$
1	$y_i \leftrightarrow 1$	$\{y_i\}$
x_j	$y_i \leftrightarrow x_j$	$\{\bar{y}_i, x_j\}, \{\bar{x}_j, y_i\}$
$(\neg, j)$	$y_i \leftrightarrow \bar{y}_j$	$\{\bar{y}_i, \bar{y}_j\}, \{y_j, y_i\}$
$(\wedge, j, k)$	$y_i \leftrightarrow y_j \wedge y_k$	$\{\bar{y}_i, y_j\}, \{\bar{y}_i, y_k\}, \{\bar{y}_j, \bar{y}_k, y_i\}$
$(\vee, j, k)$	$y_i \leftrightarrow y_j \vee y_k$	$\{\bar{y}_j, y_i\}, \{\bar{y}_k, y_i\}, \{\bar{y}_i, y_j, y_k\}$

3-SAT ist NP-vollständig

Reduktion von CIRSAT auf 3-SAT

- Wir zeigen, dass für alle $a \in \{0,1\}^n$ folgende Äquivalenz gilt:

  $$S(a) = 1 \Leftrightarrow \exists b \in \{0,1\}^m : F_S(ab) = 1$$

- Ist nämlich $a \in \{0,1\}^n$ eine Eingabe mit $S(a) = 1$, so erhalten wir mit

  $$b_i = g_i(a) \text{ für } i = 1, \ldots, m$$

  eine erfüllende Belegung $ab_1 \ldots b_m$ für F_S
- Ist umgekehrt $ab_1 \ldots b_m$ eine erfüllende Belegung für F_S, so muss
  - $b_m = 1$ sein, da $\{y_m\}$ eine Klausel in F_S ist, und
  - durch Induktion über $i = 1, \ldots, m$ folgt

    $$g_i(a) = b_i,$$

  d.h. insbesondere folgt $S(a) = g_m(a) = b_m = 1$

3-Sat ist NP-vollständig

Reduktion von CirSat auf 3-Sat

- Wir wissen bereits, dass für alle $a \in \{0,1\}^n$ die Äquivalenz

$$S(a) = 1 \Leftrightarrow \exists b \in \{0,1\}^m : F_S(ab) = 1$$

  gilt
- Dies bedeutet, dass der Schaltkreis S und die 3-KNF-Formel F_S erfüllbarkeitsäquivalent sind, d.h.

$$S \in \textsc{CirSat} \Leftrightarrow F_S \in 3\text{-}\textsc{Sat}$$

- Da zudem die Reduktionsfunktion $S \mapsto F_S$ in FP berechenbar ist, folgt CirSat $\leq^p$ 3-Sat □

Notation – ungerichtete Graphen

- Ein (ungerichteter) Graph ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei
  - V - eine endliche Menge von Knoten/Ecken und
  - E - die Menge der Kanten ist
- Hierbei gilt

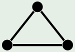
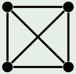
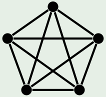
$$E \subseteq \binom{V}{2} := \big\{\{u, v\} \subseteq V \mid u \neq v\big\}$$

- Die Knotenzahl von G ist $n(G) = \|V\|$
- Die Kantenzahl von G ist $m(G) = \|E\|$
- Die Nachbarschaft von $v \in V$ ist $N_G(v) = \{u \in V \mid \{u, v\} \in E\}$ und die Nachbarschaft von $U \subseteq V$ ist $N_G(U) = \bigcup_{u \in U} N_G(u) \setminus U$
- Der Grad von $v \in V$ ist $\deg_G(v) = \|N_G(v)\|$
- Der Minimalgrad von G ist $\delta(G) := \min_{v \in V} \deg_G(v)$ und
- der Maximalgrad von G ist $\Delta(G) := \max_{v \in V} \deg_G(v)$

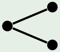
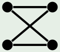
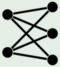
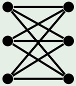
Falls G aus dem Kontext ersichtlich ist, schreiben wir auch einfach n, m, $N(v)$, $\deg(v)$, δ usw

Beispiel

- Der vollständige Graph (V, E) mit $\|V\| = n$ und $E = \binom{V}{2}$ wird mit K_n und der leere Graph $(V, \varnothing)$ wird mit E_n bezeichnet:

  K_1:  K_2:  K_3:  K_4:  K_5: 

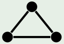
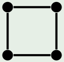
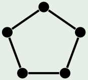
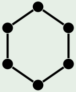
- Der vollständige bipartite Graph (A, B, E) auf $a + b$ Knoten, d.h. $A \cap B = \varnothing$, $\|A\| = a$, $\|B\| = b$ und $E = \{\{u, v\} \mid u \in A, v \in B\}$ wird mit $K_{a,b}$ bezeichnet:

  $K_{1,1}$:  $K_{1,2}$:  $K_{2,2}$:  $K_{2,3}$:  $K_{3,3}$: 

- Der Pfadgraph (oder lineare Graph) mit n Knoten heißt P_n:

  P_2:  P_3:  P_4:  P_5: 

- Der Kreisgraph (kurz Kreis) mit n Knoten heißt C_n:

  C_3:  C_4:  C_5:  C_6: 

Notation – ungerichtete Graphen (Fortsetzung)

- Ein Graph $H = (V', E')$ heißt Sub-/Teil-/Untergraph von $G = (V, E)$, falls $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$ ist
- Ein Weg ist eine Folge von Knoten $v_0, \ldots, v_j$ mit $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ für $i = 0, \ldots, j-1$
- Ein Weg heißt einfach oder Pfad, falls alle durchlaufenen Knoten verschieden sind
- Die Länge des Weges ist die Anzahl der Kanten, also j
- Ein Weg $v_0, \ldots, v_j$ heißt auch v_0-v_j-Weg
- Ein Zyklus ist ein u-v-Weg der Länge $j \geq 2$ mit $u = v$
- Ein Kreis ist ein Zyklus $v_0, v_1 \ldots, v_{j-1}, v_0$ der Länge $j \geq 3$, für den $v_0, v_1, \ldots, v_{j-1}$ paarweise verschieden sind

Cliquen, Stabilität und Matchings

- Eine Knotenmenge $U \subseteq V$ heißt Clique, wenn E alle Kanten enthält, die beide Endpunkte in U haben, d.h. es gilt $\binom{U}{2} \subseteq E$
- Die Cliquenzahl ist

$$\omega(G) = \max\{\|U\| \mid U \text{ ist Clique in } G\}$$

- Eine Knotenmenge $U \subseteq V$ heißt stabil oder unabhängig, wenn keine Kante in G beide Endpunkte in U hat, d.h. es gilt $E \cap \binom{U}{2} = \varnothing$
- Die Stabilitätszahl ist

$$\alpha(G) = \max\{\|U\| \mid U \text{ ist stabile Menge in } G\}$$

- Zwei Kanten $e, e' \in E$ heißen unabhängig, falls $e \cap e' = \varnothing$ ist
- Eine Kantenmenge $M \subseteq E$ heißt Matching in G, falls alle Kanten in M paarweise unabhängig sind
- Die Matchingzahl von G ist

$$\mu(G) = \max\{\|M\| \mid M \text{ ist ein Matching in } G\}$$

Knotenüberdeckungen und Färbungen

- Eine Knotenmenge $U \subseteq V$ heißt Knotenüberdeckung (engl. *vertex cover*), wenn jede Kante $e \in E$ mindestens einen Endpunkt in U hat, d.h. es gilt $e \cap U \neq \varnothing$ für alle Kanten $e \in E$
- Die Überdeckungszahl ist

  $$\beta(G) = \min\{\|U\| \mid U \text{ ist eine Knotenüberdeckung in } G\}$$

- Eine Abbildung $f\colon V \to \mathbb{N}$ heißt Färbung von G, wenn $f(u) \neq f(v)$ für alle $\{u, v\} \in E$ gilt

  G heißt k-färbbar, falls eine Färbung $f\colon V \to \{1, \ldots, k\}$ existiert

  Die chromatische Zahl ist

  $$\chi(G) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ ist } k\text{-färbbar}\}$$

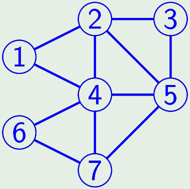
Eulerlinien und -touren

Definition

- Sei $s = (v_0, v_1, \ldots, v_l)$ ein Weg in einem Graphen $G = (V, E)$, d.h. $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ für $i = 0, \ldots, l-1$
- Dann heißt s Eulerlinie (auch Eulerzug oder Eulerweg) in G, falls s jede Kante in E genau einmal durchläuft, d.h. es gilt $l = m(G) = \|E\|$ und
$$\left\{\{v_i, v_{i+1}\} \;\middle|\; i = 0, \ldots, l-1\right\} = E$$
- Ist s zudem ein Zyklus, d.h. es gilt $v_l = v_0$, so heißt s Eulerkreis (auch Eulerzyklus oder Eulertour)

Beispiel (Eulerlinie)

$$s = (4, 1, 2, 3, 5, 7, 6, 4, 5, 2, 4, 7)$$



Gerichtete Eulerlinien

Definition

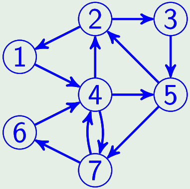
- Sei $s = (v_0, v_1, \ldots, v_l)$ ein gerichteter Weg in einem Digraphen $G = (V, E)$, d.h. $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für $i = 0, \ldots, l - 1$
- Dann heißt s Eulerlinie (auch Eulerzug oder Eulerweg) in G, falls s jede Kante in E genau einmal durchläuft, d.h. es gilt $l = m(G) = \|E\|$ und

$$\left\{(v_i, v_{i+1}) \,\middle|\, i = 0, \ldots, l - 1\right\} = E$$

- Ist s zudem ein Zyklus, d.h. es gilt $v_l = v_0$, so heißt s Eulerkreis (auch Eulerzyklus oder Eulertour)

Beispiel (Eulerkreis in einem Digraphen)

$s = (1, 4, 5, 2, 3, 5, 7, 4, 7, 6, 4, 2, 1)$



Hamiltonpfade und -kreise

Definition

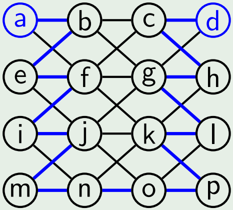
- Sei $s = (v_0, v_1, \ldots, v_l)$ ein Pfad in einem Graphen $G = (V, E)$, d.h. $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ für $i = 0, \ldots, l-1$ und $v_0, \ldots, v_l$ sind paarweise verschieden
- Dann heißt s Hamiltonpfad in G, falls s jeden Knoten in V genau einmal durchläuft, d.h. es gilt $l = n(G) - 1 = \|V\| - 1$ und

  $$V = \{v_0, \ldots, v_l\}$$
- Ist zudem $\{v_0, v_l\} \in E$ und $l \geq 2$, d.h. $s' = (v_0, v_1, \ldots, v_l, v_0)$ ist ein Kreis, so heißt s' Hamiltonkreis

Hamiltonpfade und -kreise

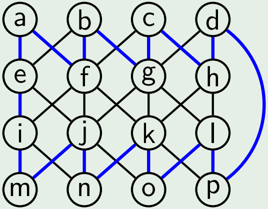
Beispiel (Hamiltonpfad)

$$s = (a, b, e, f, i, j, m, n, o, p, k, l, g, h, c, d)$$



Beispiel (Hamiltonkreis)

$$s = (a, f, b, g, c, h, d, p, l, o, k, n, j, m, i, e, a)$$



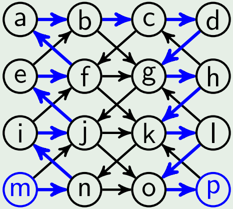
Gerichtete Hamiltonpfade

Definition

- Sei $s = (v_0, v_1, \dots, v_l)$ ein gerichteter Pfad in einem Digraphen $G = (V, E)$, d.h. $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für $i = 0, \dots, l-1$ und $v_0, \dots, v_l$ sind alle verschieden
- Dann heißt s Hamiltonpfad in G, falls s jeden Knoten in V genau einmal durchläuft, d.h. es gilt $V = \{v_0, \dots, v_l\}$
- Ist $s' = (v_0, v_1, \dots, v_l, v_0)$ zudem ein gerichteter Kreis, d.h. $(v_l, v_0) \in E$, so heißt s' Hamiltonkreis

Beispiel (Hamiltonpfad in einem Digraphen)

$s = (m, n, i, j, e, f, a, b, c, d, g, h, k, l, o, p)$



Für einen gegebenen Graphen G und eine Zahl $k \geq 1$ betrachten wir folgende Probleme:

- Clique
  Hat G eine Clique der Größe k?
- Matching
  Hat G ein Matching der Größe k?
- Independent Set (IS)
  Hat G eine stabile Menge der Größe k?
- Vertex Cover (VC)
  Hat G eine Knotenüberdeckung der Größe k?
- Färbbarkeit (Coloring)
  Ist G k-färbbar?

Weitere algorithmische Graphprobleme

Zudem betrachten wir für einen gegebenen Graphen G folgende Probleme:

- k-FÄRBBARKEIT (k-COLORING), $k \geq 1$
  Ist G k-färbbar?
- Das Eulerkreisproblem (EULERCYCLE)
  Hat G einen Eulerkreis?
- Das Hamiltonkreisproblem (HAMCYCLE)
  Hat G einen Hamiltonkreis?

und für einen Graphen G und zwei Knoten s und t folgende Probleme:

- Das Eulerlinienproblem (EULERPATH)
  Hat G eine Eulerlinie von s nach t?
- Das Hamiltonpfadproblem (HAMPATH)
  Hat G einen Hamiltonpfad von s nach t?

Zudem betrachten wir für einen gegebenen Digraphen G folgende Probleme:

- Das gerichtete Eulerkreisproblem (DiEulerCycle)
  Hat G einen Eulerkreis?
- Das gerichtete Hamiltonkreisproblem (DiHamCycle)
  Hat G einen Hamiltonkreis?

und für einen gegebenen Digraphen G und zwei Knoten s und t:

- Das gerichtete Eulerlinienproblem (DiEulerPath)
  Hat G eine Eulerlinie von s nach t?
- Das gerichtete Hamiltonpfadproblem (DiHamPath)
  Hat G einen Hamiltonpfad von s nach t?

Satz

- CLIQUE, IS, VC, COLORING, 3-COLORING, HAMCYCLE, HAMPATH, DIHAMPATH und DIHAMCYCLE sind NP-vollständig
- 2-COLORING, MATCHING, EULERCYCLE, EULERPATH, DIEULERCYCLE und DIEULERPATH sind in P entscheidbar

IS ist NP-vollständig

Reduktion von 3-Sat auf IS

- Sei $F = \{C_1, \ldots, C_m\}$ mit $C_j = \{l_{j,1}, \ldots, l_{j,k_j}\}$ für $j = 1, \ldots, m$ eine 3-KNF-Formel über den Variablen $x_1, \ldots, x_n$
- Betrachte den Graphen $G = (V, E)$ mit

$$V = \{v_{ji} \mid 1 \le j \le m, 1 \le i \le k_j\} \text{ und}$$

$$E = \left\{\{v_{ji}, v_{j'i'}\} \in \binom{V}{2} \middle| j = j' \text{ oder } l_{ji} = \bar{l}_{j'i'} \text{ oder } l_{j'i'} = \bar{l}_{ji}\right\}$$

- Nun gilt

$$\begin{aligned}
F \in 3\text{-Sat} &\Leftrightarrow \text{es gibt eine Belegung, die in jeder Klausel } C_j \text{ (mindestens) ein Literal } l_{j,i_j} \text{ wahr macht}\\
&\Leftrightarrow \text{es gibt } m \text{ Literale } l_{1,i_1}, \ldots, l_{m,i_m}, \text{ die paarweise nicht komplementär sind (d.h. } l_{ji_j} \neq \bar{l}_{j'i_{j'}} \text{ für } j \neq j')\\
&\Leftrightarrow \text{es gibt } m \text{ Knoten } v_{1,i_1}, \ldots, v_{m,i_m}, \text{ die nicht durch Kanten verbunden sind}\\
&\Leftrightarrow G \text{ besitzt eine stabile Menge von } m \text{ Knoten}
\end{aligned}$$

□

CLIQUE ist NP-vollständig

Korollar

CLIQUE ist NP-vollständig

Beweis

- Es ist klar, dass jede Clique in einem Graphen $G = (V, E)$ eine stabile Menge in dem zu G komplementären Graphen $\bar{G} = (V, \bar{E})$ mit $\bar{E} = \binom{V}{2} \setminus E$ ist und umgekehrt
- Daher lässt sich IS mittels

  $$f : (G, k) \mapsto (\bar{G}, k)$$

  auf CLIQUE reduzieren □

VC ist NP-vollständig

Korollar

VC ist NP-vollständig

Beweis

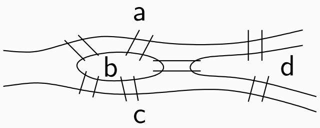
- Offensichtlich ist eine Menge I genau dann stabil, wenn ihr Komplement $V \setminus I$ eine Knotenüberdeckung ist
- Daher lässt sich IS mittels

  $$f : (G, k) \mapsto (G, n(G) - k)$$

  auf VC reduzieren ∎

Das Königsberger Brückenproblem

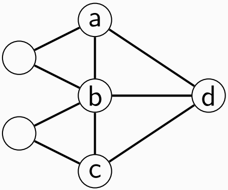
Die 7 Königsberger Brücken



Frage

Gibt es einen Spaziergang über alle 7 Brücken, bei dem keine Brücke mehrmals überquert wird und der zum Ausgangspunkt zurückführt?

Gelöst von Euler (1707 – 1783) durch Betrachtung des folgenden Graphen, der offenbar genau dann einen Eulerkreis hat, wenn die Antwort auf obige Frage „ja“ ist



Satz (Euler, 1736)

Ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ besitzt genau dann einen Eulerkreis, wenn all seine Knoten geraden Grad haben

Eulerkreise und -linien

Satz (Euler, 1736)

Ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ besitzt genau dann einen Eulerkreis, wenn all seine Knoten geraden Grad haben

Beweis

- Falls G einen Eulerkreis s besitzt, existiert zu jeder Kante, auf der s zu einem Knoten gelangt, eine weitere Kante, auf der s den Knoten wieder verlässt
- Daher muss jeder Knoten geraden Grad haben
- Ist umgekehrt G zusammenhängend und hat jeder Knoten geraden Grad, so können wir wie folgt einen Eulerkreis s konstruieren

Eulerkreise und -linien

- Ist umgekehrt G zusammenhängend und hat jeder Knoten geraden Grad, so können wir wie folgt einen Eulerkreis s konstruieren:

Algorithmus zur Berechnung eines Eulerkreises in $G = (V, E)$

1 Wähle $u \in V$ beliebig und initialisiere s zu $s = (u)$
2 Wähle einen beliebigen Knoten u auf dem Weg s, der mit einer unmarkierten Kante verbunden ist
3 Folge ausgehend von u den unmarkierten Kanten auf einem beliebigen Weg z solange wie möglich und markiere dabei jede durchlaufene Kante (da von jedem erreichten Knoten $v \neq u$ ungerade viele markierte Kanten ausgehen, muss der Weg z zum Ausgangspunkt u zurückführen)
4 Füge den Zyklus z an der Stelle u in s ein
5 Wenn noch nicht alle Kanten markiert sind, gehe zu 2
6 **Output**: s

□

Eulerkreise und -linien

Satz (Euler, 1736)

(i) Ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ besitzt im Fall $s \neq t$ genau dann eine Eulerlinie von s nach t, wenn s und t ungeraden und alle übrigen Knoten geraden Grad haben

(ii) Ein stark zusammenhängender Digraph besitzt genau dann einen Eulerkreis, wenn für jeden Knoten u der Eingangs- und der Ausgangsgrad übereinstimmen

Beweis

(i) Da G im Fall $s \neq t$ genau dann eine Eulerlinie von s nach t hat, wenn der Graph $G' = (V \cup \{u_{neu}\}, E \cup \{\{t, u_{neu}\}, \{u_{neu}, s\}\})$ einen Eulerkreis hat, folgt dies aus dem vorigen Satz

(ii) Dies folgt vollkommen analog zum ungerichteten Fall □

Satz

HamPath, HamCycle, DiHamPath und DiHamCycle sind NP-vollständig

Bemerkung

Bevor wir den Satz beweisen, betrachten wir ein weiteres Problem, das mit dem Hamiltonkreisproblem eng verwandt ist und große praktische Bedeutung hat

Das Problem des Handlungsreisenden

- Gegeben sind die Entfernungen d_{ij} zwischen n Städten $i, j \in \{1, \ldots, n\}$
- Gesucht ist eine Rundreise $(i_1, \ldots, i_n)$ mit minimaler Länge $d_{i_1,i_2} + \cdots + d_{i_{n-1},i_n} + d_{i_n,i_1}$, die jede Stadt genau einmal besucht
- Die Entscheidungsvariante dieses Optimierungsproblems ist wie folgt definiert

Problem des Handlungsreisenden (TSP; *traveling salesman problem*)

Gegeben: Eine $n \times n$ Matrix $D = (d_{i,j}) \in \mathbb{N}^{n\times n}$ und eine Zahl k

Gefragt: Existiert eine Permutation $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$, so dass die Rundreise $(\pi(1), \ldots, \pi(n))$ die Länge $\le k$ hat?

Hamiltonkreise, Hamiltonpfade und TSP

Satz

3-Sat $\le^p$ DiHamPath $\le^p$ HamPath $\le^p$ HamCycle $\le^p$ TSP

Reduktion von HamCycle auf TSP

- Sei $G = (V, E)$ ein Graph, wobei wir $V = \{1, \ldots, n\}$ annehmen
- Dann lässt sich G in Polynomialzeit auf die TSP Instanz (D, n) mit $D = (d_{i,j})$ und

$$d_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \{i, j\} \in E, \\ 2, & \text{sonst,} \end{cases}$$

  transformieren
- Diese Reduktion ist korrekt, da G genau dann einen Hamiltonkreis hat, wenn es in dem Distanzgraphen D eine Rundreise $(\pi(1), \ldots, \pi(n))$ der Länge $L(\pi) \le n$ gibt $\square$

Hamiltonkreise, Hamiltonpfade und TSP

Satz

3-SAT $\leq^p$ DIHAMPATH $\leq^p$ HAMPATH $\leq^p$ HAMCYCLE $\leq^p$ TSP

Reduktion von HAMPATH auf HAMCYCLE

- Seien ein Graph $G = (V, E)$ und zwei Knoten $s, t \in V$ gegeben
- Wir transformieren G in den Graphen $G' = (V', E')$ mit

$$V' = V \cup \{u_{\text{neu}}\} \text{ und}$$

$$E' = E \cup \Big\{ \{t, u_{\text{neu}}\}, \{u_{\text{neu}}, s\} \Big\}$$

- Offenbar ist G' in Polynomialzeit aus G berechenbar und besitzt genau dann einen Hamiltonkreis, wenn G einen s-t-Hamiltonpfad besitzt $\square$

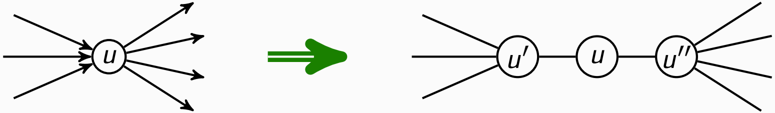
Hamiltonkreise, Hamiltonpfade und TSP

Satz

3-Sat $\leq^p$ DiHamPath $\leq^p$ HamPath $\leq^p$ HamCycle $\leq^p$ TSP

Reduktion von DiHamPath auf HamPath

- Seien ein Digraph $G = (V, E)$ und zwei Knoten $s, t \in V$ gegeben
- Zuerst entfernen wir alle Kanten, die von t ausgehen oder in s enden
- Dann konstruieren wir den Graphen G', indem wir lokal für jeden Knoten $u \in V$ die folgende Ersetzung durchführen:



- Hierbei lassen wir u' (bzw. u'') weg, falls keine Kanten in u enden (bzw. von u ausgehen)
- Dann ist die Funktion $G \mapsto G'$ in FP berechenbar und G enthält genau dann einen Hamiltonpfad von s nach t, wenn dies auf G' zutrifft $\square$

Satz

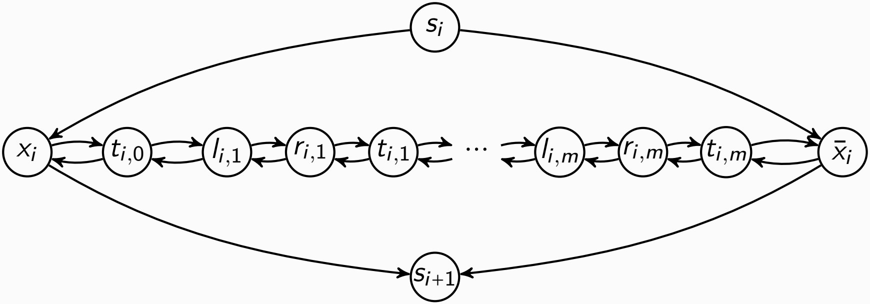
3-SAT $\le^p$ DIHAMPATH $\le^p$ HAMPATH $\le^p$ HAMCYCLE $\le^p$ TSP

Reduktion von 3-SAT auf DIHAMPATH

- Sei $F = \{C_1, \ldots, C_m\}$ mit $C_j = \{l_{j1}, \ldots, l_{jk_j}\}$ für $j = 1, \ldots, m$ eine 3-KNF-Formel über den Variablen $x_1, \ldots, x_n$
- Wir transformieren F in Polynomialzeit in einen gerichteten Graphen $G_F = (V, E)$ mit zwei ausgezeichneten Knoten s und t, der genau dann einen hamiltonschen s-t-Pfad besitzt, wenn F erfüllbar ist
- Jede Klausel C_j repräsentieren wir durch einen Knoten c_j und jede Variable x_i repräsentieren wir durch folgenden Graphen X_i

Reduktion von 3-Sat auf DiHamPath

- Jede Klausel C_j repräsentieren wir durch einen Knoten c_j und jede Variable x_i repräsentieren wir durch folgenden Graphen X_i:



- Ein Pfad von s_1 nach s_{n+1} kann ausgehend von s_i ($i = 1, \ldots, n$) entweder zuerst den Knoten x_i oder zuerst den Knoten $\bar{x}_i$ besuchen
- Daher können wir jedem s_1-s_{n+1}-Pfad P eine Belegung $b_P = b_1 \cdots b_n$ zuordnen mit $b_i = 1$ gdw. P den Knoten x_i vor dem Knoten $\bar{x}_i$ besucht

Reduktion von 3-SAT auf DIHAMPATH

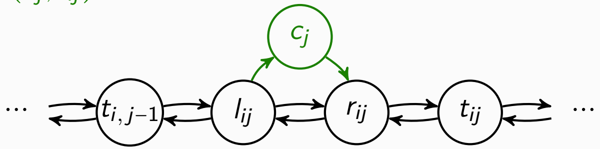
- Die Knotenmenge V von G_F ist also

$$V = \{c_1, \dots, c_m\} \cup \{s_1, \dots, s_{n+1}\} \cup \{x_1, \bar{x}_1, \dots, x_n, \bar{x}_n\} \cup \bigcup_{i=1}^{n} \{t_{i,0}, l_{i,1}, r_{i,1}, t_{i,1}, \cdots, l_{i,m}, r_{i,m}, t_{i,m}\}$$

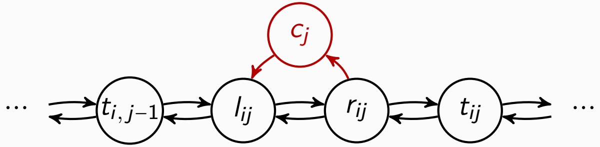
- Dabei haben die Graphen X_{i-1} und X_i den Knoten s_i gemeinsam
- Als Startknoten wählen wir $s = s_1$ und als Zielknoten $t = s_{n+1}$
- Jetzt fehlen nur noch die Verbindungskanten zwischen den Teilgraphen X_i und den Klauselknoten c_j
- Diese Kanten sollen einem s-t-Pfad P genau dann einen Abstecher nach c_j ermöglichen, wenn die zugehörige Belegung b_P mindestens ein Literal l in der Klausel C_j wahr macht

Reduktion von 3-SAT auf DIHAMPATH

- Diese Kanten sollen einem s-t-Pfad P genau dann einen Abstecher nach c_j ermöglichen, wenn die zugehörige Belegung b_P mindestens ein Literal l in der Klausel C_j wahr macht
- Für jedes Literal $l \in C_j$ fügen wir zu E im Fall $l = x_i$ die beiden Kanten (l_{ij}, c_j) und (c_j, r_{ij}),



und im Fall $l = \bar{x}_i$ die Kanten (r_{ij}, c_j) und (c_j, l_{ij}) hinzu:



Reduktion von 3-SAT auf DIHAMPATH

- Zunächst ist klar, dass die Reduktionsfunktion $F \mapsto (G_F, s, t)$ in Polynomialzeit berechenbar ist
- Es bleibt also zu zeigen, dass F genau dann erfüllbar ist, wenn in G_F ein Hamiltonpfad von $s = s_1$ nach $t = s_{n+1}$ existiert
- Falls $F(b) = 1$ ist, so erhalten wir einen Hamiltonpfad, indem wir in jeder Klausel C_j ein wahres Literal $l = x_i$ bzw. $l = \bar{x}_i$ auswählen und in den zu b gehörigen s-t-Pfad P einen „Abstecher" vom Knotenpaar l_{ij}, r_{ij} zum Klauselknoten c_j einbauen
- Ist umgekehrt P ein s-t-Hamiltonpfad in G_F, so müssen der Vorgänger- und Nachfolgerknoten jedes Klauselknotens c_j ein Paar l_{ij}, r_{ij} bilden, da P andernfalls nicht beide Pufferknoten $t_{i,j-1}$ und $t_{i,j}$ besuchen kann
- Da aber P alle Klauselknoten besucht und ausgehend von dem Paar l_{ij}, r_{ij} nur dann ein Abstecher zu c_j möglich ist, wenn die Belegung b_P die Klausel C_j erfüllt, folgt $F(b_P) = 1$ $\square$

Reduktion von 3-SAT auf DIHAMPATH

Beispiel

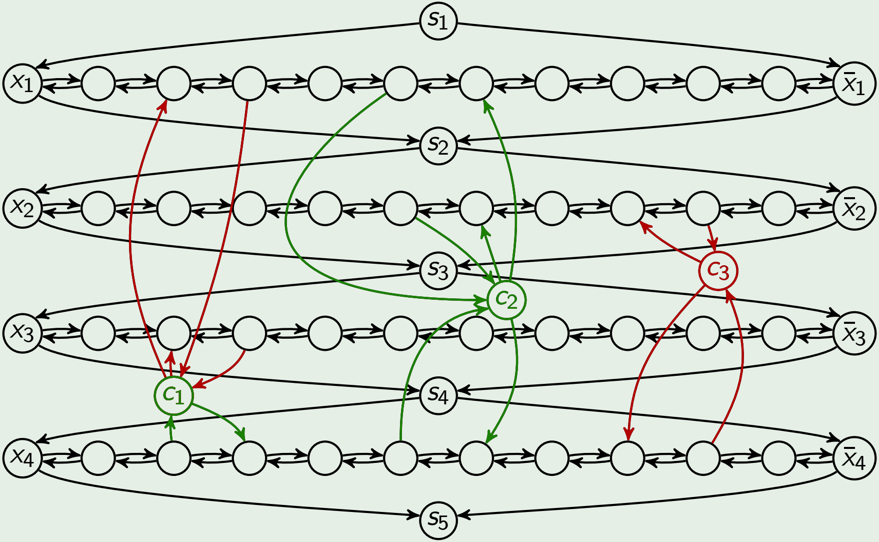
Für die 3-KNF-Formel

$$F = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_4)$$

erhalten wir folgenden Digraphen G mit Startknoten $s = s_1$ und Zielknoten $t = s_5$:

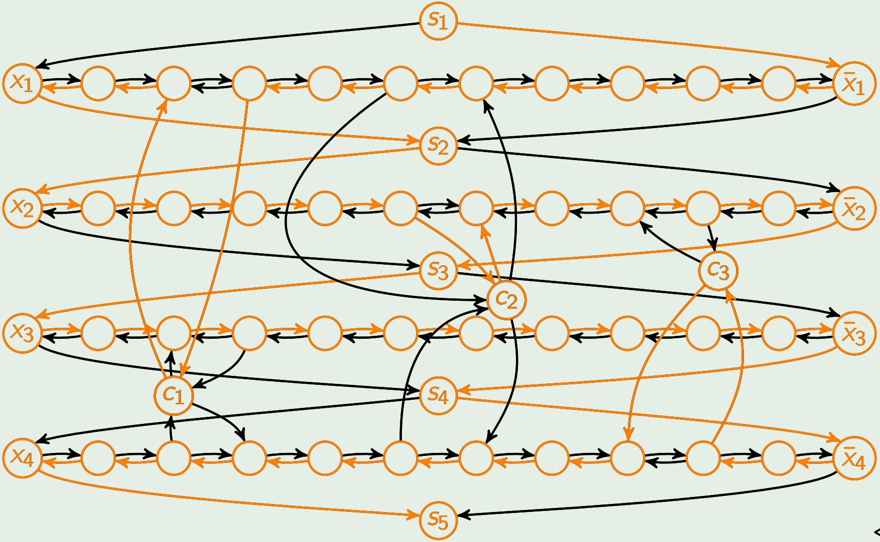
Reduktion von 3-Sat auf DiHamPath

Für $F = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_4)$ erhalten wir folgenden Digraphen G mit Startknoten $s = s_1$ und Zielknoten $t = s_5$:



Reduktion von 3-SAT auf DIHAMPATH

Der Belegung $b = 0110$ von $F = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_4)$ entspricht beispielsweise folgender Hamiltonpfad von s_1 nach s_5:



◁