Einführung in die Theoretische Informatik

Johannes Köbler

Institut für Informatik
Humboldt-Universität zu Berlin

WS 2020/21

Entscheidbare und semi-entscheidbare Sprachen

Definition

- Eine NTM M hält bei Eingabe x (kurz: $M(x) = \downarrow$ oder $M(x)\downarrow$), falls alle Rechnungen von $M(x)$ nach endlich vielen Schritten halten
- Falls $M(x)$ nicht hält, schreiben wir auch kurz $M(x) = \uparrow$ oder $M(x)\uparrow$
- Eine NTM M entscheidet eine Eingabe x, falls $M(x)$ hält oder eine Konfiguration mit einem Endzustand erreicht
- Eine Sprache heißt entscheidbar, falls sie von einer DTM M akzeptiert wird, die alle Eingaben entscheidet. Die zugehörige Sprachklasse ist

$$\mathsf{REC} = \{L(M) \mid M \text{ ist eine DTM, die alle Eingaben entscheidet}\}$$

- Jede von einer DTM akzeptierte Sprache heißt semi-entscheidbar

Bemerkung

- Eine DTM M entscheidet zwar immer alle Eingaben $x \in L(M)$, aber eventuell nicht alle $x \in \overline{L(M)}$. Daher heißt $L(M)$ semi-entscheidbar
- Später werden wir sehen, dass $\mathsf{RE} = \{L(M) \mid M \text{ ist eine DTM}\}$ ist

Berechnung von Funktionen

Definition

- Eine k-DTM $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$ berechnet eine Funktion $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$, falls M bei jeder Eingabe $x \in \Sigma^*$ in einer Konfiguration

$$K = (q, u_1, a_1, v_1, \ldots, u_k, a_k, v_k) \text{ mit } u_k = f(x)$$

  hält (d.h. $K_x \vdash^* K$ und K hat keine Folgekonfiguration)
- Hierfür sagen wir auch, M gibt bei Eingabe x das Wort $f(x)$ aus und schreiben $M(x) = f(x)$
- f heißt Turing-berechenbar (oder einfach berechenbar), falls es eine k-DTM M mit $M(x) = f(x)$ für alle $x \in \Sigma^*$ gibt
- Aus historischen Gründen werden berechenbare Funktionen auch rekursiv (engl. *recursive*) genannt

Berechenbarkeit von charakteristischen Funktionen

Definition

Für eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ ist die charakteristische Funktion $\chi_A : \Sigma^* \to \{0,1\}$ wie folgt definiert:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Bemerkung

- In den Übungen wird gezeigt, dass eine Sprache A genau dann entscheidbar ist, wenn χ_A berechenbar (also rekursiv) ist
- Dies erklärt die Bezeichnung REC für die Klasse der entscheidbaren Sprachen
- Dort wird auch gezeigt, dass CSL echt in REC enthalten ist
- Beispiele für interessante semi-entscheidbare Sprachen, die nicht entscheidbar sind, werden wir noch kennenlernen
- Somit gilt $\mathrm{REG} \subsetneq \mathrm{DCFL} \subsetneq \mathrm{CFL} \subsetneq \mathrm{DCSL} \subseteq \mathrm{CSL} \subsetneq \mathrm{REC} \subsetneq \mathrm{RE}$

Berechenbarkeit von partiellen Funktionen

Definition

- Eine partielle Funktion hat die Form $f : A \to B \cup \{\uparrow\}$, wobei $\uparrow \notin B$ ist
- Für $f(x) = \uparrow$ sagen wir auch $f(x)$ ist undefiniert
- Der Definitionsbereich (engl. *domain*) von f ist

$$dom(f) = \{x \in A \mid f(x) \neq \uparrow\}$$

- Das Bild (engl. *image*) von f ist

$$img(f) = \{f(x) \mid x \in dom(f)\}$$

- Eine partielle Funktion $f : A \to B \cup \{\uparrow\}$ heißt total, falls $dom(f) = A$ ist
- Eine partielle Funktion $f : \Sigma^* \to \Gamma^* \cup \{\uparrow\}$ heißt berechenbar, falls es eine DTM M mit $M(x) = f(x)$ für alle $x \in \Sigma^*$ gibt (d.h. $M(x)$ gibt für alle $x \in dom(f)$ das Wort $f(x)$ aus und hält im Fall $x \notin dom(f)$ nicht)

- Jede DTM $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$ ber. eine part. Fkt. $f : \Sigma^* \to \Gamma^* \cup \{\uparrow\}$
- Die Menge $dom(f) = \{x \in \Sigma^* \mid M(x)\downarrow\}$ bezeichnen wir mit $dom(M)$