Einführung in die Theoretische Informatik

Johannes Köbler

Institut für Informatik
Humboldt-Universität zu Berlin

WS 2020/21

Inhalt der Vorlesung

Themen dieser VL:

- **Welche Rechenmodelle eignen sich zur Lösung welcher algorithmischen Problemstellungen?** **Automatentheorie**
- **Welche algorithmischen Probleme sind überhaupt lösbar?** **Berechenbarkeitstheorie**
- **Welcher Aufwand ist zur Lösung eines geg. algorithmischen Problems nötig?** **Komplexitätstheorie**

Themen der VL Algorithmen und Datenstrukturen:

- Wie lassen sich praktisch relevante Problemstellungen möglichst effizient lösen? Algorithmik

Themen der VL Logik in der Informatik:

- Mathem. Grundlagen der Informatik, Beweise führen, Modellierung Aussagenlogik, Prädikatenlogik

Lernziele

- Überblick über die wichtigsten Rechenmodelle (Automaten) wie z.B.
  - endliche Automaten
  - Kellerautomaten
  - Turingmaschinen
  - Registermaschinen
  - Schaltkreise
- Charakterisierung der Klassen aller mit diesen Rechenmodellen lösbaren Probleme durch
  - unterschiedliche Typen von formalen Grammatiken
  - Abschlusseigenschaften unter geeigneten Sprachoperationen
  - Reduzierbarkeit auf typische Probleme (Vollständigkeit)
- Erkennen von Grenzen der Berechenbarkeit
- Klassifikation wichtiger algorithmischer Probleme nach ihrer Komplexität

Maschinenmodelle

- Rechenmaschinen spielen in der Informatik eine zentrale Rolle
- Es gibt viele unterschiedliche math. Modelle für Rechenmaschinen
- Diese können sich in ihrer Berechnungskraft unterscheiden
- Die Turingmaschine (TM) ist ein universales Berechnungsmodell, da sie alle anderen bekannten Rechenmodelle simulieren kann
- Wir betrachten zunächst Einschränkungen des TM-Modells, die vielfältige praktische Anwendungen haben, wie z.B.
  - endliche Automaten (DFA, NFA)
  - Kellerautomaten (PDA, DPDA) etc.

Der Algorithmenbegriff

- Der Begriff Algorithmus geht auf den persischen Gelehrten Muhammed Al Chwarizmi (8./9. Jhd.) zurück
- Ältester bekannter nicht-trivialer Algorithmus:
  Euklidischer Algorithmus zur Berechnung des ggT (300 v. Chr.)
- Von einem Algorithmus wird erwartet, dass er bei jeder zulässigen Problemeingabe nach endlich vielen Rechenschritten eine korrekte Ausgabe liefert
- Eine wichtige Rolle spielen Entscheidungsprobleme, bei denen jede Eingabe nur mit ja oder nein beantwortet wird
- Die (maximale) Anzahl der Rechenschritte bei allen möglichen Eingaben ist nicht beschränkt, d.h. mit wachsender Eingabelänge kann auch die Rechenzeit beliebig anwachsen
- Die Beschreibung eines Algorithmus muss jedoch endlich sein
- Problemeingaben können Zahlen, Formeln, Graphen etc. sein
- Diese werden über einem Eingabealphabet Σ kodiert

Alphabet, Wort, Sprache

Definition

- Ein Alphabet ist eine endliche linear geordnete Menge

  $$\Sigma = \{a_1, \dots, a_m\}$$

  von $m \geq 1$ Zeichen $a_1 < \cdots < a_m$
- Eine Folge $x = x_1 \dots x_n$ von $n \geq 0$ Zeichen $x_i \in \Sigma$ heißt Wort der Länge n über Σ
- Die Länge von x wird mit $|x|$ und die Menge aller Wörter der Länge n über Σ wird mit Σ^n bezeichnet
- Die Menge aller Wörter über Σ ist

  $$\Sigma^* = \bigcup_{n \geq 0} \Sigma^n = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \cdots$$
- Das (einzige) Wort der Länge $n = 0$ ist das leere Wort, welches wir mit ε bezeichnen, d.h. $\Sigma^0 = \{\varepsilon\}$
- Jede Teilmenge $L \subseteq \Sigma^*$ heißt Sprache über dem Alphabet Σ

Beispiele für Sprachen

Beispiel

- Sprachen über Σ sind beispielsweise $\varnothing, \Sigma^*, \Sigma$ und $\{\varepsilon\}$
- $\varnothing$ enthält keine Wörter und heißt leere Sprache
- Σ^* enthält dagegen alle Wörter über Σ
- Σ enthält alle Wörter über Σ der Länge 1
- $\{\varepsilon\}$ enthält nur das leere Wort, ist also einelementig
- Sprachen, die genau ein Wort enthalten, werden auch als Singletonsprachen bezeichnet
- in der Informatik spielen Programmiersprachen eine wichtige Rolle

Operationen auf Sprachen

- Da Sprachen Mengen sind, können wir sie bzgl. Inklusion vergleichen
- Zum Beispiel gilt $\emptyset \subseteq \{\varepsilon\} \subseteq \Sigma^*$
- Wir können Sprachen auch vereinigen, schneiden und komplementieren
- Seien A und B Sprachen über Σ. Dann ist
  - $A \cap B = \{x \in \Sigma^* \mid x \in A \wedge x \in B\}$ der Schnitt von A und B
  - $A \cup B = \{x \in \Sigma^* \mid x \in A \vee x \in B\}$ die Vereinigung von A und B, und
  - $\overline{A} = \{x \in \Sigma^* \mid x \notin A\}$ das Komplement von A

Konkatenation von Wörtern

Definition

Die Konkatenation von zwei Wörtern $x = x_1 \dots x_n$ und $y = y_1 \dots y_m$ ist das Wort $x \circ y = x_1 \dots x_n y_1 \dots y_m$, das wir auch einfach mit xy bezeichnen

Beispiel

- Für $x = aba$ und $y = abab$ erhalten wir $xy = abaabab$ und $yx = abababa$
- Die Konkatenation ist also nicht kommutativ
- Allerdings ist $\circ$ assoziativ, d.h. es gilt $x(yz) = (xy)z$
  Daher können wir hierfür auch einfach xyz schreiben
- Es gibt auch ein neutrales Element, da $x\varepsilon = \varepsilon x = x$ ist
- Eine algebraische Struktur $(M, \square, e)$ mit einer assoziativen Operation $\square : M \times M \to M$ und einem neutralen Element e heißt Monoid
- $(\Sigma^*, \circ, \varepsilon)$ ist also ein Monoid

Spezielle Sprachoperationen

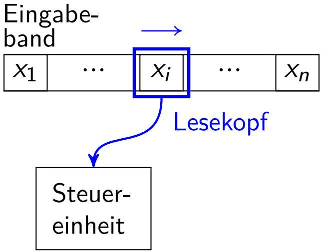
Neben den Mengenoperationen Schnitt, Vereinigung und Komplement gibt es auch spezielle Sprachoperationen

Definition

- Das Produkt (Verkettung, Konkatenation) von zwei Sprachen A und B ist
$$AB = \{xy \mid x \in A, y \in B\}$$
- Ist $A = \{x\}$ eine Singletonsprache, so schreiben wir für $\{x\}B$ auch einfach xB
- Die n-fache Potenz A^n einer Sprache A ist induktiv definiert durch
$$A^n = \begin{cases} \{\varepsilon\}, & n = 0, \\ A^{n-1}A, & n > 0 \end{cases}$$
- Die Sternhülle einer Sprache A ist $A^* = \bigcup_{n\geq 0} A^n$
- Die Plushülle einer Sprache A ist $A^+ = \bigcup_{n\geq 1} A^n = AA^*$

Algorithmische Erkennung von Sprachen

- Ein einfaches Rechenmodell zum Erkennen von Sprachen ist der endliche Automat:



- Ein endlicher Automat
  - nimmt zu jedem Zeitpunkt genau einen von endlich vielen Zuständen an
  - macht bei Eingaben der Länge n genau n Rechenschritte und
  - liest in jedem Schritt genau ein Eingabezeichen

Formale Definition eines endlichen Automaten

Definition

- Ein endlicher Automat (kurz: DFA; *Deterministic Finite Automaton*) wird durch ein 5-Tupel $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ beschrieben, wobei
  - $Z \neq \varnothing$ eine endliche Menge von Zuständen
  - Σ das Eingabealphabet
  - $\delta : Z \times \Sigma \to Z$ die Überführungsfunktion
  - $q_0 \in Z$ der Startzustand und
  - $E \subseteq Z$ die Menge der Endzustände ist
- Die von M akzeptierte (oder erkannte) Sprache ist

$$L(M) = \left\{ x_1 \dots x_n \in \Sigma^* \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{es gibt } q_1, \dots, q_{n-1} \in Z, q_n \in E \text{ mit} \\ \delta(q_i, x_{i+1}) = q_{i+1} \text{ für } i = 0, \dots, n-1 \end{array} \right\}$$

- Eine Zustandsfolge $q_0, q_1, \dots, q_n$ heißt Rechnung von $M(x_1 \dots x_n)$, falls $\delta(q_i, x_{i+1}) = q_{i+1}$ für $i = 0, \dots, n-1$ gilt
- Sie heißt akzeptierend, falls $q_n \in E$ ist, und andernfalls verwerfend

Die Klasse der regulären Sprachen

Frage

Welche Sprachen lassen sich durch endliche Automaten erkennen und welche nicht?

Definition

Eine von einem DFA akzeptierte Sprache wird als regulär bezeichnet. Die zugehörige Sprachklasse ist

$$\mathrm{REG} = \{L(M) \mid M \text{ ist ein DFA}\}$$

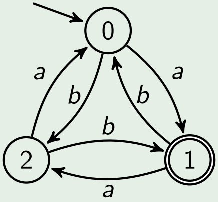
DFAs beherrschen Modulare Arithmetik

Beispiel

Sei $M_3 = (Z, \Sigma, \delta, 0, E)$ ein DFA mit $Z = \{0, 1, 2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $E = \{1\}$ und der Überführungsfunktion

δ	0	1	2
a	1	2	0
b	2	0	1

Graphische Darstellung:



Endzustände werden durch einen doppelten Kreis und der Startzustand wird durch einen Pfeil gekennzeichnet ◁

Frage: Welche Wörter akzeptiert M_3?

- Ist $w_1 = aba \in L(M_3)$? Ja (akzeptierende Rechnung: $0, 1, 0, 1$)
- Ist $w_2 = abba \in L(M_3)$? Nein (verwerfende Rechnung: $0, 1, 0, 2, 0$)

DFAs beherrschen Modulare Arithmetik

Behauptung

Die von M_3 erkannte Sprache ist

$$L(M_3) = \{x \in \{a, b\}^* \mid \#_a(x) - \#_b(x) \equiv_3 1\}, \quad \text{wobei}$$

- $\#_a(x)$ die Anzahl der Vorkommen von a in x bezeichnet und
- $i \equiv_m j$ (in Worten: i ist kongruent zu j modulo m) bedeutet, dass $i - j$ durch m teilbar ist

Beweis der Behauptung durch Induktion über die Länge von x

Wir betrachten zunächst das Erreichbarkeitsproblem für DFAs

Das Erreichbarkeitsproblem für DFAs

Frage

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ ein DFA und sei $x = x_1 \ldots x_n \in \Sigma^*$. Welchen Zustand erreicht M nach Lesen der Eingabe x?

Antwort

- nach 0 Schritten: den Startzustand q_0
- nach 1 Schritt: den Zustand $\delta(q_0, x_1)$
- nach 2 Schritten: den Zustand $\delta(\delta(q_0, x_1), x_2)$

  $\vdots$
- nach n Schritten: den Zustand $\delta(\ldots\delta(\delta(q_0, x_1), x_2), \ldots x_n)$

Das Erreichbarkeitsproblem für DFAs

Definition

- Bezeichne $\hat{\delta}(q,x)$ denjenigen Zustand, in dem sich M nach Lesen von x befindet, wenn M im Zustand q gestartet wird
- Dann können wir die Funktion

  $$\hat{\delta} : Z \times \Sigma^* \to Z$$

  induktiv über die Länge von x wie folgt definieren:
  Für $q \in Z$, $x \in \Sigma^*$ und $a \in \Sigma$ sei

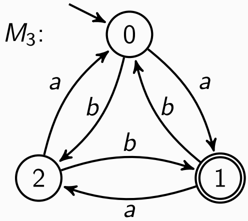
  $$\begin{aligned} \hat{\delta}(q,\varepsilon) &= q, \\ \hat{\delta}(q,xa) &= \delta(\hat{\delta}(q,x),a) \end{aligned}$$

- Die von M erkannte Sprache lässt sich nun elegant durch

  $$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0,x) \in E\}$$

  beschreiben

DFAs beherrschen Modulare Arithmetik



Behauptung

Für alle $x \in \{a, b\}^*$ gilt:

$$x \in L(M_3) \Leftrightarrow \#_a(x) - \#_b(x) \equiv_3 1$$

Beweis

- 1 ist der einzige Endzustand von M
- Daher ist $L(M_3) = \{x \in \{a, b\}^* \mid \hat{\delta}(0, x) = 1\}$
- Obige Behauptung ist also äquivalent zu

  $$\text{für alle } x \in \{a, b\}^* \text{gilt: } \hat{\delta}(0, x) = 1 \Leftrightarrow \#_a(x) - \#_b(x) \equiv_3 1$$

- Folglich reicht es, für alle $x \in \{a, b\}^*$ folgende Kongruenz zu zeigen:

  $$\hat{\delta}(0, x) \equiv_3 \#_a(x) - \#_b(x)$$

DFAs beherrschen Modulare Arithmetik

Induktionsbehauptung: Für alle $x \in \{a,b\}^n$ gilt $\hat{\delta}(0,x) \equiv_3 \#_a(x) - \#_b(x)$

Induktionsanfang ($n = 0$): klar, da $\hat{\delta}(0,\varepsilon) = \#_a(\varepsilon) = \#_b(\varepsilon) = 0$ ist

Induktionsschritt ($n \rightsquigarrow n+1$): Sei $x = x_1 \dots x_{n+1} \in \{a,b\}^{n+1}$ gegeben

- Nach Induktionsvoraussetzung (IV) gilt für $x' = x_1 \dots x_n$:

$$\hat{\delta}(0,x') \equiv_3 \#_a(x') - \#_b(x')$$

- Zudem gilt für alle $i \in Z = \{0,1,2\}$:

$$\begin{aligned} \delta(i, x_{n+1}) &\equiv_3 \begin{cases} i+1, & x_{n+1} = a \\ i-1, & x_{n+1} = b \end{cases} \\ &= i + \#_a(x_{n+1}) - \#_b(x_{n+1}) && (*) \end{aligned}$$

- Somit folgt

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(0,x) &= \delta(\hat{\delta}(0,x'), x_{n+1}) \\ &\equiv_3 \hat{\delta}(0,x') + \#_a(x_{n+1}) - \#_b(x_{n+1}) && (*) \\ &\equiv_3 \#_a(x') - \#_b(x') + \#_a(x_{n+1}) - \#_b(x_{n+1}) && (IV) \\ &\equiv_3 \#_a(x) - \#_b(x) \end{aligned}$$

□

Singletonsprachen sind regulär

Vereinbarung

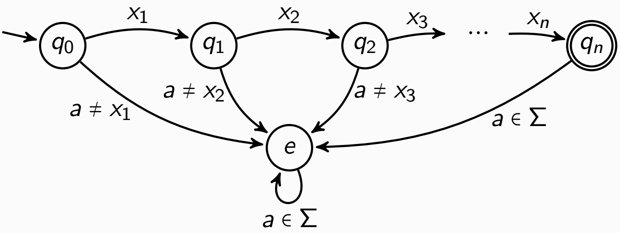
Für das Folgende sei $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_m\}$ ein fest gewähltes Alphabet

Beobachtung 1

Alle Sprachen, die nur ein Wort $x = x_1 \ldots x_n \in \Sigma^*$ enthalten, sind regulär

Beweis

Folgender DFA M erkennt die Sprache $L(M) = \{x\}$:



□

REG ist unter Komplement abgeschlossen

Beobachtung 2

Ist $L \in \mathrm{REG}$, so ist auch die Sprache $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$ regulär

Beweis

- Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ ein DFA mit $L(M) = L$
- Dann wird das Komplement $\overline{L}$ von L von dem DFA $\overline{M} = (Z, \Sigma, \delta, q_0, Z \setminus E)$ akzeptiert

$\square$

Definition

Für eine Sprachklasse $\mathcal{C}$ bezeichne *co*-$\mathcal{C}$ die Klasse $\{\overline{L} \mid L \in \mathcal{C}\}$ aller Komplemente von Sprachen in $\mathcal{C}$

Korollar

co-REG = REG

REG ist unter Schnitt abgeschlossen

Beobachtung 3

Sind $L_1, L_2 \in \text{REG}$, so ist auch die Sprache $L_1 \cap L_2$ regulär

Beweis

- Seien $M_i = (Z_i, \Sigma, \delta_i, q_i, E_i)$, $i = 1, 2$, DFAs mit $L(M_i) = L_i$.
- Dann wird der Schnitt $L_1 \cap L_2$ von dem DFA

  $$M = (Z_1 \times Z_2, \Sigma, \delta, (q_1, q_2), E_1 \times E_2)$$

  mit

  $$\delta((p, q), a) = (\delta_1(p, a), \delta_2(q, a))$$

  erkannt
- M wird auch als Kreuzproduktautomat bezeichnet

□

REG ist unter Vereinigung abgeschlossen

Beobachtung 4

Die Vereinigung $L_1 \cup L_2$ von regulären Sprachen L_1 und L_2 ist regulär

Beweis

Es gilt $L_1 \cup L_2 = \overline{(\overline{L_1} \cap \overline{L_2})}$ $\square$

Frage

Wie sieht der zugehörige DFA aus?

Antwort

$$M' = (Z_1 \times Z_2, \Sigma, \delta, (q_1, q_2), (E_1 \times Z_2) \cup (Z_1 \times E_2))$$

Abschlusseigenschaften von Sprachklassen

Definition

- Ein (k-stelliger) Sprachoperator ist eine Abbildung *op*, die k Sprachen $L_1, \dots, L_k$ auf eine Sprache $op(L_1, \dots, L_k)$ abbildet
- Eine Sprachklasse $\mathcal{K}$ heißt unter *op* abgeschlossen, wenn gilt:

  $$L_1, \dots, L_k \in \mathcal{K} \Rightarrow op(L_1, \dots, L_k) \in \mathcal{K}$$

- Der Abschluss von $\mathcal{K}$ unter *op* ist die (bzgl. Inklusion) kleinste Sprachklasse $\mathcal{K}'$, die $\mathcal{K}$ enthält und unter *op* abgeschlossen ist

Beispiel

- Der 2-stellige Schnittoperator $\cap$ bildet L_1 und L_2 auf $L_1 \cap L_2$ ab
- Der Abschluss der Singletonsprachen unter $\cap$ besteht aus allen Singletonsprachen und der leeren Sprache
- Der Abschluss der Singletonsprachen unter $\cup$ besteht aus allen nichtleeren endlichen Sprachen
- Der Abschluss der Singletonsprachen unter $\cap$, $\cup$ und Komplement besteht aus allen endlichen und co-endlichen Sprachen $\triangleleft$

REG ist unter Mengenoperationen abgeschlossen

Korollar

Die Klasse REG der regulären Sprachen ist unter folgenden Operationen abgeschlossen:

- Komplement
- Schnitt
- Vereinigung

Wie umfangreich ist REG?

Folgerung

- Aus den Beobachtungen folgt, dass alle endlichen und alle co-endlichen Sprachen regulär sind
- Da die reguläre Sprache

$$L(M_3) = \{x \in \{a,b\}^* \mid \#_a(x) - \#_b(x) \equiv_3 1\}$$

weder endlich noch co-endlich ist, haben wir damit allerdings noch nicht alle regulären Sprachen erfasst

Wie umfangreich ist REG?

Nächstes Ziel

Zeige, dass REG unter Produktbildung und Sternhülle abgeschlossen ist

Problem

Bei der Konstruktion eines DFA M für das Produkt $L(M_1)L(M_2)$ bereitet es Schwierigkeiten, den richtigen Zeitpunkt für das Ende der Simulation des DFA M_1 und den Start der Simulation des DFA M_2 zu finden

Lösungsidee

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat (NFA) kann den richtigen Zeitpunkt „raten“

Verbleibendes Problem

Zeige, dass auch NFAs nur reguläre Sprachen erkennen

Nichtdeterministische endliche Automaten

Definition

- Ein nichtdet. endl. Automat (kurz: NFA; *Nondet. Finite Automaton*)

$$N = (Z, \Sigma, \Delta, Q_0, E)$$

  ist genau so aufgebaut wie ein DFA, nur dass er
  - eine Menge $Q_0 \subseteq Z$ von Startzuständen hat und
  - die Überführungsfunktion folgende Form hat

$$\Delta : Z \times \Sigma \to \mathcal{P}(Z)$$

  Hierbei bezeichnet $\mathcal{P}(Z)$ die Potenzmenge (also die Menge aller Teilmengen) von Z; diese wird oft auch mit 2^Z bezeichnet
- Die von einem NFA N akzeptierte (oder erkannte) Sprache ist

$$L(N) = \left\{ x_1 \dots x_n \in \Sigma^* \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{es gibt } q_0 \in Q_0, q_1, \dots, q_{n-1} \in Z, q_n \in E \\ \text{mit } q_{i+1} \in \Delta(q_i, x_{i+1}) \text{ für } i = 0, \dots, n-1 \end{array} \right\}$$

- Eine Zustandsfolge $q_0, \dots, q_n$ heißt Rechnung von $N(x_1 \dots x_n)$, falls $q_0 \in Q_0$ und $q_{i+1} \in \Delta(q_i, x_{i+1})$ für $i = 0, \dots, n-1$ gilt

Eigenschaften von NFAs

- Ein NFA N kann bei einer Eingabe x also nicht nur eine, sondern mehrere verschiedene Rechnungen parallel ausführen
- Ein Wort x gehört genau dann zu $L(N)$, wenn $N(x)$ mindestens eine akzeptierende Rechnung hat
- Im Gegensatz zu einem DFA, der jede Eingabe zu Ende liest, kann ein NFA N „stecken bleiben“
- Dieser Fall tritt ein, wenn N in einen Zustand q gelangt, in dem er das nächste Eingabezeichen x_i wegen

  $$\Delta(q, x_i) = \varnothing$$

  nicht verarbeiten kann

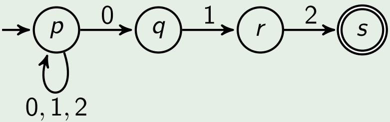
Eigenschaften von NFAs

Beispiel

- Betrachte den NFA $N = (Z, \Sigma, \Delta, Q_0, E)$ mit $Z = \{p, q, r, s\}$, $\Sigma = \{0, 1, 2\}$, $Q_0 = \{p\}$, $E = \{s\}$ und der Überführungsfunktion

Δ	p	q	r	s
0	$\{p, q\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
1	$\{p\}$	$\{r\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
2	$\{p\}$	$\varnothing$	$\{s\}$	$\varnothing$

Graphische Darstellung:



- Ist $w_1 = 012 \in L(N)$? Ja (akzeptierende Rechnung: p, q, r, s)
  Es gibt aber auch verwerfende Rechnungen bei Eingabe w_1: p, p, p, p
- Ist $w_2 = 021 \in L(N)$? Nein, da es keine akzeptierende Rechnung gibt
- Es gilt $L(N) = \{x012 \mid x \in \Sigma^*\}$ ◁

Ein NFA für das Produkt von regulären Sprachen

Beobachtung 5

Seien $N_i = (Z_i, \Sigma, \Delta_i, Q_i, E_i)$ NFAs mit $L(N_i) = L_i$ für $i = 1, 2$. Dann wird auch das Produkt $L_1 L_2$ von einem NFA erkannt

Beweis

- Wir können $Z_1 \cap Z_2 = \varnothing$ annehmen
- Dann gilt $L(N) = L_1 L_2$ für den NFA $N = (Z_1 \cup Z_2, \Sigma, \Delta, Q_1, E)$ mit

$$\Delta(p, a) = \begin{cases} \Delta_1(p, a), & p \in Z_1 \setminus E_1, \\ \Delta_1(p, a) \cup \bigcup_{q \in Q_2} \Delta_2(q, a), & p \in E_1, \\ \Delta_2(p, a), & p \in Z_2 \end{cases}$$

und

$$E = \begin{cases} E_2, & Q_2 \cap E_2 = \varnothing, \\ E_1 \cup E_2, & \text{sonst} \end{cases}$$

Ein NFA für das Produkt von regulären Sprachen

- Dann gilt $L(N) = L_1 L_2$ für den NFA $N = (Z_1 \cup Z_2, \Sigma, \Delta, Q_1, E)$ mit

$$\Delta(p,a) = \begin{cases} \Delta_1(p,a), & p \in Z_1 \setminus E_1, \\ \Delta_1(p,a) \cup \bigcup_{q \in Q_2} \Delta_2(q,a), & p \in E_1, \\ \Delta_2(p,a), & p \in Z_2 \end{cases}$$

  und $E = E_2$, falls $Q_2 \cap E_2 = \varnothing$, bzw. $E = E_1 \cup E_2$ sonst

Beweis von $L_1 L_2 \subseteq L(N)$:

Seien $x = x_1 \cdots x_k \in L_1, y = y_1 \cdots y_l \in L_2$ und seien $q_0, \ldots, q_k$ und $p_0, \ldots, p_l$ akzeptierende Rechnungen von $N_1(x)$ und $N_2(y)$

Dann ist $q_0, \ldots, q_k, p_1, \ldots, p_l$ eine akz. Rechnung von $N(xy)$, da

- $q_0 \in Q_1$ und $p_l \in E_2$ ist, und
- im Fall $l \geq 1$ wegen $q_k \in E_1$, $p_0 \in Q_2$ und $p_1 \in \Delta_2(p_0, y_1)$ zudem $p_1 \in \Delta(q_k, y_1)$ und
- im Fall $l = 0$ wegen $q_k \in E_1$ und $p_l \in Q_2 \cap E_2$ zudem $q_k \in E$ ist

Ein NFA für das Produkt von regulären Sprachen

- Dann gilt $L(N) = L_1L_2$ für den NFA $N = (Z_1 \cup Z_2, \Sigma, \Delta, Q_1, E)$ mit

$$\Delta(p,a) = \begin{cases} \Delta_1(p,a), & p \in Z_1 \setminus E_1, \\ \Delta_1(p,a) \cup \bigcup_{q \in Q_2} \Delta_2(q,a), & p \in E_1, \\ \Delta_2(p,a), & p \in Z_2 \end{cases}$$

und $E = E_2$, falls $Q_2 \cap E_2 = \varnothing$, bzw. $E = E_1 \cup E_2$ sonst

Beweis von $L(N) \subseteq L_1L_2$:

Sei $x = x_1 \cdots x_n \in L(N)$ und sei $q_0, \ldots, q_n$ eine akz. Rechnung von $N(x)$

Dann gilt $q_0 \in Q_1$, $q_n \in E$, $q_0, \ldots, q_i \in Z_1$ und $q_{i+1}, \ldots, q_n \in Z_2$ für ein $i \leq n$

Wir zeigen, dass $q_0, \ldots, q_i$ eine akz. Rechnung von $N_1(x_1 \cdots x_i)$ und $q, q_{i+1}, \ldots, q_n$ für ein $q \in Q_2$ eine akz. Rechnung von $N_2(x_{i+1} \cdots x_n)$ ist:

- Im Fall $i < n$ impliziert der Übergang $q_{i+1} \in \Delta(q_i, x_{i+1})$, dass $q_i \in E_1$ und $q_{i+1} \in \Delta_2(q, x_{i+1})$ für ein $q \in Q_2$ ist. Zudem ist $q_n \in E \cap Z_2 = E_2$
- Im Fall $i = n$ ist $q_n \in E \cap Z_1$, was $q_n \in E_1$ und $Q_2 \cap E_2 \neq \varnothing$ impliziert □

Ein NFA für die Sternhülle einer regulären Sprache

Beobachtung 6

Ist $N = (Z, \Sigma, \Delta, Q_0, E)$ ein NFA, so wird auch die Sprache $L(N)^*$ von einem NFA erkannt

Beweis

Die Sprache $L(N)^*$ wird von dem NFA

$$N' = (Z \cup \{q_{neu}\}, \Sigma, \Delta', Q_0 \cup \{q_{neu}\}, E \cup \{q_{neu}\})$$

mit

$$\Delta'(p,a) = \begin{cases} \Delta(p,a), & p \in Z \setminus E, \\ \Delta(p,a) \cup \bigcup_{q \in Q_0} \Delta(q,a), & p \in E, \\ \emptyset, & p = q_{neu} \end{cases}$$

erkannt

$\square$

Überblick

Ziel

Zeige, dass REG unter Produktbildung und Sternhülle abgeschlossen ist

Problem

Bei der Konstruktion eines DFA für das Produkt $L_1 L_2$ bereitet es Schwierigkeiten, den richtigen Zeitpunkt für den Übergang von (der Simulation von) M_1 zu M_2 zu finden

Lösungsidee (bereits umgesetzt)

Ein nichtdeterministischer Automat (NFA) kann den richtigen Zeitpunkt für den Übergang „raten“

Noch zu zeigen

NFAs erkennen genau die regulären Sprachen

NFAs erkennen genau die regulären Sprachen

Satz (Rabin und Scott)

$\mathrm{REG} = \{L(N) \mid N \text{ ist ein NFA}\}$

Beweis von $\mathrm{REG} \subseteq \{L(N) \mid N \text{ ist ein NFA}\}$

Diese Inklusion ist klar, da jeder DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ in einen äquivalenten NFA

$$N = (Z, \Sigma, \Delta, Q_0, E)$$

transformiert werden kann, indem wir $\Delta(q, a) = \{\delta(q, a)\}$ und $Q_0 = \{q_0\}$ setzen. $\square$

Für die umgekehrte Inklusion ist das Erreichbarkeitsproblem für NFAs von zentraler Bedeutung

Das Erreichbarkeitsproblem für NFAs

Frage

Sei $N = (Z, \Sigma, \Delta, Q_0, E)$ ein NFA und sei $x = x_1 \ldots x_n$ eine Eingabe. Welche Zustände sind in i Schritten erreichbar?

Antwort

- in 0 Schritten: alle Zustände in Q_0
- in einem Schritt: alle Zustände in

$$Q_1 = \bigcup_{q \in Q_0} \Delta(q, x_1)$$

- in i Schritten: alle Zustände in

$$Q_i = \bigcup_{q \in Q_{i-1}} \Delta(q, x_i)$$

Simulation von NFAs durch DFAs

Idee

- Wir können einen NFA $N = (Z, \Sigma, \Delta, Q_0, E)$ durch einen DFA $M = (Z', \Sigma, \delta, q_0', E')$ simulieren, der in seinem Zustand die Information speichert, in welchen Zuständen sich N momentan befinden könnte
- Die Zustände von M sind also Teilmengen Q von Z (d.h. $Z' = \mathcal{P}(Z)$) mit Q_0 als Startzustand (d.h. $q_0' = Q_0$) und der Endzustandsmenge

  $$E' = \{Q \subseteq Z \mid Q \cap E \neq \varnothing\}$$

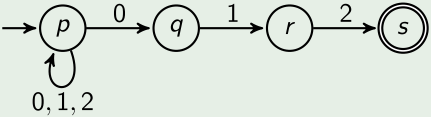
- Die Überführungsfunktion $\delta : \mathcal{P}(Z) \times \Sigma \to \mathcal{P}(Z)$ von M berechnet dann für einen Zustand $Q \subseteq Z$ und ein Zeichen $a \in \Sigma$ die Menge

  $$\delta(Q, a) = \bigcup_{q \in Q} \Delta(q, a)$$

  aller Zustände, in die N gelangen kann, wenn N ausgehend von einem beliebigen Zustand $q \in Q$ das Zeichen a liest
- M wird auch als der zu N gehörige Potenzmengenautomat bezeichnet

Beispiel

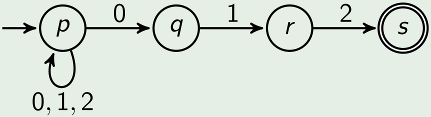
- Betrachte den NFA N



Simulation von NFAs durch DFAs

Beispiel

- Betrachte den NFA N

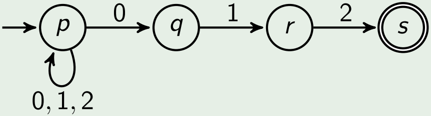


- Ausgehend von $Q_0 = \{p\}$ liefert δ dann die folgenden Werte:

Simulation von NFAs durch DFAs

Beispiel

- Betrachte den NFA N

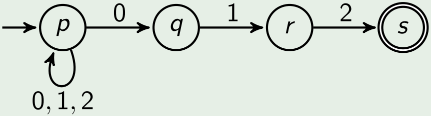


- Ausgehend von $Q_0 = \{p\}$ liefert δ dann die folgenden Werte:

δ	0	1	2

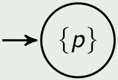
Beispiel

- Betrachte den NFA N



- Ausgehend von $Q_0 = \{p\}$ liefert δ dann die folgenden Werte:

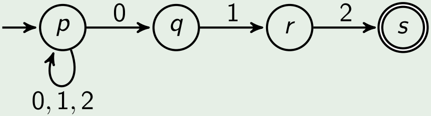
δ	0	1	2
$\{p\}$			



Simulation von NFAs durch DFAs

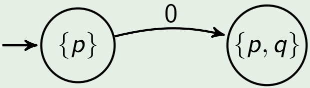
Beispiel

- Betrachte den NFA N



- Ausgehend von $Q_0 = \{p\}$ liefert δ dann die folgenden Werte:

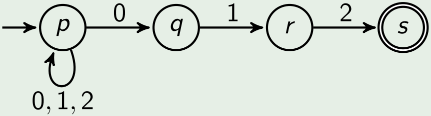
δ	0	1	2
$\{p\}$	$\{p, q\}$		



Simulation von NFAs durch DFAs

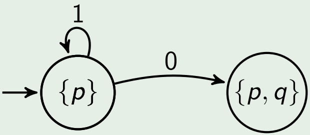
Beispiel

- Betrachte den NFA N



- Ausgehend von $Q_0 = \{p\}$ liefert δ dann die folgenden Werte:

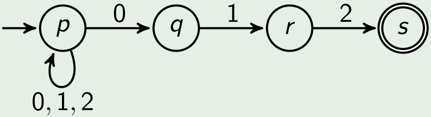
δ	0	1	2
$\{p\}$	$\{p, q\}$	$\{p\}$	



Simulation von NFAs durch DFAs

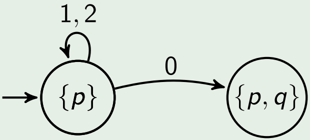
Beispiel

- Betrachte den NFA N



- Ausgehend von $Q_0 = \{p\}$ liefert δ dann die folgenden Werte:

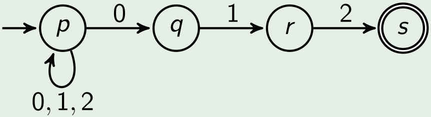
δ	0	1	2
$\{p\}$	$\{p, q\}$	$\{p\}$	$\{p\}$



Simulation von NFAs durch DFAs

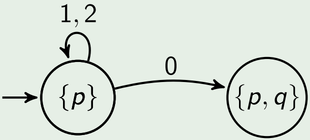
Beispiel

- Betrachte den NFA N



- Ausgehend von $Q_0 = \{p\}$ liefert δ dann die folgenden Werte:

δ	0	1	2
$\{p\}$	$\{p, q\}$	$\{p\}$	$\{p\}$
$\{p, q\}$			

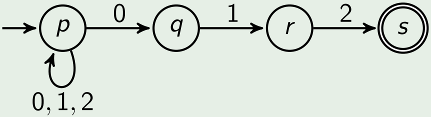


◁

Simulation von NFAs durch DFAs

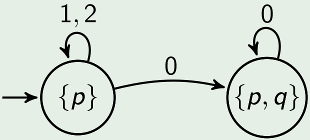
Beispiel

- Betrachte den NFA N



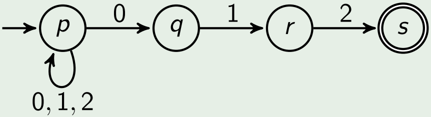
- Ausgehend von $Q_0 = \{p\}$ liefert δ dann die folgenden Werte:

δ	0	1	2
$\{p\}$	$\{p, q\}$	$\{p\}$	$\{p\}$
$\{p, q\}$	$\{p, q\}$		



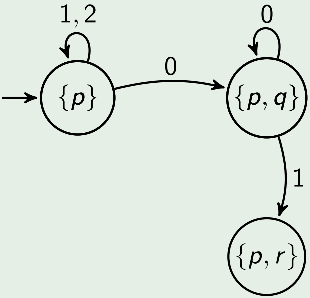
Beispiel

- Betrachte den NFA N



- Ausgehend von $Q_0 = \{p\}$ liefert δ dann die folgenden Werte:

δ	0	1	2
$\{p\}$	$\{p, q\}$	$\{p\}$	$\{p\}$
$\{p, q\}$	$\{p, q\}$	$\{p, r\}$	

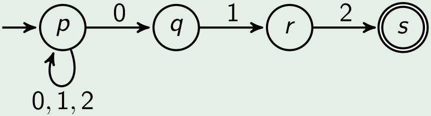


◁

Simulation von NFAs durch DFAs

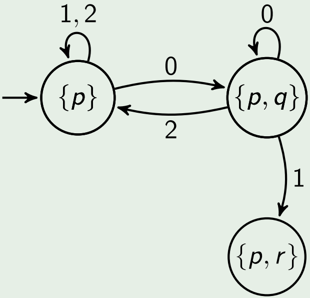
Beispiel

- Betrachte den NFA N



- Ausgehend von $Q_0 = \{p\}$ liefert δ dann die folgenden Werte:

δ	0	1	2
$\{p\}$	$\{p, q\}$	$\{p\}$	$\{p\}$
$\{p, q\}$	$\{p, q\}$	$\{p, r\}$	$\{p\}$

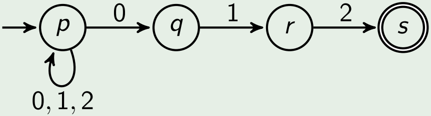


◁

Simulation von NFAs durch DFAs

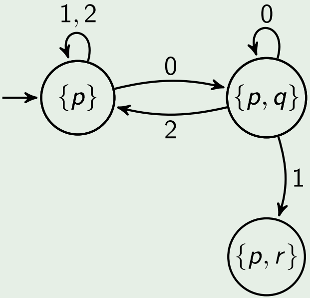
Beispiel

- Betrachte den NFA N



- Ausgehend von $Q_0 = \{p\}$ liefert δ dann die folgenden Werte:

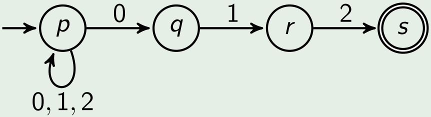
δ	0	1	2
$\{p\}$	$\{p,q\}$	$\{p\}$	$\{p\}$
$\{p,q\}$	$\{p,q\}$	$\{p,r\}$	$\{p\}$
$\{p,r\}$			



Simulation von NFAs durch DFAs

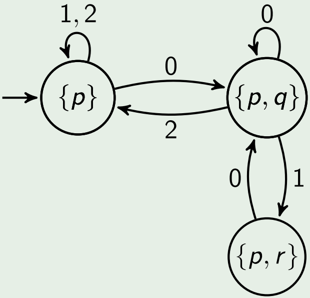
Beispiel

- Betrachte den NFA N



- Ausgehend von $Q_0 = \{p\}$ liefert δ dann die folgenden Werte:

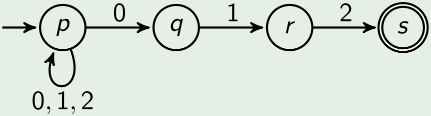
δ	0	1	2
$\{p\}$	$\{p, q\}$	$\{p\}$	$\{p\}$
$\{p, q\}$	$\{p, q\}$	$\{p, r\}$	$\{p\}$
$\{p, r\}$	$\{p, q\}$		



Simulation von NFAs durch DFAs

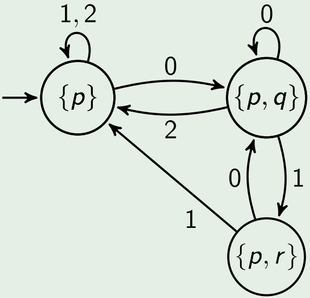
Beispiel

- Betrachte den NFA N



- Ausgehend von $Q_0 = \{p\}$ liefert δ dann die folgenden Werte:

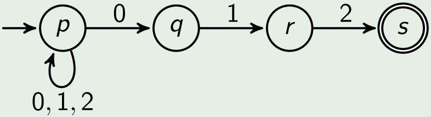
δ	0	1	2
$\{p\}$	$\{p,q\}$	$\{p\}$	$\{p\}$
$\{p,q\}$	$\{p,q\}$	$\{p,r\}$	$\{p\}$
$\{p,r\}$	$\{p,q\}$	$\{p\}$	



Simulation von NFAs durch DFAs

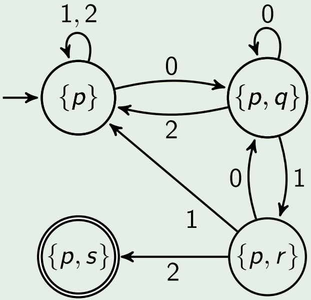
Beispiel

- Betrachte den NFA N



- Ausgehend von $Q_0 = \{p\}$ liefert δ dann die folgenden Werte:

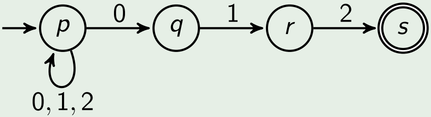
δ	0	1	2
$\{p\}$	$\{p, q\}$	$\{p\}$	$\{p\}$
$\{p, q\}$	$\{p, q\}$	$\{p, r\}$	$\{p\}$
$\{p, r\}$	$\{p, q\}$	$\{p\}$	$\{p, s\}$



Simulation von NFAs durch DFAs

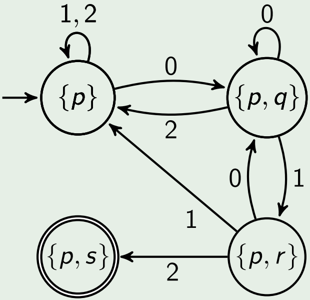
Beispiel

- Betrachte den NFA N



- Ausgehend von $Q_0 = \{p\}$ liefert δ dann die folgenden Werte:

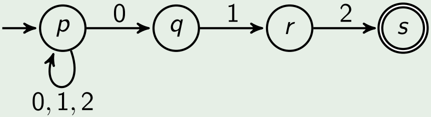
δ	0	1	2
$\{p\}$	$\{p,q\}$	$\{p\}$	$\{p\}$
$\{p,q\}$	$\{p,q\}$	$\{p,r\}$	$\{p\}$
$\{p,r\}$	$\{p,q\}$	$\{p\}$	$\{p,s\}$
$\{p,s\}$			



Simulation von NFAs durch DFAs

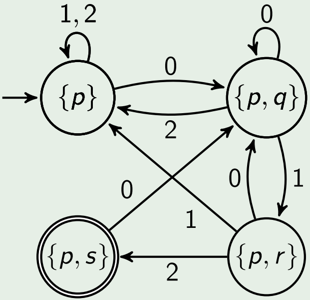
Beispiel

- Betrachte den NFA N



- Ausgehend von $Q_0 = \{p\}$ liefert δ dann die folgenden Werte:

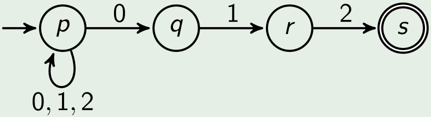
δ	0	1	2
$\{p\}$	$\{p, q\}$	$\{p\}$	$\{p\}$
$\{p, q\}$	$\{p, q\}$	$\{p, r\}$	$\{p\}$
$\{p, r\}$	$\{p, q\}$	$\{p\}$	$\{p, s\}$
$\{p, s\}$	$\{p, q\}$		



Simulation von NFAs durch DFAs

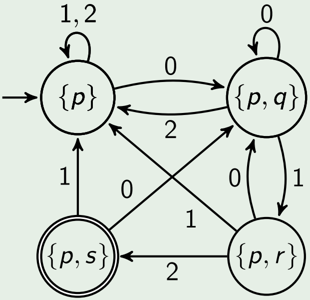
Beispiel

- Betrachte den NFA N



- Ausgehend von $Q_0 = \{p\}$ liefert δ dann die folgenden Werte:

δ	0	1	2
$\{p\}$	$\{p, q\}$	$\{p\}$	$\{p\}$
$\{p, q\}$	$\{p, q\}$	$\{p, r\}$	$\{p\}$
$\{p, r\}$	$\{p, q\}$	$\{p\}$	$\{p, s\}$
$\{p, s\}$	$\{p, q\}$	$\{p\}$	

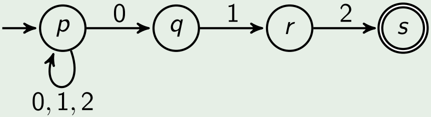


◁

Simulation von NFAs durch DFAs

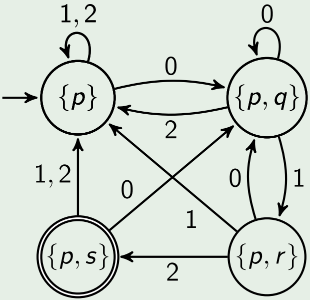
Beispiel

- Betrachte den NFA N



- Ausgehend von $Q_0 = \{p\}$ liefert δ dann die folgenden Werte:

δ	0	1	2
$\{p\}$	$\{p, q\}$	$\{p\}$	$\{p\}$
$\{p, q\}$	$\{p, q\}$	$\{p, r\}$	$\{p\}$
$\{p, r\}$	$\{p, q\}$	$\{p\}$	$\{p, s\}$
$\{p, s\}$	$\{p, q\}$	$\{p\}$	$\{p\}$



Simulation von NFAs durch DFAs

Bemerkung

- Im obigen Beispiel werden für die Konstruktion des Potenzmengen-automaten nur 4 der insgesamt

  $$\|\mathcal{P}(Z)\| = 2^{\|Z\|} = 2^4 = 16$$

  Zustände benötigt, da die übrigen 12 Zustände nicht erreichbar sind (hierbei bezeichnet $\|A\|$ die Mächtigkeit einer Menge A)
- Es gibt jedoch Beispiele, bei denen alle $2^{\|Z\|}$ Zustände benötigt werden (siehe Übungen)

NFAs erkennen genau die regulären Sprachen

Beweis von $\{L(N) \mid N \text{ ist ein NFA}\} \subseteq \text{REG}$

- Sei $N = (Z, \Sigma, \Delta, Q_0, E)$ ein NFA und sei $M = (\mathcal{P}(Z), \Sigma, \delta, Q_0, E')$ der zugehörige Potenzmengenautomat mit $\delta(Q,a) = \bigcup_{q \in Q} \Delta(q,a)$ und $E' = \{Q \subseteq Z \mid Q \cap E \neq \varnothing\}$
- Dann folgt die Korrektheit von M mittels folgender Behauptung, die wir auf der nächsten Folie beweisen.

Behauptung

$\hat{\delta}(Q_0, x)$ enthält genau die von N nach Lesen von x erreichbaren Zustände

- Für alle Wörter $x \in \Sigma^*$ gilt

$$\begin{aligned}
x \in L(N) \quad &\Leftrightarrow \quad N \text{ kann nach Lesen von } x \text{ einen Endzustand erreichen} \\
&\overset{\text{Beh.}}{\Leftrightarrow} \quad \hat{\delta}(Q_0, x) \cap E \neq \varnothing \\
&\Leftrightarrow \quad \hat{\delta}(Q_0, x) \in E' \\
&\Leftrightarrow \quad x \in L(M)
\end{aligned}$$

□

Beweis der Behauptung

Behauptung

$\hat{\delta}(Q_0, x)$ enthält genau die von N nach Lesen von x erreichbaren Zustände

Beweis durch Induktion über die Länge n von x

$n = 0$: klar, da $\hat{\delta}(Q_0, \varepsilon) = Q_0$ ist

$n \rightsquigarrow n + 1$: Sei $x = x_1 \dots x_{n+1}$ gegeben. Nach IV enthält

$$Q_n = \hat{\delta}(Q_0, x_1 \dots x_n)$$

die Zustände, die N nach Lesen von $x_1 \dots x_n$ erreichen kann. Wegen

$$\hat{\delta}(Q_0, x) = \delta(Q_n, x_{n+1}) = \bigcup_{q \in Q_n} \Delta(q, x_{n+1})$$

enthält dann aber $\hat{\delta}(Q_0, x)$ die Zustände, die N nach Lesen von x erreichen kann. $\square$

Abschlusseigenschaften der Klasse REG

Satz (Rabin und Scott)

$\mathrm{REG} = \{L(N) \mid N \text{ ist ein NFA}\}$

Korollar

Die Klasse REG der regulären Sprachen ist unter folgenden Operationen abgeschlossen:

- Komplement
- Schnitt
- Vereinigung
- Produkt
- Sternhülle

Überblick

Nächstes Ziel

Zeige, dass REG als Abschluss der endlichen Sprachen unter Vereinigung, Produkt und Sternhülle charakterisierbar ist

Bereits gezeigt:

Jede Sprache, die mittels der Operationen Vereinigung, Produkt und Sternhülle (sowie Schnitt und Komplement) angewandt auf endliche Sprachen darstellbar ist, ist regulär

Noch zu zeigen:

Jede reguläre Sprache lässt sich aus endlichen Sprachen mittels Vereinigung, Produkt und Sternhülle erzeugen

Konstruktive Charakterisierung von REG

Induktive Definition der Menge RA_Σ aller regulären Ausdrücke über Σ

Die Symbole $\varnothing$, ϵ und a ($a \in \Sigma$) sind reguläre Ausdrücke über Σ, die

- die leere Sprache $L(\varnothing) = \varnothing$
- die Sprache $L(\epsilon) = \{\varepsilon\}$ und
- für jedes $a \in \Sigma$ die Sprache $L(a) = \{a\}$ beschreiben

Sind α und β reguläre Ausdrücke über Σ, die die Sprachen $L(\alpha)$ und $L(\beta)$ beschreiben, so sind auch $\alpha\beta$, $(\alpha|\beta)$ und $(\alpha)^*$ reguläre Ausdrücke über Σ, die folgende Sprachen beschreiben:

- $L(\alpha\beta) = L(\alpha)L(\beta)$
- $L\big((\alpha|\beta)\big) = L(\alpha) \cup L(\beta)$
- $L\big((\alpha)^*\big) = L(\alpha)^*$

Bemerkung

RA_Σ ist eine Sprache über dem Alphabet $\Gamma = \Sigma \cup \{\varnothing, \epsilon, |, ^*, (,)\}$

Reguläre Ausdrücke

Beispiel

Die regulären Ausdrücke $(\epsilon)^*$, $(\emptyset)^*$, $(0|1)^*00$ und $(0|(\epsilon 0|\emptyset(1)^*))$ beschreiben folgende Sprachen:

γ	$(\epsilon)^*$	$(\emptyset)^*$	$(0\|1)^*00$	$(0\|(\epsilon 0\|\emptyset(1)^*))$
$L(\gamma)$	$\{\varepsilon\}$	$\{\varepsilon\}$	$\{x00 \mid x \in \{0,1\}^*\}$	$\{0\}$

◁

Vereinbarungen

- Um Klammern zu sparen, definieren wir folgende Präzedenzordnung: Der Sternoperator * bindet stärker als der Produktoperator und dieser wiederum stärker als der Vereinigungsoperator
- Für $(0|(\epsilon 0|\emptyset(1)^*))$ können wir also kurz $0|\epsilon 0|\emptyset 1^*$ schreiben
- Da der reguläre Ausdruck $\gamma\gamma^*$ die Sprache $L(\gamma)^+$ beschreibt, verwenden wir γ^+ als Abkürzung für den Ausdruck $\gamma\gamma^*$

Charakterisierung von REG durch reguläre Ausdrücke

Satz

$\text{REG} = \{L(\gamma) \mid \gamma \text{ ist ein regulärer Ausdruck}\}$

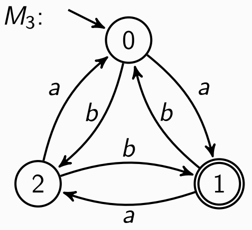
Beweis der Inklusion von rechts nach links.

Klar, da

- die Basisausdrücke $\emptyset$, ϵ und a, $a \in \Sigma^*$, reguläre Sprachen beschreiben und
- die Sprachklasse REG unter Produkt, Vereinigung und Sternhülle abgeschlossen ist $\square$

Charakterisierung von REG durch reguläre Ausdrücke

Für die umgekehrte Inklusion betrachten wir zunächst den DFA M_3.



Frage

Wie lässt sich die Sprache

$$L(M_3) = \{x \in \{a,b\}^* \mid \#_a(x) - \#_b(x) \equiv_3 1\}$$

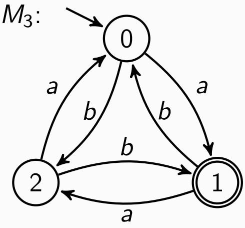
durch einen regulären Ausdruck beschreiben?

Antwort

- Sei $L_{p,q}$ die Sprache aller Wörter x, die M_3 vom Zustand p in den Zustand q überführen (d.h. $L_{p,q} = \{x \in \{a,b\}^* \mid \hat{\delta}(p,x) = q\}$)
- Weiter sei $L^{\neq r}_{p,q}$ die Sprache aller Wörter $x = x_1 \cdots x_n \in L_{p,q}$, die hierzu nur Zustände ungleich r benutzen (d.h. $\hat{\delta}(p, x_1 \cdots x_i) \neq r$ für $i = 1, \ldots, n-1$)
- Dann gilt $L(M_3) = L_{0,1} = L_{0,0} L^{\neq 0}_{0,1}$, wobei $L_{0,0} = (L^{\neq 0}_{0,0})^*$ ist

Charakterisierung von REG durch reguläre Ausdrücke

Antwort (Fortsetzung)



- Dann ist $L(M_3) = L_{0,0} L_{0,1}^{\neq 0} = (L_{0,0}^{\neq 0})^* L_{0,1}^{\neq 0}$
- $L_{0,1}^{\neq 0}$ und $L_{0,0}^{\neq 0}$ lassen sich durch folgende reguläre Ausdrücke beschreiben:

$$\gamma_{0,1}^{\neq 0} = (a|bb)(ab)^*$$

$$\gamma_{0,0}^{\neq 0} = a(ab)^*(aa|b) \mid b(ba)^*(a|bb) \mid \epsilon$$

- Also ist $L(M_3)$ durch folgenden regulären Ausdruck beschreibbar:

$$\gamma_{0,1} = (a(ab)^*(aa|b) \mid b(ba)^*(a|bb))^*(a|bb)(ab)^*$$

Charakterisierung von REG durch reguläre Ausdrücke

Satz

$\mathrm{REG} = \{L(\gamma) \mid \gamma \text{ ist ein regulärer Ausdruck}\}$

Beweis der Inklusion von links nach rechts.

- Wir konstruieren zu einem DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ einen regulären Ausdruck γ mit $L(\gamma) = L(M)$.
- Wir nehmen an, dass $Z = \{1, \dots, m\}$ und $q_0 = 1$ ist
- Dann lässt sich $L(M)$ als Vereinigung

  $$L(M) = \bigcup_{q \in E} L_{1,q}$$

  von Sprachen der Form $L_{p,q} = \{x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(p, x) = q\}$ darstellen
- Es reicht also, reguläre Ausdrücke für die Sprachen $L_{p,q}$ mit $1 \le p, q \le m$ anzugeben

Charakterisierung von REG durch reguläre Ausdrücke

Satz

REG $\subseteq \{L(\gamma) \mid \gamma$ ist ein regulärer Ausdruck$\}$

Beweis (Fortsetzung)

- Es reicht also, reguläre Ausdrücke für die Sprachen $L_{p,q}$ mit $1 \leq p, q \leq m$ anzugeben
- Hierzu betrachten wir für $r = 0, \ldots, m$ die Sprachen
$$L_{p,q}^{\leq r} = \left\{x_1 \ldots x_n \in L_{p,q} \,\middle|\, \text{für } i = 1, \ldots, n-1 \text{ ist } \hat{\delta}(p, x_1 \ldots x_i) \leq r\right\},$$
die wir auch einfach mit $L_{p,q}^r$ bezeichnen
- Wegen $L_{p,q} = L_{p,q}^m$ reicht es, reguläre Ausdrücke für die Sprachen $L_{p,q}^r$ mit $1 \leq p, q \leq m$ und $0 \leq r \leq m$ anzugeben
- Wir zeigen induktiv über r, dass die Sprachen $L_{p,q}^r$ durch reguläre Ausdrücke beschreibbar sind

Charakterisierung von REG durch reguläre Ausdrücke

Satz

REG $\subseteq \{L(\gamma) \mid \gamma$ ist ein regulärer Ausdruck$\}$

Beweis (Schluss)

$r = 0$: In diesem Fall sind die Sprachen

$$L^0_{p,q} = \begin{cases} \{a \in \Sigma \mid \delta(p,a) = q\}, & p \neq q, \\ \{a \in \Sigma \mid \delta(p,a) = q\} \cup \{\varepsilon\}, & \text{sonst} \end{cases}$$

endlich, also durch reg. Ausdrücke $\gamma^0_{p,q}$ beschreibbar

$r \rightsquigarrow r+1$: Nach IV existieren reguläre Ausdrücke $\gamma^r_{p,q}$ für die Sprachen $L^r_{p,q}$. Wegen

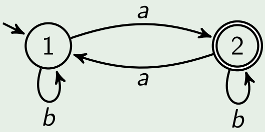
$$L^{r+1}_{p,q} = L^r_{p,q} \cup L^r_{p,r+1}(L^r_{r+1,r+1})^* L^r_{r+1,q}$$

sind dann $\gamma^{r+1}_{p,q} = \gamma^r_{p,q} | \gamma^r_{p,r+1}(\gamma^r_{r+1,r+1})^* \gamma^r_{r+1,q}$ reguläre Ausdrücke für die Sprachen $L^{r+1}_{p,q}$. $\square$

Charakterisierung von REG durch reguläre Ausdrücke

Beispiel

- Betrachte den DFA M



- Da M nur einen Endzustand $q = 2$ und insgesamt $m = 2$ Zustände besitzt, folgt

$$L(M) = \bigcup_{q \in E} L_{1,q} = L_{1,2} = L_{1,2}^{2}$$

Charakterisierung von REG durch reguläre Ausdrücke

Beispiel (Fortsetzung)

- Um reguläre Ausdrücke $\gamma^r_{p,q}$ für die Sprachen $L^r_{p,q}$ zu bestimmen, benutzen wir für $r \geq 0$ die Rekursionsformel

$$\gamma^{r+1}_{p,q} = \gamma^r_{p,q} | \gamma^r_{p,r+1} (\gamma^r_{r+1,r+1})^* \gamma^r_{r+1,q}$$

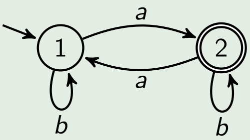
- Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\gamma^2_{1,2} &= \gamma^1_{1,2} | \gamma^1_{1,2} (\gamma^1_{2,2})^* \gamma^1_{2,2} \\
\gamma^1_{1,2} &= \gamma^0_{1,2} | \gamma^0_{1,1} (\gamma^0_{1,1})^* \gamma^0_{1,2} \\
\gamma^1_{2,2} &= \gamma^0_{2,2} | \gamma^0_{2,1} (\gamma^0_{1,1})^* \gamma^0_{1,2}
\end{aligned}$$

- Für die Berechnung von $\gamma^2_{1,2}$ werden also nur die regulären Ausdrücke $\gamma^0_{1,1}$, $\gamma^0_{1,2}$, $\gamma^0_{2,1}$, $\gamma^0_{2,2}$, $\gamma^1_{2,2}$ und $\gamma^1_{1,2}$ benötigt

Beispiel (Fortsetzung)

DFA M



Rekursionsformeln

$$L^0_{p,p} = \{c \in \Sigma \mid \delta(p,c) = p\} \cup \{\varepsilon\}$$

$$L^0_{p,q} = \{c \in \Sigma \mid \delta(p,c) = q\} \text{ für } p \neq q$$

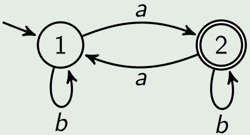
$$\gamma^{r+1}_{p,q} = \gamma^r_{p,q} | \gamma^r_{p,r+1} (\gamma^r_{r+1,r+1})^* \gamma^r_{r+1,q}$$

r	p,q: 1,1	1,2	2,1	2,2
0	$\gamma^0_{1,1}$	$\gamma^0_{1,2}$	$\gamma^0_{2,1}$	$\gamma^0_{2,2}$
1	-	$\gamma^1_{1,2}$	-	$\gamma^1_{2,2}$
2	-	$\gamma^2_{1,2}$	-	-

Charakterisierung von REG durch reguläre Ausdrücke

Beispiel (Fortsetzung)

DFA M



Rekursionsformel

$$L^0_{1,1} = \{c \in \Sigma \mid \delta(1,c) = 1\} \cup \{\varepsilon\} = \{\varepsilon, b\}$$

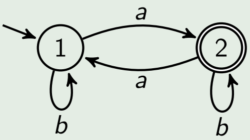
$\rightsquigarrow \quad \gamma^0_{1,1} = \epsilon|b$

r	p, q			
	1, 1	1, 2	2, 1	2, 2
0	$\epsilon\|b$	$\gamma^0_{1,2}$	$\gamma^0_{2,1}$	$\gamma^0_{2,2}$
1	-	$\gamma^1_{1,2}$	-	$\gamma^1_{2,2}$
2	-	$\gamma^2_{1,2}$	-	-

Charakterisierung von REG durch reguläre Ausdrücke

Beispiel (Fortsetzung)

DFA M



Rekursionsformel

$$L^0_{1,2} = \{c \in \Sigma \mid \delta(1, c) = 2\} = \{a\}$$

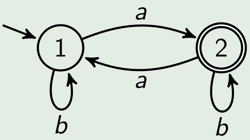
$$\rightsquigarrow \quad \gamma^0_{1,2} = a$$

r	p, q			
	$1,1$	$1,2$	$2,1$	$2,2$
0	$\epsilon \mid b$	a	$\gamma^0_{2,1}$	$\gamma^0_{2,2}$
1	-	$\gamma^1_{1,2}$	-	$\gamma^1_{2,2}$
2	-	$\gamma^2_{1,2}$	-	-

Charakterisierung von REG durch reguläre Ausdrücke

Beispiel (Fortsetzung)

DFA M



Rekursionsformel

$$L^0_{2,1} = \{c \in \Sigma \mid \delta(2,c) = 1\} = \{a\}$$

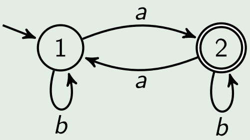
$$\rightsquigarrow \quad \gamma^0_{2,1} = a$$

r	p,q			
	$1,1$	$1,2$	$2,1$	$2,2$
0	$\epsilon \mid b$	a	a	$\gamma^0_{2,2}$
1	-	$\gamma^1_{1,2}$	-	$\gamma^1_{2,2}$
2	-	$\gamma^2_{1,2}$	-	-

Charakterisierung von REG durch reguläre Ausdrücke

Beispiel (Fortsetzung)

DFA M



Rekursionsformel

$$L^0_{2,2} = \{c \in \Sigma \mid \delta(2,c) = 2\} \cup \{\varepsilon\} = \{\varepsilon, b\}$$

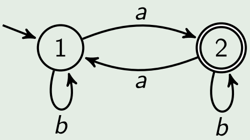
$$\rightsquigarrow \quad \gamma^0_{2,2} = \epsilon | b$$

r	p,q			
	1, 1	1, 2	2, 1	2, 2
0	$\epsilon\|b$	a	a	$\epsilon\|b$
1	-	$\gamma^1_{1,2}$	-	$\gamma^1_{2,2}$
2	-	$\gamma^2_{1,2}$	-	-

Charakterisierung von REG durch reguläre Ausdrücke

Beispiel (Fortsetzung)

DFA M



Rekursionsformel

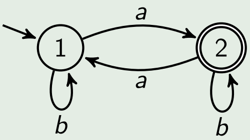
$$\begin{aligned}\gamma_{1,2}^{1} &= \gamma_{1,2}^{0} | \gamma_{1,1}^{0} (\gamma_{1,1}^{0})^* \gamma_{1,2}^{0} \\ &= a | (\epsilon | b)(\epsilon | b)^* a \\ &\equiv b^* a\end{aligned}$$

r	p, q			
	1, 1	1, 2	2, 1	2, 2
0	$\epsilon \vert b$	a	a	$\epsilon \vert b$
1	-	$b^* a$	-	$\gamma_{2,2}^{1}$
2	-	$\gamma_{1,2}^{2}$	-	-

Charakterisierung von REG durch reguläre Ausdrücke

Beispiel (Fortsetzung)

DFA M



Rekursionsformel

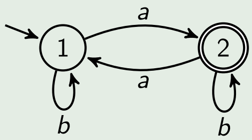
$$\gamma_{2,2}^{1} = \gamma_{2,2}^{0} | \gamma_{2,1}^{0} (\gamma_{1,1}^{0})^* \gamma_{1,2}^{0}$$
$$= (\epsilon|b)|a(\epsilon|b)^* a$$
$$\equiv \epsilon|b|ab^* a$$

r	p, q			
	1, 1	1, 2	2, 1	2, 2
0	$\epsilon\|b$	a	a	$\epsilon\|b$
1	-	$b^* a$	-	$\epsilon\|b\|ab^* a$
2	-	$\gamma_{1,2}^{2}$	-	-

Charakterisierung von REG durch reguläre Ausdrücke

Beispiel (Fortsetzung)

DFA M



Rekursionsformel

$$\gamma_{1,2}^{2} = \gamma_{1,2}^{1} | \gamma_{1,2}^{1} (\gamma_{2,2}^{1})^{*} \gamma_{2,2}^{1}$$
$$= b^{*}a | b^{*}a(\epsilon|b|ab^{*}a)^{*}(\epsilon|b|ab^{*}a)$$
$$\equiv b^{*}a(b|ab^{*}a)^{*}$$

r	p,q			
	$1,1$	$1,2$	$2,1$	$2,2$
0	$\epsilon\|b$	a	a	$\epsilon\|b$
1	-	$b^{*}a$	-	$\epsilon\|b\|ab^{*}a$
2	-	$b^{*}a(b\|ab^{*}a)^{*}$	-	-

◁

Charakterisierungen der Klasse REG

Korollar

Für jede Sprache L sind folgende Aussagen äquivalent:

- L ist regulär (d.h. es gibt einen DFA M mit $L = L(M)$)
- es gibt einen NFA N mit $L = L(N)$
- es gibt einen regulären Ausdruck γ mit $L = L(\gamma)$
- L lässt sich mit den Operationen Vereinigung, Produkt und Sternhülle aus endlichen Sprachen gewinnen
- L lässt sich mit den Operationen Vereinigung, Schnitt, Komplement, Produkt und Sternhülle aus endlichen Sprachen gewinnen

Ausblick

- Als nächstes wenden wir uns der Frage zu, wie sich die Anzahl der Zustände eines DFA minimieren lässt
- Da hierbei Äquivalenzrelationen eine wichtige Rolle spielen, befassen wir uns zunächst mit Relationalstrukturen

Relationalstrukturen

Definition

- Sei A eine nichtleere Menge, R ist eine k-stellige Relation auf A, wenn $R \subseteq A^k = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{k\text{-mal}} = \{(a_1, \ldots, a_k) \mid a_i \in A \text{ für } i = 1, \ldots, k\}$ ist
- Für $i = 1, \ldots, n$ sei R_i eine k_i-stellige Relation auf A. Dann heißt $(A; R_1, \ldots, R_n)$ Relationalstruktur
- Die Menge A heißt der Individuenbereich, die Trägermenge oder die Grundmenge der Relationalstruktur

Bemerkung

- Wir werden hier hauptsächlich den Fall $n = 1$, $k_1 = 2$, also (A, R) mit $R \subseteq A \times A$ betrachten
- Man nennt dann R eine (binäre) Relation auf A
- Oft wird für $(a, b) \in R$ auch die Infix-Schreibweise aRb benutzt

Relationalstrukturen

Beispiel

- (F, M) mit $F = \{f \mid f \text{ ist Fluss in Europa}\}$ und
  $$M = \{(f, g) \in F \times F \mid f \text{ mündet in } g\}$$
- (U, B) mit $U = \{x \mid x \text{ ist Berliner}\}$ und
  $$B = \{(x, y) \in U \times U \mid x \text{ ist Bruder von } y\}$$
- $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$, wobei M eine beliebige Menge und $\subseteq$ die Inklusionsrelation auf den Teilmengen von M ist
- (A, Id_A) mit $Id_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$ (die Identität auf A)
- $(\mathbb{R}, \leq)$
- $(\mathbb{Z}, |)$, wobei $|$ die "teilt"-Relation bezeichnet (d.h. $a|b$, falls ein $c \in \mathbb{Z}$ mit $b = ac$ existiert)

◁

Mengentheoretische Operationen auf Relationen

- Da Relationen Mengen sind, können wir den Schnitt, die Vereinigung, die Differenz und das Komplement von Relationen bilden:

$$\begin{aligned} R \cap S &= \{(x,y) \in A \times A \mid xRy \wedge xSy\} \\ R \cup S &= \{(x,y) \in A \times A \mid xRy \vee xSy\} \\ R - S &= \{(x,y) \in A \times A \mid xRy \wedge \neg xSy\} \\ \overline{R} &= (A \times A) - R \end{aligned}$$

- Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(A \times A)$ eine beliebige Menge von Relationen auf A. Dann sind der Schnitt über $\mathcal{M}$ und die Vereinigung über $\mathcal{M}$ folgende Relationen:

$$\bigcap \mathcal{M} = \bigcap_{R \in \mathcal{M}} R = \{(x,y) \mid \forall R \in \mathcal{M} : xRy\}$$

$$\bigcup \mathcal{M} = \bigcup_{R \in \mathcal{M}} R = \{(x,y) \mid \exists R \in \mathcal{M} : xRy\}$$

Weitere Operationen auf Relationen

Definition

- Die transponierte (konverse) Relation zu R ist
$$R^T = \{(y,x) \mid xRy\}$$
- R^T wird oft auch mit R^{-1} bezeichnet
- Zum Beispiel ist $(\mathbb{R}, \leq^T) = (\mathbb{R}, \geq)$
- Das Produkt (oder die Komposition) zweier Relationen R und S ist
$$R \circ S = \{(x,z) \in A \times A \mid \exists y \in A : xRy \wedge ySz\}$$

Beispiel

Ist B die Relation "ist Bruder von", V "ist Vater von", M "ist Mutter von" und $E = V \cup M$ "ist Elternteil von", so ist $B \circ E$ die Onkel-Relation $\triangleleft$