Probeklausur

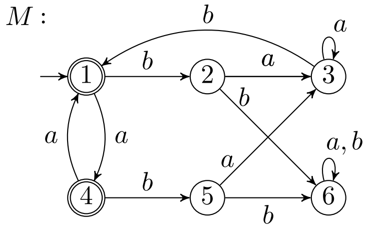
Besprechung am 2.3. ab 13.15 Uhr (wird aufgezeichnet)

Hinweise zur Klausur:

- Die Klausuren werden in diesem Semester als Take-Home-Klausuren stattfinden, d.h. die Aufgaben werden Ihnen per PDF in einem separaten Klausur-Moodle-Kurs zur Verfügung gestellt. Sie bearbeiten dann auf Papier die Aufgaben in 120 Minuten und haben danach zusätzlich Zeit abfotografierte oder gescannte Blätter hochzuladen. Zugelassene Hilfsmittel sind das Skript sowie eigene Notizen auf Papier (gedruckt oder handschriftlich). Eine Nutzung des Internets während der Klausur ist nicht zulässig. Sie müssen vor der Klausur eine Selbständigkeitserklärung abgeben. Dafür finden Sie im Klausur-Moodle-Kurs eine Vorlage zum Ausdrucken oder Abschreiben.
- Klausurtermin: 9. 3. 2021 um 10 Uhr („Einlass" - mit Scannen etc. kann die Klausur bis 14.00 Uhr andauern.)
- Nachklausurtermin: 7. 4. 2021 um 10 Uhr („Einlass"); die Nachklausur kann ohne Teilnahme an der ersten Klausur geschrieben werden.
- Teilnahme nur mit Übungsschein (d.h. 190 schriftliche Punkte + 11 bestandene MC-Tests ab Blatt 2 oder alter ÜS)
- Anmeldung bis 23.2.2021 (Klausur) bzw. 24.3.2021 (Nachklausur). Anmeldungen ohne ÜS werden schlussendlich annulliert.
- Die Bearbeitungszeit wird 120 Minuten betragen.
- Als Hilfsmittel sind nur zugelassen: eigene Notizen (per Hand/gedruckt), Skript. **Nicht zugelassen:** jegliche elektronischen Hilfsmittel
- Bitte halten Sie einen gültigen **amtlichen** Lichtbildausweis bereit. Dieser muss vor der Prüfung per Zoom in die Kamera gehalten werden. Als **amtlicher** Lichtbildausweis gilt: Personalausweis, Reisepass oder Führerschein, ein Foto auf der CampusCard genügt **nicht**.
- Diese Probeklausur hat eine andere Zusammensetzung als die Klausur.
- Es findet am 4.3. ab 15 Uhr eine technische Ablaufprobe im Klausur-Moodle-Kurs statt (Hochladen, Ausweiskontrolle, Gesundheitsfrage in Moodle etc.).

Aufgabe 1 ***30 Punkte***

Betrachten Sie den DFA M:



(a) Bestimmen Sie mit dem Algorithmus aus der Vorlesung einen Minimal-DFA für die Sprache $L(M)$. Geben Sie dazu auch eine Tabelle mit Unterscheidern minimaler Länge an.

(b) Geben Sie den Index sowie ein Repräsentantensystem der Nerode-Relation $\sim_{L(M)}$ an.

(c) Geben Sie einen regulären Ausdruck für die Sprache $L(M)$ an.

(d) Geben Sie einen NFA für $L(M)^*$ an. Nutzen Sie zur Konstruktion das Verfahren aus der Vorlesung.

(e) Sei $L = \left\{ w \in \{0,1,2,3\}^* \,\middle|\, \text{die Quersumme von } w \text{ ist durch 4 teilbar} \right\}$. Geben Sie für die Sprache L einen DFA an.

Hinweis: Die Quersumme von ε sei 0.

Aufgabe 2 ***30 Punkte***

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping-Lemmas, dass die Sprache $L = \left\{ a^i b^j c^k \,\middle|\, i,j,k \geq 0 \text{ und } (i = j \text{ oder } j = k) \right\}$ nicht regulär ist.

(b) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik für die Sprache L aus (b) an.

(c) Betrachten Sie die kontextfreie Grammatik $G = (\{S,A,B,C,D,E,F\}, \{a,b,c,d\}, P, S)$ in Chomsky- Normalform mit

$$\begin{aligned} P:\quad & S \to SS, SC, AB, CD, CE \\ & A \to a \quad B \to b \quad E \to SD \\ & C \to c \quad D \to d \end{aligned}$$

Entscheiden Sie mittels des CYK-Algorithmus, ob das Wort $x = abcdc$ in $L(G)$ enthalten ist.

(d) Sind cdc,abc, bcd bzw. $bcdc$ in $L(G)$ enthalten? Begründen Sie mit Hilfe der CYK-Tabelle aus c)

(e) Zeigen Sie, dass das Problem für eine gegebene CFL- Grammatik G und ein Wort w zu entscheiden, ob $w \in L(G)$ gilt, in NP liegt.

Aufgabe 3 ***20 Punkte***

(a) Geben Sie jeweils ohne Begründung an, welche der Sprachklassen REG, CFL, CSL, P, REC, RE oder co -RE identisch zu folgenden Klassen sind (z.B. $\mathcal{C}_i = \mathsf{REC}$).
$\mathcal{C}_1 = \left\{L(G) \mid G \text{ ist eine Grammatik}\right\}$, $\mathcal{C}_2 = \left\{\overline{L(M)} \mid M \text{ ist ein DFA}\right\}$,
$\mathcal{C}_3 = \left\{L(M) \mid M \text{ ist ein PDA}\right\}$, $\mathcal{C}_4 = \left\{L(M) \mid M \text{ ist eine 3-NTM}\right\}$,
$\mathcal{C}_5 = \left\{L(\gamma) \cap L(\gamma') \mid \gamma, \gamma' \text{ sind reguläre Ausdrücke}\right\}$,
$\mathcal{C}_6 = \left\{L(M) \mid M \text{ ist eine 1-DTM, die bei jeder Eingabe hält}\right\}$.

(b) Es gilt: $\mathsf{REG} \subseteq \mathsf{CFL} \subseteq \mathsf{CSL} \subseteq \mathsf{REC} \subseteq \mathsf{co\text{-}RE}$. Geben Sie ohne Begründung für jede der folgenden Sprachen an, welches die kleinste der obigen Klassen ist, in der die Sprache liegt (alle sind in $\mathsf{co\text{-}RE}$).

- $L_1 = \left\{a^{n^2} \mid n \geq 0\right\}$,
- $L_2 = \left\{w \in \{0,1\}^* \mid M_w(1) = \uparrow\right\}$.

(c) Zeigen Sie, dass das Problem XSAT für ein gegebenes Paar (F, G) von Formeln zu entscheiden, ob genau eine erfüllbar ist, NP-hart ist.

Aufgabe 4 ***18 Punkte***

Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q, \{p\})$ eine 1-NTM und $Z = \{p, q\}, \Sigma = \{a, b\}$ und $K_1 = abp\sqcup$, $K_2 = qab$, $K_3 = aqb$ sowie $K_4 = apb$ Konfigurationen von M.

(a) Welche der Konfigurationen K_i ist die Startkonfiguration bei Eingabe ab? Welche der Konfigurationen K_i sind akzeptierende Konfigurationen?

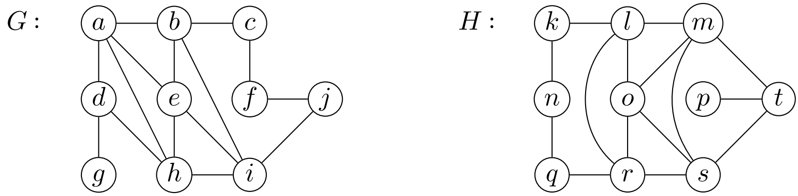
(b) Ist M eine DTM, falls $\delta = \{qa \to qbR,\ qa \to qaR\}$ gilt? Begründen Sie.

(c) Nehmen Sie an, dass $\delta = \{q\sqcup \to paR,\ qa \to qaR\}$ gilt. Geben Sie die Sprache $L(M)$ und die von M berechnete Funktion f an. Entscheidet M alle Eingaben $x \in \{a, b\}^*$? Begründen Sie.

(d) Es sei $L = \left\{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ entscheidet alle Eingaben } x \in \{0,1\}^*\right\}$. Zeigen Sie, dass L RE-hart ist.

Hinweis: In der Kurzschreibweise für Konfigurationen von 1-NTMs gibt $aqba$ an, dass der Schreiblesekopf im Zustand q auf dem b steht.

Aufgabe 5 Betrachten Sie folgende Graphen: ***22 Punkte***



(a) Geben Sie einen Isomorphismus φ von G nach H sowie eine stabile Menge S und eine Clique C in G mit jeweils maximaler Größe an. Begründen Sie, warum keine größere stabile Menge bzw. keine größere Clique existiert.

(b) Zeigen Sie für beliebige Graphen $G = (V, E)$ und jede stabile Menge S, dass $U = V \setminus S$ eine Knotenüberdeckung ist.

(c) Geben Sie jeweils einen Hamiltonpfad bzw. Hamiltonkreis in G an oder begründen Sie, warum keiner existiert.

(d) Zeigen Sie, dass es in Polynomialzeit entscheidbar ist, ob für gegebenes (G, k) der Graph G eine Knotenüberdeckung der Größe k und eine Clique der Größe $k + 2$ hat.