Übungsblatt 14

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 23.–26. 2. 2021
Bearbeitung des Moodle-MC-Tests bis 22. 2. 2021, 23:59 Uhr

Aufgabe 88 Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen: ***mündlich***

(a) Eine Sprache A ist genau dann NP-vollständig, wenn ihr Komplement vollständig für $\mathsf{co\text{-}NP}$ ist.

(b) $\mathsf{P} = \mathsf{NP} \Rightarrow \mathsf{NP} = \mathsf{co\text{-}NP}$

(c) $\mathsf{NP} \subseteq \mathsf{co\text{-}NP} \Leftrightarrow \mathsf{co\text{-}NP} \subseteq \mathsf{NP}$

Aufgabe 89 ***mündlich***

Klassifizieren Sie folgende Entscheidungsprobleme für boolesche Formeln entsprechend ihrer Komplexität als effizient lösbar (d. h. in P) bzw. nicht effizient lösbar (d. h. NP-hart oder $\mathsf{co\text{-}NP}$-hart). Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $L_1 = \textsc{UnSat} = \{F \mid F \text{ ist eine unerfüllbare Formel}\}$

(b) $L_2 = \text{TAUT} = \{F \mid F \text{ ist eine aussagenlogische Tautologie}\}$

(c) $L_3 = \{F \mid F \text{ ist eine erfüllbare Formel der Form } G \to H\}$,

(d) $L_4 = \{F \mid F \text{ ist eine Tautologie der Form } G \to H\}$,

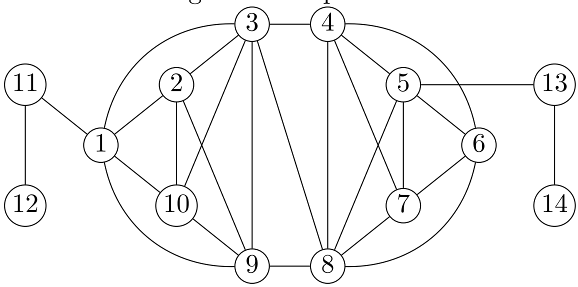
(e) $L_5 = \{F \mid F \text{ ist in KNF und es ex. eine Belegung } a \text{ mit } F(a) = 0\}$,

(f) $L_6 = \{F \mid \text{es gibt eine Belegung } a \text{ mit } F(a) = 0\}$.

Hinweis:

- Eine *Clique* C in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine Teilmenge $C \subseteq V$, sodass der Subgraph $G[C] = (C, \{\{u, v\} \mid u, v \in C\})$ vollständig ist, d.h. für alle $u, v \in C$ gilt $\{u, v\} \in E$. Die *Cliquenzahl* $\omega(G)$ ist die Größe einer größten Clique in G.
- Eine *stabile Menge* S (engl. independent set) in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine Teilmenge $S \subseteq V$, sodass der Subgraph $G[S] = (S, \{\{u, v\} \mid u, v \in S\})$ leer ist, d.h. für alle $u, v \in S$ gilt $\{u, v\} \notin E$. Die *Stabilitätszahl* $\alpha(G)$ ist die Größe einer größten stabilen Menge in G.
- Eine *Knotenüberdeckung* U (engl. vertex cover) in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine Teilmenge $U \subseteq V$, sodass für alle $\{u, v\} \in E$ gilt: $u \in U$ oder $v \in U$, d.h. alle Kanten sind mit mindestens einem Endpunkt abgedeckt. Die *Knotenüberdeckungszahl* $\beta(G)$ ist die Größe einer kleinsten Knotenüberdeckung in G.
- Ein *Hamiltonpfad* ist ein Pfad $v_0, \dots, v_l$ (d.h. ein Weg mit $i \neq j \Rightarrow v_i \neq v_j$) der alle Knoten enthält, d.h. $V = \{v_0, \dots, v_l\}$. Falls $v_0, \dots, v_l$ ein Hamiltonpfad ist und $\{v_0, v_l\} \in E$, so heißt $v_0, \dots, v_l, v_0$ *Hamiltonkreis*.

Aufgabe 90 Betrachten Sie folgenden Graphen G: ***mündlich***



(a) Geben Sie mit Begründung jeweils an, ob G einen Hamiltonpfad bzw. einen Hamiltonkreis enthält.

(b) Geben Sie 4 Cliquen C_1, C_2, C_3, C_4 in G an, die alle Knoten abdecken, d.h. $\bigcup_{i=1}^{4} C_i = \{1, \dots, 14\}$.

(c) Geben Sie die Cliquenzahl $\omega(G)$, die Stabilitätszahl $\alpha(G)$ und die Knotenüberdeckungszahl $\beta(G)$ von G an. Begründen Sie jeweils, dass diese Werte weder größer noch kleiner sein können.

Aufgabe 91 ***mündlich***

Klassifizieren Sie folgende Probleme als effizient lösbar (d. h. in P) bzw. nicht effizient lösbar (d. h. NP-hart oder $\mathsf{co\text{-}NP}$-hart). Begründen Sie.

(a) Das Subgraph-Isomorphieproblem SubGI: Entscheide für zwei gegebene Graphen G und H, ob G isomorph zu einem Subgraphen von H ist.

(b) Das Problem 2021-Clique: Hat ein gegebener Graph eine Clique der Größe 2021?

(c) Entscheide für einen Graphen G und eine Zahl k, ob G eine Clique der Größe k oder eine stabile Menge der Größe k hat.