Übungsblatt 11

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 2.–5. 2. 2021
Bearbeitung des Moodle-MC-Tests bis 1. 2. 2021, 23:59 Uhr
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 9. 2. 2021, 23:59 Uhr

Aufgabe 68 ***mündlich***

Sei $N = (\{z, z', e\}, \{0,1\}, \{0,1,\sqcup\}, \delta, z, \{e\})$ eine NTM mit

$$\delta: \begin{array}{llll} z\,0 \to z'1R, & z\,0 \to z'0R, & z\,1 \to z'1R, & z\sqcup \to e\sqcup L, \\ z'0 \to z\,0R, & z'1 \to z\,1R, & z'\sqcup \to e\sqcup L & \\ e\,1 \to e\,1L, & & & \end{array}$$

(a) Geben Sie zwei mögliche Rechnungen (Konfigurationenfolgen) von $N(0001)$ (d.h. N bei Eingabe 0001) an, die sich nicht fortsetzen lassen, für deren letzte Konfiguration es also keine Folgekonfiguration gibt.
(b) Beschreiben Sie informell das Verhalten von N, wenn N in der Konfiguration $00zw$ mit $w \in \{0,1\}^*$ gestartet wird.
(c) Welche Sprache $L(N)$ erkennt N?

Aufgabe 69 ***6 Punkte***

Sei $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a,b\}, \{a,b,\sqcup\}, \delta, z_0, \{z_2\})$ eine DTM mit

$$\delta: \begin{array}{lll} z_0a \to z_1bN, & z_0b \to z_1aN, & z_0\sqcup \to z_2\sqcup N, \\ z_1a \to z_0aR, & z_1b \to z_0bR, & z_1\sqcup \to z_0\sqcup R. \end{array}$$

(a) Geben Sie die Rechnung (Konfigurationenfolge) von $M(aabba)$ an. *(4 Punkte)*
(b) Beschreiben Sie informell das Verhalten von M, wenn M im Zustand z_0 mit einer beliebigen Bandinschrift gestartet wird (d.h. nicht notwendigerweise in einer korrekten Startkonfiguration K_x für eine Eingabe x). *(2 Punkte)*

Aufgabe 70 Gegeben sei die Sprache $L = \{a^nb^nc^n \mid n \geq 1\}$. ***mündlich***

Geben Sie eine 1-DTM M für L an, die außer den Eingabefeldern nur das erste Blank hinter der Eingabe besucht, und erläutern Sie Ihre Konstruktion.

Aufgabe 71 Gegeben sei die Sprache $L = \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$. ***9 Punkte***

Geben Sie eine 1-NTM für L an, die außer den Eingabefeldern nur das erste Blank hinter der Eingabe besucht, und erläutern Sie Ihre Konstruktion.

Aufgabe 72 ***mündlich***

Konstruieren Sie aus einer CNF-Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine 3-DTM M mit $L(M) = L(G)$, die für ein festes $c \in \mathbb{N}$ höchstens $cn + c$ Bandfelder besucht, wenn ihre Eingabe Länge n hat. Es genügt, wenn Sie M beschreiben, Sie müssen nicht die Überführungsfunktion angeben.

Hinweis: M sollte für eine Eingabe der Länge n alle Satzformen $\alpha \in (V \cup \Sigma)^n$ betrachten, d.h. auf einem Band soll jedes α einmal gestanden haben, ehe eine Rechnung verworfen wird.

Bemerkung: Diese Aufgabe zeigt, dass CFL in der Sprachklasse DCSL enthalten ist. Da L aus Aufgabe 70 nicht kontextfrei ist, gilt damit $\mathsf{CFL} \subsetneq \mathsf{DCSL}$.

Aufgabe 73 Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine kontextsensitive Grammatik. ***8 Punkte***

Bezeichne T_m^n die Menge der Satzformen bis zur Länge n, die sich in höchstens m Schritten aus dem Startsymbol S ableiten lassen.

(a) Zeigen Sie, dass falls $T_m^n = T_{m+1}^n$ gilt, auch $\Sigma^n \cap L(G) = T_m^n \cap \Sigma^n$ gilt, d.h. T_m^n enthält dann bereits alle Wörter der Länge n aus $L(G)$. *(mündlich)*

(b) Sei $\hat{m}$ das kleinste m, für das $T_m^n = T_{m+1}^n$ gilt und weiter sei $s = \|V\| + \|\Sigma\|$. Zeigen Sie: $\hat{m} \leq \sum_{i=1}^{n} s^i \leq (s+1)^n$. *(mündlich)*

(c) Geben Sie für $m \geq 0$ die Mengen T_m^6 in alphabetisch sortierter Reihenfolge an (z.B. $\{aaBabb, aBabbb, abbabC, \dots\}$) für die Typ-1-Grammatik $G = (V, \{a, b\}, P, A)$ mit $V = \{A, B, C\}$ und folgenden Regeln an:

$$
\begin{array}{llrll}
P\colon & A \to BabC & (1) & Ba \to Cba, aBa & (2,3) \\
& bCB \to aCb & (4) & C \to b & (5) \\
& bC \to BbCa, bCb & (6,7) & &
\end{array}
$$

(5 Punkte)

(d) Beschreiben Sie informell einen Algorithmus, der folgendes Problem löst und begründen Sie kurz, warum dieser immer terminiert.

Wortproblem für kontextsensitive Grammatiken

Gegeben: Eine kontextsensitive Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ und ein Wort $x \in \Sigma^*$

Gefragt: Ist x in $L(G)$? *(3 Punkte)*

Aufgabe 74 ***7 Punkte***

Lokalisieren Sie folgende Sprachen möglichst exakt innerhalb der Chomsky-Hierarchie, d.h. geben Sie ohne Begründung jeweils das größte $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ an, sodass die Sprache L_j $(1 \le j \le 7)$ eine Typ-i-Sprache ist.

(a) $L_1 = \left\{a^n b^n a^n b^n c^n \,\middle|\, n \ge 0\right\}$,

(b) $L_2 = \left\{a^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \,\middle|\, n \ge 0\right\}$ ($\lfloor r \rfloor = \max\left\{m \in \mathbb{N} \,\middle|\, m \le r\right\}$ für $r \in \mathbb{R}$),

(c) $L_3 = \{(ab)^n a^m b^n \mid 1 \le n < m\}$,

(d) $L_4 = \left\{a^{|w|} b^{|w|} \,\middle|\, w \in L_1\right\}$,

(e) $L_5 = \{xyx^R \mid x, y \in \{a, b\}^+, |x| \le |y|\}$,

(f) $L_6 = \{xyx^R \mid x, y \in \{a, b\}^+, |x| \ge |y|\}$,

(g) $L_7 = \left\{u.v.w.x \,\middle|\, u.v.w.x \text{ ist gültige IPv4-Adresse}, u, v, w, x \in \left\{i \,\middle|\, 0 \le i \le 9\right\}^*\right\}$.