Übungsblatt 3

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 24.–27. 11. 2020
Bearbeitung des Moodle-MC-Tests bis 23. 11. 2020, 23:59 Uhr
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 1. 12. 2020, 23:59 Uhr

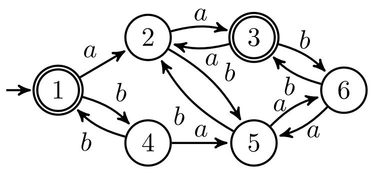
Aufgabe 16 ***4 Punkte***

Gegeben sei nebenstehender DFA.

Geben Sie möglichst einfache reguläre Ausdrücke für die folgenden Sprachen an.

(a) $L^0_{1,2}$, $L^6_{2,1}$, $L^4_{2,5}$, *(mündlich)*

(b) $L^5_{2,3}$ und $L^5_{1,3}$. *(4 Punkte)*



Aufgabe 17 ***mündlich***

Ein ENFA (extended/erweiterter NFA) ist ein 5-Tupel $N = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$, wobei Z,Σ,S und E wie bei einem NFA definiert sind, δ die Form

$$\delta : Z \times \Sigma^+ \to \mathcal{P}(Z)$$

hat und $\{(z, w) \mid \delta(z, w) \neq \varnothing\}$ endlich ist. Der Zustandsgraph von N hat also nur endlich viele Kanten, die mit Wörtern $w \in \Sigma^+$ beschriftet sind.

(a) Definieren Sie die von einem ENFA N erkannte Sprache formal.

(b) Zeigen Sie, dass bei Verzicht auf die Bedingung „$\{(z, w) \mid \delta(z, w) \neq \varnothing\}$ ist endlich“ jede Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ von einem ENFA erkannt wird.

(c) Zeigen Sie, dass $\{L(N) \mid N \text{ ist ein ENFA}\} = \mathsf{REG}$ ist, indem Sie aus einem beliebigen ENFA einen äquivalenten NFA konstruieren und umgekehrt.

(d) Zeigen Sie, dass $\{L(N) \mid N \text{ ist ein ENFA}\} = \mathsf{REG}$ auch gilt, wenn man Σ^+ durch Σ^* ersetzt, d.h. $\delta : Z \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Z)$.

Aufgabe 18 Seien Σ und Γ beliebige Alphabete. ***mündlich***

Eine Funktion h: $\Sigma^* \to \Gamma^*$ heißt *Homomorphismus*, falls

$$\forall x_1 \dots x_n \in \Sigma^+ : h(x_1 \dots x_n) = h(x_1) \dots h(x_n) \qquad \text{und} \quad h(\varepsilon) = \varepsilon.$$

D.h. h ersetzt Zeichen aus Σ durch Wörter aus Γ^*. Für eine Sprache L gelte:

$$h(L) = \left\{ h(w) \,\middle|\, w \in L \right\}.$$

(a) Betrachten Sie den Homomorphismus $h\colon \{a,b,c,d\}^* \to \{0,1\}^*$ mit $h(a) = 0$, $h(b) = 01$, $h(c) = 100$ und $h(d) = \varepsilon$. Bestimmen Sie $h(dabd)$ und $h(cc)$. Welche der Wörter 001100 und 10010 sind in $h(L)$ mit $L = L((a|ab|cd)^*)$? Begründen Sie. Geben Sie zudem einen regulären Ausdruck γ mit $L(\gamma) = h(L)$ an.

(b) Zeigen Sie, dass REG unter Homomorphismen abgeschlossen ist. D.h. für reguläres $L \subseteq \Sigma^*$ und einen Homomorphismus $h\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ ist auch $h(L)$ regulär. (*Hinweis:* Konstruieren Sie einen regulären Ausdruck oder ENFA.)

Aufgabe 19 ***mündlich***

Beschreiben Sie umgangssprachlich die folgenden Relationen auf der Menge aller Menschen. Dabei bezeichne R_1 die Relation „ist verheiratet mit“, R_2 die Relation „ist Mutter von“ und R_3 die Relation „ist Kind von“.

(a) $R_1 \circ R_2$,

(b) $R_2 \circ R_1$,

(c) $R_2 \circ R_3$,

(d) $R_3 \circ R_2$,

(e) $R_2 \circ R_1 \circ R_3$.

Aufgabe 20 ***10 Punkte***

Betrachten Sie ein Haus mit einer Ihnen unbekannten endlichen Anzahl von Etagen (mindestens 2). Auf jeder Etage gibt es genau zwei Wohnungen (eine links, eine rechts) und außer auf der untersten Etage liegt direkt unter jeder Wohnung genau eine weitere. Alle Wohnungen sind bewohnt, niemand bewohnt 2 Wohnungen. Bezeichne U die Relation „wohnt direkt unter“ und N die Relation „wohnt auf derselben Etage gegenüber“. Ordnen Sie den Beziehungen a) - c) eine oder mehrere der folgenden Relationen zu:

$\bigcup_{i=1}^{\infty} N \circ U^i \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} U^i$, $\quad N \circ N$, $\quad N \cup (U \circ U^{-1})$, $\quad (U \circ U^{-1}) \cup (U^{-1} \circ U)$, $\quad N \cup (N \circ N^{-1})$, $(N \cup N^2) \circ \bigcup_{i=1}^{\infty} U^i$, $\quad (U \circ N \circ U^{-1} \circ N) \cup (U^{-1} \circ N \circ U \circ N)$, $\quad \bigcup_{i=1}^{\infty} N^i$.

(a) „wohnt in derselben Wohnung wie“

(b) „wohnt auf derselben Etage wie“

(c) „wohnt auf niedrigerer Etage als“

Geben Sie je zwei Möglichkeiten an, folgende Beziehungen mit den Relationen U und N und den oben genutzten Operationen auszudrücken:

(d) „wohnt schräg unter“ (1 Etage tiefer)

(e) „wohnt auf derselben Seite wie“

Formulieren Sie folgende Aussagen umgangssprachlich:

(f) $(\text{Jana}, \text{Jana}) \in N^2 \wedge \forall x : (x, \text{Jana}) \notin U$.

(g) $\exists x : ((\text{Alice}, x) \in N \wedge (x, \text{Bob}) \notin N)$

Aufgabe 21 Sei $R = \{(a,a),\ (a,b),\ (a,c),\ (b,b),\ (b,c)\}$. ***8 Punkte***

Wie viele Paare müssen zu R jeweils mindestens hinzugefügt werden, um eine reflexive, symmetrische, antisymmetrische, transitive Relation, Ordnung bzw. eine Äquivalenzrelation auf $A = \{a,b,c,d\}$ zu erhalten? Geben Sie für jede Eigenschaft einzeln jeweils diese Paare an. Anzugeben sind also 6 Zahlen und 6 Mengen von Paaren.

Aufgabe 22 Sei $V = \{1,\dots,5\}$ und R folgende Relation auf V ***8 Punkte***

$$R = \{(1,1),(1,5),(2,4),(3,3),(4,1),(4,2),(5,4)\}$$

(a) Welche Eigenschaften (reflexiv, irreflexiv, symmetrisch, asymmetrisch, antisymmetrisch, transitiv) hat diese Relation? *(3 Punkte)*

(b) Geben Sie die Relationen R^2, $\bigcup_{i=0}^{3} R^i$ und $\bigcap_{i=0}^{3} R^i$ an. *(3 Punkte)*

Geben Sie jeweils eine kleinstmögliche Relation auf V an, die

(c) reflexiv und symmetrisch, aber nicht transitiv *(1 Punkt)*

(d) symmetrisch und transitiv, aber nicht reflexiv *(1 Punkt)*

ist und beweisen Sie, dass Ihre Relationen kleinstmöglich sind.